

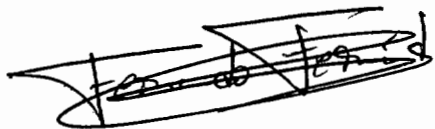
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE G.C.

Facultad de CC. Económicas y Empresariales

Departamento de Economía Aplicada

Acoplamiento y Sincronización entre
los Ciclos Económicos: Aportaciones
Analíticas y Estudio de un Modelo
No Lineal con Factores Monetarios

Vº Bº del Director



Fdo. Dr. Fernando Fernández Rodríguez
U.L.P.G.C.

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor por
Juan Hernández Guerra.



Las Palmas de G.C., julio de 1997

Enumerar la gran cantidad de personas que me han ayudado con su colaboración y apoyo en esta Tesis Doctoral supone una labor excesivamente extensa, además de prácticamente imposible. A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

No obstante, me gustaría hacer una mención especial al Dr. D. Carmelo León González y Dr. D. Javier Campos Méndez, que desinteresadamente me han prestado su consejo y ayuda en las grandes lagunas que, por mi formación, tengo en Economía. Con ello han demostrado un espíritu universitario que no puedo, ni quiero, dejar de mencionar.

Agradezco también la financiación recibida de la Fundación Universitaria de Las Palmas a través de una beca concedida en el curso 93-94, que me ayudó a iniciar este estudio.

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. D. Fernando Fernández Rodríguez por sus sabios consejos y direcciones, mediante los cuales hemos podido llevar a buen término el trabajo que iniciamos, y a mis compañeros de la Sección de Métodos Matemáticos en Economía, que siempre han confiado en mi trabajo y me han prestado su colaboración.

Por último, agradezco profundamente el apoyo y los ánimos que han mostrado siempre mis familiares más allegados, así como todos aquellos que han estado y están cerca de mí. Yo sé que sin ellos no hubiera podido alcanzar esta meta.

A mis padres

Contenidos

1	Introducción y objetivos	1
1.1	Algunas consideraciones sobre el determinismo en la ciencia económica	1
1.2	Linealidad y no linealidad en la Economía	6
1.2.1	Sistemas estáticos en Economía	6
1.2.2	Sistemas lineales en Economía	9
1.2.3	Sistemas no lineales en Economía	11
1.3	Factores exógenos y endógenos en la explicación del ciclo económico	15
1.3.1	Evolución histórica de los enfoques exógenos y endógenos. El papel de las expectativas	17
1.4	Acoplamiento y sincronización entre los ciclos económicos	22
1.4.1	La interacción entre ciclos económicos	22
1.4.2	El modelo de onda larga de Sterman (1985)	28
1.5	Objetivos	32
2	Conceptos fundamentales	39
2.1	Sistemas dinámicos	39
2.2	Atractores	44
2.3	Sistemas lineales	52
2.4	Estabilidad estructural. Estabilidad local de puntos de equilibrio y órbitas cerradas	58

2.4.1	Estabilidad estructural	58
2.4.2	Estabilidad local de puntos de equilibrio	60
2.4.3	Estabilidad local de órbitas cerradas	63
2.5	Sistemas planos. Teorema de Poincaré-Bendixon	67
2.6	Bifurcaciones	69
2.6.1	Bifurcaciones de punto de silla y de Hopf	71
2.6.2	Bifurcaciones en sistemas dinámicos en tiempo discreto .	76
2.6.3	Bifurcaciones sucesivas	79
2.7	Acoplamiento de osciladores	83
2.7.1	Desarrollo teórico	84
2.7.2	Formas de emparejamiento de osciladores	93
3	Resultados (I): Estudio cualitativo de un modelo de acoplamiento entre ciclos económicos	97
3.1	Desarrollo histórico	98
3.2	El modelo de onda larga desagregado	104
3.3	Estudio analítico del modelo	115
3.3.1	Simplificación del modelo	116
3.4	Caso de independencia entre los sectores	119
3.5	Caso de dependencia total entre los sectores	127
3.6	Discusión	141
4	Resultados (II): Modelo desagregado monetario de acoplamiento entre ciclos económicos	145
4.1	Introducción	145
4.1.1	El dinero en la teoría y modelización económica	148
4.1.2	Modelo monetario de Tobin y posteriores	151
4.2	Modelo con factores monetarios de acoplamiento entre ciclos económicos	160
4.2.1	Fundamentos del modelo	160
4.2.2	Desarrollo del modelo	162

4.3	Simulación y resultados del modelo	184
4.3.1	Comportamiento general. Regiones de acoplamiento . . .	186
4.3.2	Efecto de la existencia de dinero	203
4.3.3	Hipótesis de neutralidad del dinero en el modelo	210
4.3.4	Una política monetaria de control de inflación sobre el modelo	216
4.4	Discusión	221
5	Conclusiones	227
6	Problemas abiertos y comentarios finales	233
	Bibliografía	237

Lista de Figuras

2.1	Atractor de Lorenz. Fuente: Lorenz (1993).	49
2.2	Comportamiento del sistema lineal $\dot{x} = Ax$: a) $Re\lambda < 0$, $Im\lambda = 0$, siendo λ cualquier valor propio de la matriz A . El punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^2$ es un sumidero; b) $Re\lambda > 0$, $Im\lambda = 0$, siendo λ cualquier valor propio de la matriz A . El punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^2$ es una fuente.	53
2.3	Subespacios estables e inestables de sistemas lineales. Fuente: Hirsch y Smale (1974).	55
2.4	Comportamiento local de un sistema en torno a un punto de equilibrio x^* : a) x^* es asintóticamente estable localmente; b) x^* es inestable.	60
2.5	Sección local transversal de un sistema dinámico.	62
2.6	Bifurcación de punto de silla. Diagrama de bifurcación.	70
2.7	Bifurcaciones de Hopf. Arriba: Bifurcación subcrítica. Abajo: Bifurcación supercrítica. Fuente: Lorenz (1993).	73
2.8	Bifurcación de desdoblamiento de periodo. Diagrama de bifurcación. En la gráfica, $\mu_0 = 0$	76
2.9	Bifurcaciones sucesivas de desdoblamiento de periodo. Ruta Feigenbaum hacia al caos. Fuente: Broer et al. (1991).	78
2.10	Bifurcaciones sucesivas de Hopf. Los parámetros ω_i , $i \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, representan las frecuencias de las oscilaciones. Fuente: Schuster (1989).	80

2.11	Atractor toroidal formado por los ciclos límites de los sistemas correspondientes a las variables φ_1 y φ_2 . Fuente: Broer et al. (1991).	83
2.12	Evolución de un sistema formado por dos osciladores desacoplados: a) Comportamiento cuasiperiódico, $(\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; b) Comportamiento resonante, $(\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q})$. Fuente: Lorenz (1993).	84
2.13	Función de Poincaré de un sistema dinámico sobre el toro. Fuente: Arrowsmith y Place 1990.	86
2.14	Lenguas de Arnol'd para la función 2.28. Fuente: Jensen et al. (1984).	89
3.1	Lenguas de Arnol'd para el modelo de onda larga (Sterman 1985) con un forzamiento exógeno. Fuente: Sterman y Mosekilde (1993).	101
3.2	Función $f(r)$	107
3.3	Función $g(r)$	109
3.4	Lenguas de Arnol'd para el modelo desagregado de onda larga. Fuente: Kampmann et al. (1994).	114
3.5	Caso $\alpha = 0$. Espacio de fases para las variables B_i y K_{ji} . Las flechas indican la dirección y sentido que han de seguir las trayectorias del sistema en los puntos indicados. Se demuestra que la isoclina de la ecuación correspondiente a B_i se sitúa siempre por encima de la isoclina correspondiente a K_{ji}	124
3.6	Caso $\alpha = 0$. Evolución de las trayectorias del sistema formado por las variables B_i y K_{ji} . El punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_i^c, 0)$ es asintóticamente estable globalmente.	126
3.7	Caso $\alpha = 1$. Espacio de fases para el sistema formado por las variables B_j y K_{jj} . La representación es similar al caso $\alpha = 0$	132

- 3.8 Caso $\alpha = 1$. Evolución de las trayectorias en el espacio de fases de las variables B_j y K_{jj} . El punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) = (S_j^e, 0)$ es asintóticamente estable globalmente. . . . 134
- 3.9 Caso $\alpha = 1$. Espacio de fases del sistema formado por las variables B_i y K_{ji} . La forma gráfica de las isoclinas ha sido contrastada mediante el uso del programa "Mathematica". . . . 135
- 3.10 Caso $\alpha = 1$. Construcción del conjunto Γ . El cierre de este conjunto es positivamente invariante. 136
- 3.11 Caso $\alpha = 1$. Construcción del conjunto Ω_{γ_1} . Necesariamente debe existir una órbita cerrada γ_2 , inestable, en el interior de Ω_{γ_1} 138
- 3.12 Caso $\alpha = 1$. Evolución de las trayectorias sobre el espacio de fases del sistema formado por las variables B_i y K_{ji} . El punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es asintóticamente estable globalmente. . 140
- 4.1 Expectativas adaptativas. Los valores de los parámetros son: $\kappa = 3$, $\delta = 1.5$, $\tau^K = \tau^S = 1.5$, $\tau = 20$, $\tau_1 = 25$, $\tau_2 = 15$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$, $\xi = 0.1$, $s = 0.03$, $\beta = 1$, $z = 0.01$. El sector 1 corresponde al sector de mayor tiempo de vida medio del capital que produce y el sector 2 el de menor tiempo de vida medio del capital que produce. La abreviatura "capacidad_prod_estac(i)", $i \in \{1, 2\}$, indica *capacidad productiva estacionarizada del sector i*. 190
- 4.2 Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\xi = 0.3$. 194
- 4.3 Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\varepsilon = 0.05$. 195
- 4.4 Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\beta = 3$. . 196
- 4.5 Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\beta = 0.4$. 197

- 4.6 Expectativas adaptativas. Lenguas de Arnol'd para el modelo desagregado monetario de acoplamiento entre ciclos económicos. Obsérvese como la región de sincronización rellena todo el espacio paramétrico conocido. 198
- 4.7 Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación: arriba, $\alpha = 0.2$, $\Delta\tau = 25$; abajo, $\alpha = 0.8$, $\Delta\tau = 25$ 200
- 4.8 Expectativas racionales. Los valores de los parámetros son: $\kappa = 3$, $\delta = 1.5$, $\tau^K = \tau^S = 1.5$, $\tau = 20$, $\tau_1 = 25$, $\tau_2 = 15$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$, $\xi = 0.1$, $s = 0.03$, $z = 0.01$ 202
- 4.9 Expectativas adaptativas. Simulación para el caso similar a la figura 4.1 con $(M/p)_i = 0$, $\xi = 0$, $\forall i \in \{1, 2\}$ 206
- 4.10 Expectativas adaptativas. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ para las cuales la existencia de dinero es positiva para la producción y regiones para las que no lo es. 207
- 4.11 Expectativas racionales. Simulación para el caso similar a la figura 4.8 con $(M/p)_i = 0$, $\xi = 0$, $\forall i \in \{1, 2\}$ 209
- 4.12 Expectativas Racionales. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ para las cuales la existencia de dinero es positiva para la producción y regiones para las que no lo es. 210
- 4.13 Expectativas adaptativas. Regiones del espacio paramétrico donde se producen los mismos efectos ante un cambio en z . $N \equiv$ neutralidad del dinero. Cambios en el crecimiento monetario sólo se traducen en cambios proporcionales en el nivel de precios. $O \equiv$ existencia de una tasa óptima de crecimiento monetario. $N- \equiv$ Cambios en el crecimiento monetario sólo se traducen en cambios en los precios, pero en la dirección opuesta. 211

- 4.14 Expectativas racionales. Regiones del espacio paramétrico donde se producen los mismos efectos ante un cambio en z . En cualquier situación de los valores de $(\Delta\tau, \alpha)$, se producen cambios proporcionales en los precios. 214
- 4.15 Tasa de crecimiento monetario en función del nivel de expectativas de inflación conjunta. 217
- 4.16 Expectativas adaptativas. Efecto de la política antiinflacionaria sobre una economía con unos indicadores como en la figura 4.1. La abreviatura "expect_conj" indica *expectativas de inflación conjunta*. 219
- 4.17 Expectativas adaptativas. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ donde se producen las mismas respuestas hacia la política antiinflacionaria. $E \equiv$ La inflación se estabiliza en el objetivo deseado. $NE \equiv$ La inflación no se estabiliza en el objetivo deseado. 220
- 4.18 Expectativas racionales. Efecto de la política antiinflacionaria sobre una economía con unos indicadores como en la figura 4.8. 222
- 4.19 Expectativas racionales. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ donde se producen las mismas respuestas hacia la política antiinflacionaria. 223

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1 Algunas consideraciones sobre el determinismo en la ciencia económica

Desde sus primeros estudios modernos, que podemos fijar con la aparición de los trabajos de Smith y Ricardo durante la segunda mitad del siglo XVIII, la Economía ha buscado fundamentarse como ciencia del mismo modo que las otras ciencias llamadas naturales. Por tanto, siguiendo a Lorenz (1993), podemos decir que los métodos utilizados en la Economía a lo largo de la historia han sido una importación de aquellos que tanto éxito alcanzaron en la comprensión y análisis de fenómenos de tipo físico, químico o biológico. Por otro lado, la incorporación de estos métodos no ha estado ausente de dificultades debido a la naturaleza misma de la Economía.

La Ilustración se caracterizó por el triunfo de la razón. El pensamiento de la época estaba dominado por una confianza plena en el descubrimiento del Cosmos por medio de la inferencia y deducción, que son el germen del desarrollo científico. A raíz de esta visión del mundo, ciencias como la Física o la Biología desarrollaron un importantísimo avance durante el siglo XIX. El objeto de estas ciencias es la experimentación y, a partir de ella, el descubrimiento

de resultados invariantes dadas unas mismas circunstancias generales. Estas relaciones fijas entre unas determinadas causas y unos determinados efectos se estructuran de una forma lógica haciendo uso de la matemática. Así se fundamentó la Electricidad a partir de unos experimentos desde la época de Faraday, y formalizados posteriormente por medio de unas ecuaciones dinámicas por Maxwell. En general, la ciencia alcanzó un gran impulso que supuso la aparición de nuevas ramas. Entre otros ejemplos, podemos citar el nacimiento y desarrollo durante el siglo pasado de la Genética, iniciada por Mendel, la Teoría de la Evolución de las Especies, cuyo máximo representante es Darwin, junto a amplios avances en Epidemiología, con Pasteur.

El descubrimiento de patrones de comportamiento o leyes permitió elaborar predicciones en el comportamiento de ciertas variables. La capacidad de predicción derivó a su vez en la aparición de múltiples invenciones, que surgían en mayor grado a medida que se avanzaba en el descubrimiento de estas leyes. Como ejemplos, además del descubrimiento de vacunas en el terreno de la Medicina, podemos citar numerosas innovaciones en el terreno de la Física, como la pila o la bombilla, o en el terreno de la Información, como la radio. La humanidad avanzaba con gran velocidad en el conocimiento y manipulación del medio que la rodeaba.

Siguiendo las teorías de Laplace (ver Lorenz 1993), la visión del mundo que predominaba en el siglo pasado era puramente determinista, esto es, dominaba la creencia de que cualquier sistema se puede predecir como consecuencia lógica y directa de la situación de unas determinadas variables que influyen en ese sistema. Siempre que estas variables se encuentren en unas determinadas circunstancias, la respuesta del sistema va a ser la misma. Por tanto, el único problema era determinar la situación de todas las variables que intervienen. Lo que ocurre a veces es que el número de variables que influyen en un sistema se desconoce, con lo que no podríamos predecir con exactitud.

1.1 Algunas consideraciones sobre el determinismo en la ciencia económica 3

La Economía heredó esta visión del Cosmos. Por tanto, los primeros economistas modernos la intentaron fundamentar de la misma forma que la Física y la Biología. El objeto de la Economía era, entonces, descubrir estos patrones de comportamiento invariantes y, una vez descubiertos, usarlos para predecir situaciones futuras, o para manipularlos en beneficio de unos objetivos.

Uno de los grandes problemas que se encontró la Economía en la utilización de los métodos científicos fue la imposibilidad de experimentación, que limitaba y sigue limitando en gran medida su desarrollo. Mientras que en otros campos, como en Física, es posible repetir un mismo fenómeno en unas determinadas circunstancias, con lo que resulta más fácil extraer los comportamientos invariantes del fenómeno, en Economía la experimentación es imposible o se enfrenta con problemas de tipo ético.

Es esta una de las razones por las que, aunque extendido el enfoque determinista de la realidad a lo largo de la historia del desarrollo económico, muchas de las sucesivas leyes o reglas básicas, fundamentadas en relaciones matemáticas, que los economistas iban proponiendo han sido puestas en cuestión constantemente y más que en ninguna otra ciencia. Otra razón de esta variabilidad en las leyes económicas estriba en la constante evolución de los entornos económicos en los que los economistas las desarrollan. Es evidente que el marco económico y político de la sociedad hace doscientos años no es el mismo que el actual, con lo que las cuestiones y problemas planteados por los primeros economistas difieren de las actuales. Por ejemplo, la agricultura en la situación económica del siglo XVIII era mucho más relevante que a finales del siglo XX, debido a que este sector representaba un porcentaje de la riqueza total más elevado que hoy en día (Zhang 1990). Por otro lado, es evidente que el cambio del patrón oro, después de la Gran Depresión, al patrón dólar, más flexible, revolucionó el entorno económico en el que se fundamentaban

las leyes hasta el momento aceptadas. De hecho, muchos de los problemas anteriores fueron eliminados, como la deflación, apareciendo otros nuevos o poco relevantes anteriormente, como la inflación.

A pesar de estas dificultades, los economistas han logrado localizar ciertos principios básicos del funcionamiento de la Economía que la generalidad de las diferentes escuelas admiten como verdaderos. Como un ejemplo, podemos citar el caso del multiplicador keynesiano o el acelerador de inversión, o el efecto inflacionario de un incremento elevado en la oferta monetaria. Prácticamente, no existe ningún libro de texto de Macroeconomía que no considere válido estos principios. Sin embargo, al incluirlos en un contexto económico y social más amplio, existen muchas diferencias sobre el efecto real de estos factores sobre variables como la producción, consumo o inversión.

El cambio de siglo presenció una revolución en la visión de la realidad que las ciencias experimentales habían tenido hasta ese momento. La aparición de la Mecánica Cuántica en el campo de la Física, así como el trabajo de Poincaré (ver Barrow-Green 1997) acerca del problema de los tres cuerpos en el campo de la Matemática, echó por tierra el enfoque puramente determinista que la ciencia tenía acerca del mundo. Poincaré proponía en su trabajo un sistema físico que se comportaba con una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales. Es decir, ligeros cambios en la situación inicial de las variables que gobiernan el sistema originan comportamientos totalmente diferentes. La Mecánica Cuántica, por su parte, revolucionó la Física Clásica desarrollada por Newton y aceptada como válida hasta entonces. Los principios en los que se basa esta nueva Mecánica, como el *principio de incertidumbre* de Heisenberg, postulan que es fundamental un punto de vista probabilístico y el determinismo debe ser descartado. El enfoque puramente determinista del siglo pasado se había definitivamente derrumbado. Aleatoriedad y comportamiento complejo empezaron a dominar la explicación física de la Naturaleza. El mundo había

dejado de ser perfectamente predecible.

La Economía también ha incorporado este nuevo enfoque no puramente determinista desde los estudios realizados por Frisch y Schumpeter en los años treinta. Sin embargo, existen múltiples formas de incorporar este no determinismo. En rasgos generales, podemos decir que el debate es similar al resto de las ciencias, aleatoriedad o comportamiento complejo y sensible a las condiciones iniciales. Por otro lado, al igual que en el momento de dominio del enfoque puramente determinista, la imposibilidad de experimentación y los entornos cambiantes han supuesto un impedimento para contrastar con la realidad estas distintas posiciones.

Es así que, a lo largo de la historia se han desarrollado una multitud de corrientes de pensamiento, algunas de ellas en franco enfrentamiento, que tratan de explicar el hecho económico. Podemos hacer una división grosera de estas teorías y explicar muy sucintamente sus principios básicos. Por un lado, existen algunas escuelas, entre las que podemos nombrar a los Monetaristas o a la Nueva Macroeconomía Clásica, que defienden un comportamiento estable y, por tanto, predecible de la economía a no ser que estuviera influenciada por factores externos a ella. Podríamos decir que los economistas pertenecientes a esta escuela se encuentran en una posición defensora de la aleatoriedad de ciertas variables económicas como la causa principal que hace a la economía estar fuera del equilibrio. En otra línea se encuentran otros economistas neo-keynesianos, defensores de un comportamiento más complejo e inestable en la economía sin necesidad de aleatoriedad. Desarrollaremos someramente estas teorías en las secciones posteriores.

1.2 Linealidad y no linealidad en la Economía

Como ya hemos mencionado anteriormente, la Economía, al igual que el resto de las ciencias, ha perseguido y persigue descubrir ciertas relaciones invariantes entre las variables, como pueden ser las existentes entre la renta, empleo, inflación y tipo de interés en una economía cerrada. Estas relaciones invariantes se intentan formalizar mediante el uso de las matemáticas, como elemento principal en la búsqueda de una fundamentación lógica. Mediante las matemáticas podemos construir ciertos sistemas o modelos que son abstracciones y simplificaciones de la realidad, incorporando ciertos elementos que representan variables reales junto con sus relaciones básicas. Existen diversas formas de construir un sistema matemático. La elección de estas formas en Economía ha seguido una evolución en su complejidad. A continuación, vamos a detallar los tipos de sistemas más utilizados.

1.2.1 Sistemas estáticos en Economía

Como ha sido expresado en Chiarella (1990), las primeras formalizaciones matemáticas en Economía se realizaron de una forma estática. Esto implica la suposición de una situación de equilibrio, donde las variables fundamentales que gobiernan la economía mantienen unas relaciones fijas e invariables. En esta situación, los valores de los indicadores no han de ser necesariamente constantes a lo largo del tiempo, sino también pueden manifestar un crecimiento homogéneo. Por ejemplo, una situación de equilibrio puede ser aquella donde la renta y empleo de la economía crezcan a una determinada tasa, y otros indicadores, como la inflación y el tipo de interés, permanezcan constantes.

La explicación estática del desarrollo económico se ha extendido incluso hasta nuestros días, en parte debido a la sencillez en la exposición. De

hecho, la docencia actual en Economía, en sus formas más iniciales, gira en torno a un análisis de este tipo. Uno de los métodos de estudio en Economía más extendidos es la estática comparativa. Sistematizada por Samuelson, este método representa la situación de equilibrio como solución de unas ecuaciones algebraicas que representan las relaciones entre las diferentes variables económicas consideradas. Estos modelos incluyen ciertos parámetros que miden de una forma cuantitativa la relación entre las variables. El objeto de la estática comparativa es comparar cómo evoluciona el equilibrio frente a variaciones en los valores de esos parámetros. El equilibrio es siempre estable, lo que varía es el valor de las variables en el que se alcanza el equilibrio. Los modelos ya clásicos IS/LM-AD/AS utilizan esta metodología para analizar el comportamiento de ciertas variables macroeconómicas, como la renta, precio, tipos de interés, etc. Los textos utilizados en los primeros estudios de Macroeconomía se fundamentan en esta vía de explicación.

Sin embargo, la economía es fundamentalmente una realidad en desequilibrio. Es comúnmente aceptado que los indicadores económicos evolucionan a lo largo del tiempo manifestando una fluctuación alrededor de la tendencia general en lo que se ha denominado *ciclo económico*. Epocas de expansiones y contracciones en diversos indicadores se han manifestado casi incesantemente a lo largo de la historia. Estos ciclos, diversos en su amplitud y periodo, manifiestan ciertos comportamientos comunes que han sido desentrañados y estudiados (Zarnowitz 1985 presenta una revisión de estos comportamientos comunes).

De esta manera, el análisis estático no explica satisfactoriamente el desarrollo temporal de las variables. Parece entonces lógico pensar que los primeros economistas tuvieran la necesidad de explicar la economía como un proceso dinámico, o sea, variable en el tiempo y en una situación de constante desequilibrio. No obstante, el análisis dinámico de la economía

no se inició hasta hace relativamente pocas décadas. Esto es debido, según Lorenz (1993), a la visión estable y determinista, heredada de la Física, que estaba extendida en los economistas del siglo pasado y que aún pervive en nuestros días. Como consecuencia, dominaba la creencia de que la economía se encontraba o convergía hacia un equilibrio, el llamado equilibrio general Walrasiano, y que las posibles fluctuaciones de los indicadores eran estados transitorios que serían eliminados en un plazo más o menos largo.

Es así que la mayoría de los economistas pre-keynesianos no prestaron mucha atención al ciclo económico, para los cuales la explicación del mismo se basaba en ciertos desajustes endógenos de las variables económicas. Estas explicaciones se hacían desde el terreno puramente literario y hacían hincapié en factores monetarios o reales como generadores de estas fluctuaciones. A pesar de la aceptación de la existencia del ciclo, estaba generalizada la idea de que la economía tenía una tendencia hacia el equilibrio (ver Zarnowitz 1985 para una revisión de estas teorías).

No obstante, a pesar de esta creencia, el comportamiento de la economía a lo largo de casi un siglo de análisis no había sido en absoluto estable, y no aparecía una convergencia clara a esas situaciones de equilibrio. A raíz de la Gran Depresión, los comportamientos cíclicos en la economía cobraron un renovado interés. La Teoría General de Keynes incorporó nuevos elementos causantes de un comportamiento desequilibrante poco considerados hasta el momento, como son las expectativas en la inversión. No obstante, como está comentado en Zarnowitz (1985), las explicaciones de Keynes son fundamentalmente de tipo estático. Así, junto con estas nuevas teorías, surgió una necesidad de modelizar el desarrollo temporal de la economía, con lo que dar respuestas a estas situaciones fluctuantes. Los primeros sistemas dinámicos destinados a este fin eran lineales.

1.2.2 Sistemas lineales en Economía

A raíz de la Gran Depresión, por tanto, empezaron a aparecer una multitud de modelos dinámicos, lineales, que trataban de explicar el ciclo económico. Uno de los primeros fue el desarrollado por Frisch en 1933. A este trabajo le siguieron otros como los de Kalecki en 1935 y Samuelson en 1939 (ver Chiang 1987).

Algunos de estos modelos, como el de Samuelson, incorporaban elementos de las nuevas teorías macroeconómicas, como el multiplicador de consumo y el acelerador de inversión. Kalecki en 1935 (Vázquez 1993 para una revisión) incorpora también estos elementos añadiendo un factor de retardo. Los resultados muestran oscilaciones amortiguadas o explosivas de la renta e inversión, dependiendo de la región del espacio paramétrico donde nos encontremos. Otros modelos, como el de Hicks en 1950 (Vázquez 1993), añade el componente del desarrollo de la tecnología a la función de inversión, cuyos resultados son similares cualitativamente a los de Samuelson. A diferencia con el resto, el modelo de Frisch explica el ciclo como una sucesión de oscilaciones amortiguadas, que convergería hacia un punto de equilibrio si no existiera una serie de impulsos o "shocks" aleatorios que hace que las oscilaciones se mantengan.

Según Lorenz (1993), la utilización de estos modelos lineales era una herencia de la visión determinista que dominaba la ciencia durante el siglo XIX. Un fenómeno está bien representado por un modelo lineal si lo podemos dividir en otros fenómenos aislados sin perturbar el comportamiento global. Dicho de otra manera, el enfoque lineal de una realidad implica considerar que el comportamiento del todo es la adición del comportamiento de cada una de las partes. Este es el llamado *principio de superposición*. Este paradigma, fundamento de toda una metodología de investigación extensamente desarrollada hasta nuestros días, se erigió como un principio

básico no sólo en la Física, sino en todas las demás ciencias experimentales. Gran parte de los modelos físicos eran, por tanto, lineales, y se consideraba que la realidad estaba muy próxima a estos modelos.

A este principio se le unía la facilidad con que matemáticamente son tratados los modelos dinámicos lineales. La mayoría de los ejemplos citados anteriormente, salvo el de Frisch que incorpora aleatoriedad, admiten casi exclusivamente un punto de equilibrio, o sea, un valor de las variables invariante con el tiempo. Al ser el modelo lineal, analizar su comportamiento global se reduce a analizar el comportamiento para regiones cercanas a ese punto de equilibrio. Podemos encontrarnos, en la práctica, con dos posibles situaciones: convergencia hacia el equilibrio o divergencia. Así, el problema de resolución de los modelos lineales estaba completamente resuelto, de una forma sencilla, en el terreno de las Matemáticas.

Por otro lado, la convergencia al equilibrio de los modelos lineales es estable frente a cambios en las condiciones iniciales del modelo. Esta característica dinámica estaba acorde con el enfoque puramente determinista que dominaba la ciencia a partir de la Ilustración. La situación de los sistemas permitía una predicción muy cercana a la exacta del comportamiento de los mismos y, por tanto, un dominio de la Naturaleza.

Todos estos antecedentes condujeron a la aceptación de los modelos lineales como una buena aproximación de la realidad económica. El estudio del modelo se basa, entonces, en analizar las condiciones que han de cumplir los parámetros para que sea estable (convergencia al equilibrio) o inestable (divergencia), como lo hicieron en los primeros modelos lineales de Samuelson, Kalecki o Hicks.

1.2.3 Sistemas no lineales en Economía

Los avances hechos en el estudio de sistemas dinámicos en Matemáticas, realizados a finales del siglo pasado e inicios del actual, por Poincaré y Lyapunov, por citar algunos ejemplos representativos, dieron lugar a la aparición de modelos que trataban de explicar fenómenos reales regulares en los cuales las relaciones entre las variables del sistema no admiten linealidad. Los nuevos y más sencillos comportamientos que obtenemos en estos sistemas son los que manifiestan oscilaciones estables y atrayentes, llamado matemáticamente como comportamiento de *ciclo límite*. Para que se produzca un ciclo límite en un sistema, las distintas variaciones de una variable no pueden influir siempre en el mismo sentido y proporción al comportamiento del sistema, como era el caso de los sistemas lineales. Es necesaria la incorporación de relaciones no lineales entre las variables para poder obtener este tipo de soluciones. Un ejemplo clásico de aplicación es la ecuación de Van der Pol en el terreno de la Electricidad.

A partir del trabajo de Lorenz en 1963 (ver Guckenheimer y Holmes 1983) acerca de un modelo de turbulencias de fluidos, se desarrolló enormemente el estudio de otro tipo de modelos no lineales. Estos poseen un comportamiento muy poco predecible debido a su alta dependencia de las condiciones iniciales, pero guardando un cierto orden. La apariencia de las trayectorias temporales de las variables sugiere un comportamiento aleatorio, pero se trata de un comportamiento excesivamente complejo. Surge entonces la teoría del caos, que ya fue vislumbrada por Poincaré (Barrow-Green 1997) en su trabajo acerca del problema de los tres cuerpos, pero que no fue retomada hasta 70 años después. La posibilidad de utilizar ordenadores con los que simular este tipo de sistemas ayudó en gran medida el estudio de los mismos. De esta manera, surgieron diversos resultados generales acerca del comportamiento de sistemas caóticos, tanto en tiempo discreto, como los de Sakovskii en 1968, Li and Yorke en 1975 (Tu 1992, Lorenz 1993 para una revisión), Feigenbaum (1978), como

en continuos, con los trabajos de Ruelle en 1979, Newhouse, Ruelle y Takens en 1978 (ver Lorenz 1993). La búsqueda de este tipo de comportamientos en fenómenos pertenecientes a muy diversos campos de la ciencia ha generado una multitud de trabajos en los últimos años. Por citar algunos recientes, podemos nombrar a Togeby et al. (1988) y Mosekilde et al. (1993b), como ejemplos de aplicaciones físicas. Sturis et al. (1995) propone un modelo de asimilación de insulina y glucosa generando estructuras relacionadas con el caos. Se puede consultar Jackson (1991) como fuente de otras referencias.

Según Forrester (1987), los fenómenos económicos son eminentemente no lineales. Por un lado, los sistemas económicos se caracterizan por la abundancia de realimentaciones positivas, esto es, comportamientos explosivos frente a ligeros cambios en las variables. Los ejemplos más típicos de estos bucles son el acelerador de inversión y el multiplicador keynesiano. Estos efectos crecientes están restringidos por ciertas limitaciones, como la capacidad de producción o la no negatividad en tipos de interés o inventario de bienes. Este tipo de procesos es difícilmente comprendido mediante la suposición de relaciones lineales entre las variables.

Existe otro argumento que ilustra el carácter no lineal de muchas relaciones económicas. Como fue expresado por Mosekilde et al (1992), la persistencia del ciclo económico a corto plazo, que es el más observado debido a su durabilidad, es otra evidencia de no linealidad. Este ciclo se ha manifestado en la economía de una forma más o menos persistente durante doscientos años en los cuales han aparecido múltiples transformaciones de tipo social, político y económico. Esta estructura cíclica es imposible reproducirla mediante un modelo lineal puro.

Sin embargo, los enfoques no lineales no se han extendido en Economía de una forma global. Una de las razones de este retraso puede ser el

escaso conocimiento que las Matemáticas han tenido de los sistemas no lineales complejos hasta las últimas décadas. La tratabilidad matemática de los modelos lineales es mucho más sencilla y los resultados más fácilmente interpretables. No obstante, en una época bastante temprana en el desarrollo de la dinámica económica se presentaron valiosos trabajos en dinámica no lineal. Algunos de los más destacados son los realizados por Kaldor en 1940, Hicks en 1950, Goodwin (1951) (Vázquez 1993 para una revisión de estos modelos). La dinámica de la mayoría de estos modelos se basa en versiones del principio de aceleración de la inversión.

La introducción de las relaciones no lineales permitía que los modelos anteriores generasen un comportamiento fluctuante, pero sostenido, de la economía. También surgieron otros muchos modelos no lineales que no trataban de describir el ciclo económico, estudiando la economía a largo plazo. Tal es el caso de los modelos neoclásicos de crecimiento. Estos modelos incorporan el capital K y el trabajo L como los únicos factores productivos que influyen en la creación de la renta Y en cada periodo. La relación entre la renta y los factores productivos se fija por medio de una función no lineal, $Y = f(K, L)$, llamada función de producción.

Como una primera aproximación a los modelos de crecimiento neoclásicos, Harrod desarrolló en 1936 un modelo no lineal que, utilizando una función de producción especial, combinada con los principios del acelerador y multiplicador, producía un comportamiento creciente con tasa constante en la economía, siempre que se verifique una previsión perfecta en la inversión (Andréu y Calvo 1987). Posteriormente al modelo de Harrod surgieron otros modelos de crecimiento cuya característica común era suponer una función de producción diferenciable. A esta función de producción se le asigna una serie de propiedades, entre las que destaca la homogeneidad de grado uno. A este tipo de función se le llama *función de producción neoclásica*. El representante más

destacado de estos modelos es el de Solow en 1956 (ver Andréu y Calvo 1987). El comportamiento de las variables, al igual que en el modelo de Harrod, es de convergencia hacia un crecimiento a una tasa constante de la renta y la tasa de capital-trabajo. Una de las críticas que se han hecho a los modelos neoclásicos era la no incorporación de nuevas tecnologías en la función de producción, hecho demandado al considerarse la evolución de la economía a largo plazo. Con posterioridad al modelo inicial de Solow se hicieron sucesivas ampliaciones introduciendo este factor y algunos otros, como la desagregación del ahorro o la incorporación de más sectores. (Zhang 1990 para una revisión del modelo de Solow y sus ampliaciones).

Como ha sido comentado por Zarnowitz (1985), los primeros modelos no lineales presentaban ciertas carencias, utilizadas por los críticos para considerarlas como una explicación incompleta de la realidad económica. Estas carencias se basaban principalmente en la ausencia de los factores monetarios como influyentes en el comportamiento dinámico de la economía. No obstante, existen notables excepciones, como es el caso de una variación del modelo de Hicks en 1950 o Tobin (1965), el cual, a partir de un modelo neoclásico de crecimiento, incorpora el factor dinero como otro activo más en la economía. Analizaremos con más detalle el modelo de Tobin en el capítulo IV, cuando introduzcamos un modelo monetario.

Varios trabajos actuales, basados en pequeñas extensiones de los primeros modelos no lineales incorporando factores monetarios u otros, han ampliado los resultados de sus autores originales haciendo uso de un conocimiento más completo del comportamiento de estos sistemas. De esta manera, han surgido trabajos sobre los modelos de Kaldor, Hicks y Goodwin (Chiarella 1990, Vázquez 1993) o Tobin (Hadjimichalakis 1971a, Hadjimichalakis 1971b, Benhabib y Miyao 1981, Zhang 1990), por citar algunos. Algunas de las extensiones y otros nuevos modelos no lineales incorporan ciertas teorías

1.3 Factores exógenos y endógenos en la explicación del ciclo económico 15

matemáticas sobre el comportamiento general de los sistemas, como el estudio de Torre (1977). Existen otros incluyendo comportamientos caóticos, como Day (1982), Lorenz (1987), Sterman y Mosekilde (1993), Kampmann et al. (1994) (Lorenz 1993 para un revisión de algunos de estos modelos y fuente de referencias).

A pesar de la aparición de los modelos no lineales desde los primeros momentos de la dinámica económica, que se puede considerar que en los años 50 tuvieron un amplio desarrollo, los modelos lineales o casi lineales (aquellos que incorporan variables aleatorias) se utilizaron posteriormente, y se utilizan también actualmente, como explicaciones del comportamiento económico. Por citar algunos ejemplos primeros, podemos considerar Lucas (1973), Laidler (1973), Sargent and Wallace (1975). Los motivos anteriores no son suficientes para explicar en su totalidad las reticencias que los sistemas no lineales encuentran en los estudios económicos. Así, como veremos más detalladamente en la próxima sección, otra de las causas esenciales del arraigo del enfoque lineal en Economía es la creencia, como en el enfoque clásico, de una economía en equilibrio o convergente a él. En la siguiente sección analizaremos un poco más detalladamente los fundamentos de esta filosofía.

1.3 Factores exógenos y endógenos en la explicación del ciclo económico

El ciclo económico es una evidencia comúnmente aceptada por la gran mayoría de los economistas, tanto por los que defienden un comportamiento hacia el equilibrio como los que defienden un comportamiento en desequilibrio permanente de la economía. Así, los primeros proponen como explicación del ciclo la existencia en la economía de perturbaciones aleatorias que imposibilitan la convergencia hacia el equilibrio de las variables. Frente a este planteamiento,

existen otras teorías que defienden que el ciclo se forma debido a causas internas presentes en las economías industrializadas. Es necesario, en este caso, la introducción de factores no lineales que generen oscilaciones sostenidas en las variables sin la ayuda de agentes externos.

La discusión, por tanto, entre los que defienden un comportamiento lineal y los que defienden uno no lineal en Economía se relaciona con una visión diferente sobre las causas que generan el ciclo económico. Por un lado, aparece aquel enfoque que defiende los factores endógenos como los más importantes en la generación del ciclo. Por otro lado, se encuentra otro enfoque que defiende a los factores exógenos como los más influyentes en la generación del ciclo. Como factores exógenos podemos citar las diferentes acciones de política económica u otro tipo de causas, como las guerras, cambios tecnológicos, etc. Estos son los que previamente hemos llamado impulsos o "shocks" aleatorios. El primer modelo que utiliza esta metodología fue el de Frisch en 1933. Como fue expresado por Chiarella (1990), los modelos basados en teorías endógenas están expresados mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias, mientras que los basados en teorías exógenas se expresan mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias lineales estocásticas.

Es evidente que la realidad económica está influenciada por factores exógenos y endógenos. La diferencia entre estas teorías estriba en asignar el papel más determinante en la generación del ciclo a un factor o a otro. Esta discusión fue acertadamente expuesta por Zarnowitz (1985):

En realidad, la economía está siempre influenciada por factores externos (por ejemplo, los factores meteorológicos) de manera que una explicación de su comportamiento no puede ser puramente endógena. Pero las influencias externas no pueden producir por sí mismas las series recurrentes de expansiones y contracciones; en primer lugar, este hecho requiere presumiblemente la dinámica particular de un sistema económico interdependiente. Una teoría

satisfactoria, por tanto, debería explicar cómo se generan los ciclos comerciales debido al mecanismo interno de una economía expuesta al impacto de sucesos externos relevantes con gran potencial. Lo que importa entonces es el papel relativo de los factores externos e internos, no los casos extremos. No obstante, un modelo de ciclo comercial *principalmente* endógeno difiere por principio profundamente de uno *principalmente* exógeno.

1.3.1 Evolución histórica de los enfoques exógenos y endógenos. El papel de las expectativas

Históricamente, la visión de las fluctuaciones económicas ha sido cambiante. Las perturbaciones del equilibrio eran vistas como procesos endógenos transitorios por los economistas clásicos. Como explicación de estas perturbaciones surgieron varias teorías al respecto. No obstante, era comúnmente aceptado que la economía convergía hacia un equilibrio y que estas perturbaciones, aunque producidas endógenamente, eran transitorias (Zarnowitz 1985 para una revisión de estas teorías). Los trabajos de Schumpeter de los años treinta enfocaban, en cambio, la economía como un proceso continuamente en desequilibrio debido a la incorporación de nuevas tecnologías, generadoras de inestabilidad. Tras la Gran Depresión, surgieron una multitud de modelos que fundamentaban los procesos endógenos como causantes de las oscilaciones económicas. Como ya comentamos en la sección anterior, en general estos modelos han fundamentado las causas del ciclo económico en las interacciones entre el multiplicador y el acelerador, como en Harrod en 1936, Kaldor en 1940, Hicks en 1950 y Goodwin (1951). A estos elementos se le unen otro tipo de factores, como retardos temporales o las no linealidades existentes en las relaciones entre las variables económicas.

La fase de ascenso continuado que tuvo la economía en el mundo desarrollado a partir de la II Guerra Mundial, con unas contracciones

cortas y suaves que más suponían disminuciones en la tasa de crecimiento que recesiones, incrementó la confianza en la tendencia al equilibrio. La intervención pública también se incrementó en esta etapa, lo que llevó a la creencia de que los ciclos eran inducidos por los agentes externos a la economía privada. En estos enfoques exógenos, el desequilibrio generado por la interacción entre el multiplicador y el acelerador, fundamento de los modelos endógenos, era desdeñado.

Una de las primeras teorías incorporando estos planteamientos fue el *Monetarismo*. Esta teoría defendía que el crecimiento estable que adquiere la economía de forma natural se ve perturbado por cambios en la oferta monetaria. Se considera que el comportamiento de la oferta monetaria es autónomo y, por tanto, exógeno al mercado. El efecto de una introducción suplementaria de dinero hace que la tendencia de crecimiento se desestabilice. Pero ello no supone un incremento en la senda de crecimiento real a largo plazo. La economía simplemente fluctúa alrededor de esta senda para luego estabilizarse si no se producen otras alteraciones de tipo monetario. Laidler (1973) desarrolló un modelo monetario simple, utilizando relaciones lineales entre las variables, aunque no obtuvo un ajuste empírico adecuado.

A partir de los años 70 se desarrolló un programa, iniciado por los trabajos de Lucas (1973), que intentaba elaborar una teoría del ciclo comercial en perfecta sintonía con los principios del equilibrio económico (Zarnowitz 1985 para un comentario). Esta nueva teoría estaba fundamentada, entre otros puntos, en la hipótesis de *expectativas racionales*. Según esta hipótesis, los agentes económicos toman expectativas sobre la situación de los indicadores económicos en el futuro de una forma correcta, sin error alguno en promedio. Esta hipótesis surge como reacción a la forma adaptativa con que los modelos económicos habían considerado las expectativas hasta el momento. Según la hipótesis de *expectativas adaptativas*, los agentes económicos comenten errores

1.3 Factores exógenos y endógenos en la explicación del ciclo económico 19

sistemáticos en sus expectativas que van corrigiendo sin ninguna capacidad de aprendizaje. Esta forma de construir las expectativas fue iniciada por Cagan en 1956. Para un desarrollo exhaustivo de la hipótesis de expectativas racionales, ver Sheffrin (1996).

Bajo la hipótesis de expectativas racionales, la economía se encuentra en equilibrio, y los cambios en las variables monetarias son anticipados por los agentes, a diferencia de la teoría monetarista, que toma las expectativas como adaptativas. La explicación del comportamiento fluctuante en economía se basa, entonces, en cambios no anticipados de esos factores monetarios. Los defensores de las expectativas racionales introducen el mercado de trabajo dentro de su teoría, suponiendo que se encuentra en equilibrio y, por tanto, en pleno empleo, si no ocurrieran cambios no anticipados en las variables exógenas. Ante un cambio no anticipado, se supone que los productores tienen más información que los trabajadores, con lo que ajustan unos nuevos niveles de producción sin que el salario aumente en la misma proporción. Esto origina desestabilización en la economía hasta que la tendencia al equilibrio vuelva a imponerse. Las fluctuaciones se originan entonces, según esta teoría, debido a problemas de retardos de información. La hipótesis de expectativas racionales forma parte de la teoría desarrollada por la llamada *Nueva Macroeconomía Clásica*.

La hipótesis de expectativas racionales ha obtenido una gran popularidad y ha dado lugar a numerosos modelos. Los primeros modelos que utilizan estas hipótesis son lineales con la incorporación de un factor exógeno aleatorio que representa los cambios inesperados en las variables monetarias. Como ejemplos ya clásicos podemos citar a Lucas (1973) y Sargent and Wallace (1975).

En las últimas décadas se ha desarrollado una teoría en favor de ciertos límites en el comportamiento racional de los agentes económicos. Es la llamada

teoría de la *racionalidad acotada*, ampliamente desarrollada en la literatura (Simon 1979 como ejemplo representativo). Esta teoría argumenta, como en el caso de las expectativas racionales, que la decisión tomada por los agentes es racional y, por tanto, la óptima. La diferencia con el comportamiento racional puro es que la decisión óptima en este caso está fundamentada en una información parcial adquirida por los decisores, que, en general, no va a coincidir con la decisión óptima si la información del agente fuera completa. La información parcial está determinada por los límites de la capacidad de los individuos en tomar una decisión correcta dada una información previa, límites que giran en torno a la capacidad de procesar una información muy compleja. Esto trae consigo una división del problema en subproblemas, perdiendo un enfoque global.

Esta teoría ha sido ya contrastada mediante diversos experimentos, entre los que podemos citar a Sterman (1989a). La hipótesis de racionalidad acotada ha servido de fundamento para desarrollar una teoría acerca de las causas de la generación de los tres modos cíclicos más comúnmente aceptados (Sterman y Mosekilde 1993), como veremos en el capítulo III. La hipótesis de racionalidad acotada está acorde con una visión en desequilibrio de la economía. En este sentido, Prigogine (1993) desarrolla una relación entre los principios de racionalidad acotada y la evolución hacia un enfoque en desequilibrio de la Ciencia.

Podemos decir, a modo de resumen, que, en general, muchos de los modelos introducidos por las escuelas centradas en los factores exógenos como los causantes del ciclo económico son lineales con la introducción de impulsos aleatorios. Estos han encontrado respaldo en varios trabajos de tipo econométrico (Lucas 1973). Existen también algunos trabajos econométricos que apoyan la inexistencia de un ciclo persistente (McCulloch 1975). No obstante, algunos experimentos hacen dudar de la adecuación de

1.3 Factores exógenos y endógenos en la explicación del ciclo económico 21

los métodos lineales de predicción (ver Lorenz 1993 para una revisión de estos experimentos).

Los modelos no lineales también obtienen buenas aproximaciones a la realidad. Una de las críticas que se formulaban a los modelos no lineales sin factores exógenos que obtenían como resultado un comportamiento oscilatorio sostenido, esto es, comportamiento de ciclo límite, era su estructura completamente regular, estable y predecible, ajena a la realidad de los ciclos (Chiarella 1990). Mediante el enfoque lineal con perturbaciones aleatorias, el ciclo obtenido era irregular y, por tanto, más parecido a la realidad. Gracias a los avances en Informática y a los estudios hechos en el campo de la Matemática, hoy podemos analizar modelos no lineales que se comportan de una forma completamente irregular, muy parecida a la aleatoria, sin necesidad de ningún impulso aleatorio externo. Entre estos modelos están los caóticos, algunos de los cuales ya los hemos citado en la sección previa (Day 1982, Stermán y Mosekilde 1993, Kampmann et al. 1994, Lorenz 1993 como fuente de referencias). La predicción en las series temporales caóticas se realiza de forma diferente a la econometría tradicional (Fernández 1992).

El análisis a través de la historia de los modelos utilizados en Economía hace concluir que lo que determina el ciclo económico no son exclusivamente los factores exógenos ni los endógenos. De todos modos, las diferentes escuelas no son disjuntas, y sería posible construir modelos que intentaran compaginar ambos enfoques. Como fue ya expresado por Zarnowitz (1985), esta es la meta más deseable en los últimos tiempos.

1.4 Acoplamiento y sincronización entre los ciclos económicos

1.4.1 La interacción entre ciclos económicos

Como hemos podido vislumbrar someramente en las secciones anteriores, el estudio de las fluctuaciones cíclicas en Economía ha sido objeto de interés y controversia a lo largo de la historia, en la que podemos encontrar diversas teorías sobre su origen y desarrollo, algunas claramente enfrentadas. Más allá de estas discusiones, es interesante resaltar que los trabajos acerca de los ciclos económicos no se habían enfocado hacia la explicación de la interacción que se produce entre estos ciclos. Desde finales de los años 80, el interés por desentrañar estos fenómenos de interacción se ha incrementado sustancialmente.

Existen una multitud de evidencias correspondientes al comportamiento de los ciclos económicos en diferentes industrias y naciones que ilustran la obvia interacción que se produce entre estas fluctuaciones (Zarnowitz 1985). Según este autor, desde el punto de vista internacional, y en las últimas décadas, ha emergido una gran sincronía entre los comportamientos fluctuantes de las economías industrializadas. Esta sincronía es mayor a raíz de la modificación en las rigideces de los tipos de cambio de las monedas. Actualmente, variables macroeconómicas, como los tipos de interés o las importaciones, no pueden ser determinadas independientemente por las naciones. La globalización de la economía ha originado una interrelación aún mayor entre las economías, lo que origina modos cíclicos interdependientes.

A nivel interno existen otros muchos ejemplos en la literatura que respaldan las hipótesis señaladas anteriormente. Como una muestra de ellos, podríamos citar los presentados por Mosekilde et al. (1992) o Sterman y

Mosekilde (1993). En estos artículos se analiza la interacción entre series temporales correspondientes a ciclos de diferente periodo dentro de una misma industria o sector en la economía, o incluso a ciclos relacionados con ciertas variables macroeconómicas, como el PIB o el empleo en EE.UU. durante los últimos 50 años. La característica común extraída del análisis de estos ciclos es que la fase en que se encuentre el ciclo de mayor periodo está perfectamente relacionada con la amplitud y, en menor medida, el periodo del ciclo más corto.

El origen de estos fenómenos podría ser debido a factores exógenos que influyen en los ciclos, tal y como ya discutimos en la sección previa. No obstante, el principio de no linealidad en las interacciones entre los ciclos económicos de diferentes periodos, defendido en los años treinta por Schumpeter y Kondratieff (ver Mosekilde et al. 1992), ha sido recuperado por Forrester (1987), que propone un carácter endógeno y persistente en la creación del ciclo económico y en sus interacciones entre sí.

El fenómeno observado en las series temporales mostradas por Mosekilde et al. (1992, 1993a) y Sterman y Mosekilde (1993) es imposible capturarlo mediante un modelo dinámico lineal puro, o incorporando perturbaciones aleatorias al modelo lineal. Es evidente que el principio de superposición, fundamento filosófico de los modelos lineales, no se verifica en estos casos. El comportamiento global, o sea, el comportamiento conjunto de un ciclo a corto y otro a más largo plazo, no es la simple superposición de los comportamientos individuales. Los autores (Mosekilde et al. 1992, Sterman y Mosekilde 1993) desarrollan una teoría que explica las causas endógenas de este modo de interacción entre los ciclos. Se fundamentan en principios de racionalidad acotada por parte de los inversionistas involucrados en cada uno de estos ejemplos.

Como fue ya comentado por Sterman y Mosekilde (1993), la existencia

de no muchos modos cíclicos es otra evidencia a favor del comportamiento no lineal en economía. Se han llegado a identificar pocas formas fluctuantes más o menos persistentes a lo largo de las décadas. De esta manera, se han localizado los ciclos llamados comerciales o a corto plazo, de una duración de aproximadamente 3-7 años. Existen también evidencias sobre la existencia de un ciclo a medio plazo de un periodo alrededor de 15-25 años, y un ciclo de periodo largo, llamado onda larga o ciclo Kondratieff, que sigue generando actualmente controversias sobre su verdadera existencia (Sterman 1986, Rasmussen et al. 1989 para una evidencia de la existencia de la onda larga). La economía comprende una multitud de sectores y empresas, con una naturaleza y un entorno social y político muy variado. Si la dinámica de la economía fuera lineal, podríamos explicar su comportamiento global como la adición de comportamientos individuales de empresas o sectores. Es razonable suponer que estas distintas empresas o sectores, con estructuras y procesos de decisión diferentes y con un entorno muy plural, originen ciclos de amplitud y periodo también diferentes. Al agregar linealmente estos comportamientos, no se observaría ciclo alguno, sino simplemente la superposición de formas cíclicas que darían lugar a un ruido. Una explicación del ciclo económico sería, entonces, que la interacción entre los modos cíclicos de la Economía sea no lineal.

A pesar de estas evidencias, la interacción entre los ciclos económicos, desde el punto de vista no lineal, no ha sido abordada mediante la construcción de modelos hasta hace relativamente pocos años. Esto es debido en parte, como comentamos en la sección 1.2, a la ausencia de estudios de tipo matemático que fundamentaran las observaciones. Sin embargo, a partir del trabajo de Arnol'd (1965) de la función sobre el círculo, se profundizó en el conocimiento de un fenómeno que se verificaba entre diferentes trayectorias (evolución en el tiempo de una variable) de un mismo sistema dinámico, y que puede servir como explicación de la interacción producida entre los ciclos económicos. Este

fenómeno se ha bautizado con el nombre de *acoplamiento* (entrainment) o *cierre de modo* (mode-locking). En pocas palabras, el acoplamiento surge al emparejar dos trayectorias oscilantes, llamadas osciladores, en un mismo sistema dinámico, de manera que la estructura no lineal que relaciona los dos osciladores conduce a que asintóticamente sus fases y frecuencias se acoplan. Este acoplamiento se realiza de tal forma que cada m vueltas que produce un oscilador, el otro produce n vueltas, siendo m, n números enteros positivos. Se dice, entonces, que se ha producido un acoplamiento del tipo $m : n$.

Podríamos considerar que el fenómeno que se produce entre los ciclos económicos es el mismo. La forma no lineal de interactuar diferentes sectores y empresas, con un comportamiento cíclico de una amplitud y periodicidad similar entre sí, puede ser tal que sus ciclos se acoplan de la forma $1 : 1$. Esto quiere decir que, aunque inicialmente el comportamiento cíclico de las empresas o sectores posean un periodo diferente, la forma de interactuar entre ellos hace converger estos periodos diferentes a un único periodo. De esta manera, en el agregado, observaríamos un único modo cíclico, y no una superposición de varios modos cíclicos. Esta podría ser una explicación de por qué en la economía no se han observado más que unas pocas formas cíclicas. A este caso especial de acoplamiento lo podemos llamar *sincronización*. Este fenómeno dinámico podría ser también una explicación de la sincronía observada actualmente entre los comportamientos cíclicos de las economías nacionales.

Podemos utilizar también esta teoría para explicar el comentario hecho por Schumpeter en 1939 sobre la coincidencia en el descenso de los tres modos cíclicos fundamentales como explicación de las causas de la Gran Depresión (Mosekilde et al. 1992). Ciclos con un periodo grande pueden interactuar con ciclos con un periodo menor de tal manera que se produzca un acoplamiento del tipo $1 : n$. Así, cada n oscilaciones producidas por el ciclo de menor

periodo, el ciclo de periodo largo produce una oscilación. El descenso del ciclo de periodo largo va a coincidir, entonces, con el n-ésimo descenso del ciclo de periodo corto.

Este proceso de cierre de modo tiene interesantes ejemplos en la Naturaleza. Quizás uno de los más curiosos es la sincronización que existe entre el comportamiento rotacional de La Luna alrededor de La Tierra y su comportamiento orbital, de manera que siempre nos muestra la misma cara. Existen otros muchos, como el acoplamiento que se produce en las cuerdas del piano que se encuentran inicialmente desentonadas para producir posteriormente un sonido único, o la sincronización que se produce entre dos relojes de péndulo colgados de la misma pared, observación ya realizada por Christian Huygens en el siglo XVII (Jackson 1991). Existen otras múltiples aplicaciones a diversos campos de la Ciencia, como la Biología, Medicina, Física, etc.. (Togebly et al. 1988, Mosekilde et al. 1993b, Sturis et al. 1995). Por otro lado, desde los primeros trabajos de Arnol'd (1965), se han hecho múltiples avances en el estudio del comportamiento de los sistemas que presentan este fenómeno (Jensen et al. 1983/1984, Knudsen et al. 1991, Reick and Mosekilde 1995).

Las aplicaciones mediante la construcción de modelos económicos concretos que incorporen interacción entre modos cíclicos no han sido muy numerosas. En una de las variaciones del modelo de Goodwin (1951), se supone la inversión autónoma una función periódica con el tiempo. De esta manera, conviven en el modelos dos osciladores, uno endógeno, generado por la interacción entre el multiplicador-acelerador y las no linealidades incorporadas en la función de inversión inducida, y otro exógeno, que está determinado por la inversión autónoma. Lorenz en 1987 (ver Lorenz 1989) expone un modelo fundamentado en la dinámica del comportamiento de las curvas IS-LM. La evolución de la renta sigue las mismas pautas que el modelo de Kaldor, y el

tipo de interés varía de acuerdo a la demanda u oferta excedente de dinero. Este modelo no lineal genera un comportamiento oscilatorio en la renta y en los tipos de interés, sin necesidad de ningún impulso aleatorio exógeno. Para ilustrar el efecto del acoplamiento de ciclos, Lorenz (1989) construye otro modelo, el cual supone varias economías donde cada una de ellas se comporta según el modelo anterior. Interrelacionándolas mediante hipótesis basadas en el comercio internacional, el nuevo sistema se trata ya de un modelo que incorpora dos osciladores.

No obstante, en el estudio de los modelos de Goodwin y Lorenz no se extrae un acoplamiento del tipo $m : n$, sino que se demuestra la existencia de posibles comportamientos caóticos. De hecho, como veremos en el próximo capítulo, la frontera entre los acoplamientos y el caos es muy difusa. La primera aparición de un modelo que intentara explicar el proceso de acoplamiento en Economía fue basado en modificaciones de modelos previos, creados en el Grupo de Dinámica de Sistemas del MIT. Este grupo realizaba estudios basándose en la teoría llamada Dinámica de Sistemas, desarrollada por Forrester mediante sus trabajos con la empresa Sprague Electric y la posterior publicación de *Industrial Dynamics* (1961) (Aracil 1992 para un revisión de esta metodología). El modelo creado por este grupo fue llamado Modelo Nacional de Dinámica de Sistemas (System Dynamics National Model) (Sterman 1986), y desarrolla una amplia teoría que explica, mediante procesos no lineales y endógenos, la generación de la onda larga. Esta teoría incorpora una multitud de factores económicos, como inversión, empleo, trabajo, política fiscal y monetaria e inflación, entre otros.

Con posterioridad a este modelo, Sterman (1985) desarrolla una versión más simplificada, incorporando las estructuras mínimas que generan el comportamiento de la onda larga. Sin embargo, este modelo no presenta acoplamiento. Este fue introducido en unas variaciones del modelo de onda

larga realizadas por Sterman y Mosekilde (1993), Kampmann et al. (1994) y Kampmann (1996). Seguidamente, describiremos las hipótesis en las que se basa el modelo de onda larga, que es fundamento de los modelos posteriores.

1.4.2 El modelo de onda larga de Sterman (1985)

El modelo de onda larga considera una economía con dos sectores agregados, el sector productor de capital y el sector productor de bienes de consumo. Por simplicidad, se considera un único factor productivo, el capital. La hipótesis fundamental en el modelo es el proceso de auto-pedido de capital (capital "self-ordering"). Este proceso consiste en el bucle de realimentación positiva que se genera en el sector productor de capital ante un aumento de la demanda de capital. Un aumento en la demanda de capital proveniente del sector productor de bienes de consumo genera un incremento aún mayor de demanda de capital, debido a que el sector productor de capital necesita de capital para incrementar su producción. Este proceso, cercano al acelerador de inversión, se une a una serie de retardos, desde que se produce un incremento en la demanda de capital hasta que se empieza a satisfacer esta demanda. Son retardos asociados a la producción y distribución del capital producido.

Este modelo sostiene que las decisiones de los agentes económicos están sometidas a los límites dados por la teoría de la racionalidad acotada, ya comentada en la sección 1.3. De acuerdo a esta teoría, las decisiones de inversión del sector productor de capital dependen de múltiples factores. Por un lado, al igual que otros modelos de carácter endógeno desarrollados en la literatura (Goodwin 1951), el modelo incorpora el llamado "acelerador flexible", por el cual la inversión se ajusta a la diferencia entre el capital deseado y el capital actual. Por otro lado, los pedidos de capital por parte del propio sector productor de capital persiguen, además, mantener un nivel de atrasos en la distribución de pedidos y cubrir las depreciaciones de capital.

Debido a los retrasos existentes en la toma de conciencia de los decisores para reaccionar a la situación presente, unido a los retardos de producción, así como ciertas no linealidades presentes en la economía y que luego detallaremos, se produce un desequilibrio cíclico.

El proceso dinámico es modelizado mediante un sistema de tres ecuaciones diferenciales en las que las variables son el capital, los atrasos totales del sector productor de capital y los atrasos del sector productor de capital que tiene con el propio sector productor de capital. Existen varias no linealidades localizadas en la estructura de pedidos de capital por parte del sector productor de capital y en la función de producción de dicho sector. Las expresiones concretas de las relaciones entre las variables, y una explicación más detallada de las mismas, se pueden encontrar en el trabajo de Sterman (1985). El modelo, en virtud de las no linealidades descritas anteriormente, genera un comportamiento cíclico sostenido del capital con un periodo aproximadamente de 47 años para una serie de valores de los parámetros bastante ajustados a la realidad.

Sin considerar otros factores, la situación de una economía basada en estas hipótesis es la siguiente: ante un aumento en la demanda de capital por parte del sector productor de bienes de consumo, el sector productor de capital demanda capital para poder producir este capital demandado. Esto genera una espiral creciente de pedidos de capital dentro del sector productor de capital. Debido a los retrasos en la toma de conciencia de los productores en realizar sus pedidos, basados en hipótesis de racionalidad acotada, y retrasos en la producción y distribución de capital, el conjunto de pedidos de capital excede el suficiente para cubrir la demanda inicial. Entonces, una vez cubierta esta demanda inicial por parte del sector productor de bienes de consumo, el sector productor de capital tiene que hacer frente a una sobrecapacidad de producción, que se va a incrementar aún más, debido a las llegadas de pedidos

aún no distribuidos. Esto genera que el sector productor de capital anule completamente sus pedidos y ajuste su capacidad de acuerdo a la producción deseada. Pero eso lleva unos años en producirse, los años en los que el capital se deprecia. El mismo proceso de auto-pedido y los mismos retrasos anteriores generan que la capacidad productiva descienda por debajo de los niveles adecuados, y otro ciclo se genera.

Este proceso encuentra respaldo empírico en los hechos invariantes que los ciclos han presentado a lo largo de la historia (ver Zarnowitz 1985). Se ha observado, como un hecho persistente en las fluctuaciones cíclicas de la economía, que los pedidos de maquinaria, y la formación de nuevas empresas, comienzan a presentar un comportamiento en declive antes de que la fase decreciente del ciclo se manifieste en otras variables, como la producción, empleo o renta real. El modelo anterior incorpora este hecho, ya que las realizaciones de inversión siguen subiendo debido a los retrasos acumulados.

Como hemos comentado previamente, el modelo es una simplificación de uno mucho mayor, llamado Modelo Nacional de Dinámica de Sistemas (System Dynamics National Model), de manera que captura la estructura mínima que genera la onda larga. Se ha mostrado que el comportamiento es robusto a la adición de otro tipo de factores, como son el trabajo, salario, tipos de interés, expectativas, políticas gubernamentales (Sterman 1986). Ha sido también estudiado analíticamente en posteriores trabajos (Rasmussen et al. 1985, Brøns y Sturis 1991), por medio de los cuales se han descubierto bifurcaciones y comportamientos caóticos asociados. Las hipótesis sobre las que el modelo se fundamenta también han sido contrastadas empíricamente en diversos trabajos (Sterman 1989a, 1989b).

Pero el modelo no incorpora el proceso de acoplamiento. Este proceso es introducido posteriormente por medio del trabajo realizado por Sterman

y Mosekilde (1993). El método fue introducir un forzamiento dinámico al sistema anterior. Este forzamiento consiste en la introducción en el modelo de un oscilador con amplitud y periodo independientes de las variables que gobiernan el modelo. Al sistema obtenido se le llama *oscilador forzado* y ha sido originalmente introducido en sistemas físicos. En la sección 2.7 veremos el proceso analítico de construcción de estos osciladores. Así, Mosekilde et al. (1992) y Sterman y Mosekilde (1993) implementaron una modificación del modelo de onda larga de Sterman (1985), incorporando un forzamiento externo en el sector productor de bienes de consumo por medio de la modificación de los pedidos de capital provenientes de este sector, inicialmente constantes, a un comportamiento sinusoidal con una amplitud y periodo dados.

A pesar de los resultados satisfactorios obtenidos con esta modificación del modelo de onda larga, que presentaremos someramente en el capítulo III, este nuevo sistema no se ajusta a la realidad del proceso de acoplamiento. Esto es debido a que la forma de variar los pedidos de capital del sector productor de bienes es exógena, de manera que no considera ninguna ligazón entre la evolución de la demanda del sector productor de bienes con respecto al sector productor de capital.

En la Naturaleza existen también multitud de sistemas en los cuales el forzamiento externo no es una buena vía de modelización del acoplamiento, y otros en que sí lo es. Por citar algunos ejemplos, los modelos que generan acoplamiento mediante el uso de osciladores forzados se ajustan a situaciones como la del ritmo circadiano de los seres vivos, o el funcionamiento de un marcapasos, donde uno de los osciladores es independiente de las variables que gobiernan el sistema. No obstante, existen otras situaciones en las cuales los osciladores acoplados son mutuamente dependientes. Tal es el caso de la sincronización entre la rotación y traslación alrededor de la Tierra que manifiesta La Luna. La sincronización entre los péndulos de relojes colgados de

una misma pared, y entre las cuerdas de piano golpeadas, también son ejemplos de acoplamientos de osciladores mutuamente dependientes. Lógicamente, los ciclos económicos pertenecen a esta categoría de sistemas. El comportamiento del ciclo a más largo plazo influye en el desarrollo del ciclo a corto y viceversa. Es por ello que un modelo más ajustado a la realidad es aquel que produzca endógenamente dos comportamientos cíclicos diferentes, tales que se acoplaran entre sí sin necesidad de una imposición externa.

Un modelo adecuado a las características propias de la economía fue desarrollado por Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994), construido a partir de la desagregación del sector productor de capital en el modelo de onda larga de Sterman (1985). Este modelo y sus ampliaciones serán estudiados en los capítulos III y IV.

1.5 Objetivos

Esta memoria se va a centrar en el estudio y ampliación de los modelos que explican el acoplamiento y sincronización entre los ciclos económicos presentados hasta el momento. Tal sincronización es lo que permitiría la emergencia de comportamientos cíclicos en la economía en su conjunto. Con este trabajo pretendemos realizar aportaciones sobre diversos aspectos recogidos en la literatura económica, entre los que vamos a destacar los siguientes, que serán objetivos de esta memoria:

- *Objetivo 1. Estudio analítico del modelo desagregado de onda larga.*

En décadas recientes se han desarrollado importantes trabajos en relación con el proceso de acoplamiento de osciladores no lineales (Arnol'd 1965,

Broer et al. 1990). Estos estudios permiten explicar el fenómeno de acoplamiento y sincronización que se produce entre comportamientos cíclicos de diferentes sectores y empresas (Mosekilde et al. 1992). En este sentido, el modelo desagregado de onda larga de Kampmann et al. (1994) constituye una extensión del modelo de onda larga de Sterman (1985) que trata de explicar el acoplamiento producido en una economía desagregada con dos sectores productores de capital.

El estudio de este modelo desagregado se ha fundamentado, hasta el momento, en simulaciones llevadas a cabo para diferentes condiciones iniciales y valores de los parámetros. La utilización de métodos analíticos en este estudio podría aportar nuevos conocimientos acerca de su comportamiento, que las simulaciones, por su naturaleza, son incapaces de desvelar.

Más concretamente, es de especial interés el análisis de las situaciones extremas del modelo desagregado de onda larga, que son las siguientes:

- 1.1. Caso de nula dependencia entre los sectores productores de capital.
- 1.2. Caso de alta dependencia de cada sector con respecto al otro sector para la producción.

El caso de independencia entre los sectores es relevante porque, en esta situación, es de esperar que el comportamiento cambie desde que los sectores posean una dependencia no nula, por pequeña que sea. Este hecho puede ser desvelado si localizamos una bifurcación, difícilmente descriptible a través de simulaciones.

El caso de alta dependencia entre los sectores también es relevante, ya que las simulaciones nos muestran que la sincronización se extiende para

un amplio rango de parámetros antes de llegar a la total dependencia. Mostraremos analíticamente la causa de esta situación.

- *Objetivo 2. Estudio del efecto de los factores monetarios sobre la sincronización del comportamiento cíclico de los diversos sectores de la economía.*

La concreción de este objetivo, desde el punto de vista de los modelos no lineales existentes, se plasma en los siguientes:

- *Objetivo 2.1. Reformulación del modelo desagregado de onda larga mediante la incorporación de factores monetarios.*

Una de las críticas hacia los primeros modelos endógenos, post-keynesianos, fue la ausencia en ellos de factores monetarios. El modelo de Tobin (1965) supuso un intento de explicación endógena del efecto del dinero sobre la economía real. Por otro lado, el modelo desagregado de la onda larga desarrollado por Kampmann et al. (1994), aunque representa una buena explicación endógena y no lineal del fenómeno de acoplamiento que se produce entre los ciclos económicos, presenta las mismas carencias que los aludidos primeros modelos post-keynesianos.

Resulta, por tanto, objetivo primordial de esta memoria ampliar el modelo desagregado de onda larga, considerando el activo dinero en la economía con un número cualquiera de sectores y con las mismas relaciones en el mercado de bienes. Ello permitiría, del mismo modo, la introducción del sistema de precios, que posibilita la incorporación de sustituibilidad entre los factores de producción.

- *Objetivo 2.2. Análisis de la hipótesis de neutralidad del dinero en la economía en relación con la sincronización entre ciclos económicos.*

El dinero ha jugado un papel esencial en Economía y su influencia en la evolución de las variables reales ha sido fuente de debate entre los economistas a lo largo de la historia. Uno de los puntos conflictivos es la neutralidad del dinero, esto es, si el cambio de variables de tipo monetario, como el crecimiento de la oferta de dinero, afectan al valor de variables reales como la renta, producción, ahorro o inversión, o, por el contrario, se reflejan únicamente en una variación proporcional de los precios.

Es comúnmente aceptado que el dinero no es neutral a corto plazo. No obstante, a largo plazo no hay un acuerdo generalizado. De esta manera, es especialmente relevante la construcción de modelos con factores monetarios que contribuyan a profundizar en esta controversia. En particular, también es relevante analizar el efecto sobre la sincronización entre los ciclos de adoptar una política expansiva o contractiva en materia de oferta monetaria.

- *Objetivo 2.3. Efecto sobre el comportamiento cíclico de la economía de adoptar, por parte de los agentes, expectativas adaptativas o racionales sobre la evolución de los precios.*

En el proceso de ajuste de la economía a un cambio en la tasa de crecimiento monetario es importante tener en cuenta las expectativas de inflación que los agentes económicos forman a lo largo de sucesivos periodos. Estas expectativas influyen en la rapidez con la que las variables reales de la economía vuelven a su senda anterior tras un cambio monetario. Diversos economistas

aceptan como válidas las expectativas adaptativas (Day 1994). Por el contrario, otros economistas consideran, alternativamente, la hipótesis de expectativas racionales. La adopción de una u otra hipótesis de expectativas trae consigo una interpretación sobre la naturaleza del ciclo económico completamente diferente.

De esta manera, el desarrollo que vamos a seguir en esta memoria empezará, en el capítulo II, con una revisión de los fundamentos que sobre los sistemas dinámicos se han desarrollado desde el campo de la Matemática. Describiremos el comportamiento de los sistemas lineales, así como introduciremos varios resultados que pueden ser utilizados en el estudio cualitativo de los sistemas no lineales. Finalizaremos este capítulo con un estudio del comportamiento de los sistemas que manifiestan el fenómeno de acoplamiento, ejemplos, resultados y formas de introducir estos sistemas.

En el capítulo III utilizaremos los conceptos y técnicas presentadas en el capítulo previo para realizar un estudio analítico del modelo desagregado de onda larga de Kampmann et al. (1994). Por medio de este estudio analítico describiremos los nuevos aspectos del modelo que completan el conocimiento de su comportamiento. Por último, en el capítulo IV, construiremos un nuevo modelo que supone una ampliación del modelo desagregado de onda larga con la introducción de factores de tipo monetario, no considerados hasta ahora. Esta ampliación supone poder analizar, en un modelo de acoplamiento, hipótesis que han sido materia de debate entre los economistas a lo largo de la historia, como es la neutralidad del dinero y el efecto de los cambios en política monetaria sobre las variables reales.

Finalizamos esta memoria exponiendo las conclusiones más sobresalientes del trabajo. El último capítulo estará dedicado a algunas líneas abiertas de investigación a las que dedicaremos nuestro esfuerzo en el futuro.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

2.1 Sistemas dinámicos

La evolución temporal de un fenómeno ha sido objeto de estudio constante por parte de los científicos a lo largo de la historia. Esto ha originado la gestación y desarrollo de un cuerpo matemático sólido que sirve como metodología de representación y análisis de estos fenómenos. En este capítulo introduciremos los conceptos fundamentales y varios resultados matemáticos en relación al análisis del desarrollo temporal de las variables que definen un sistema. Exponer todos los resultados acerca de la materia es una tarea casi imposible, debido a la extensión y complejo desarrollo matemático de los mismos, con lo que nos ceñiremos a aquellos más relevantes y que vamos a utilizar en los capítulos posteriores. La mayoría de estos conceptos y resultados que vamos a presentar pueden ser encontrados en Hirsch y Smale (1974), Guckenheimer y Holmes (1983), Arrowsmith y Place (1990), Broer et al. (1991).

En general, los modelos dinámicos tratan de describir la evolución a través del tiempo de una o varias variables representativas de un fenómeno, por medio de unas ecuaciones o relaciones funcionales que incluyen estas mismas variables, el tiempo, y ciertos parámetros. Esta forma de representación

está totalmente extendida en todos los campos de la ciencia, como la Física, Química, Biología, Medicina, Economía, etc. No obstante, la forma concreta de representar esta evolución dinámica no es siempre la misma. Vamos a centrarnos en dos formas de describir un fenómeno dinámico, las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en diferencias.

- *Ecuaciones diferenciales ordinarias:* Entenderemos por sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias la siguiente expresión:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

con $x(t) \in W$, siendo W un subconjunto abierto de un espacio euclídeo E de dimensión finita y que podemos considerar \mathbb{R}^n . Por otro lado, $f : W \mapsto E$ es una función que la vamos a considerar diferenciable y con derivadas parciales continuas, o sea, $f \in C^1$. Al sistema 2.1 se le llama sistema autónomo porque la evolución de la variable x no depende explícitamente del tiempo t . Una ecuación no autónoma $\dot{x} = f(x, t)$ se puede transformar en una autónoma con una variable más, añadiendo la ecuación $\dot{t} = 1$. De esta forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se define una *solución* de 2.1 a una función diferenciable $x(t)$, t definido en un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, tal que $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $\forall t \in J$. Entonces, dadas las condiciones sobre la función f arriba descritas, se demuestra que existe una única solución de la ecuación 2.1 tal que cumple que, en la situación inicial ($t = 0$ generalmente), el valor de esta solución es $x_0 \in W$, o sea, $x(0) = x_0$. A este valor $x(0) = x_0$ se le llama *condición inicial* del sistema 2.1. De este resultado se deduce que las diferentes soluciones de una ecuación diferencial nunca se cortan, ya que, de lo contrario, se contradice la unicidad de las mismas. A pesar de este

prometedor teorema de existencia y unicidad, la mayoría de las veces no es posible hallar la forma concreta del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.

- *Ecuaciones en diferencias*: La expresión general de un sistema de ecuaciones en diferencias es la siguiente:

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (2.3)$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^n$ representa el valor de la variable x en el instante de tiempo t discreto, o sea, a saltos. Al igual que en el caso anterior, la función f podemos considerarla de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n y de clase C^1 . Entonces, dada una situación inicial del modelo, esto es, un valor en $t = 0$, que podemos notar x_0 , podemos hallar el valor de esta variable en cualquier instante t siguiendo la ley de recurrencia dada por la ecuación 2.3.

Ambas formas de representar un fenómeno dinámico tienen múltiples características comunes, y existen métodos para pasar de la descripción del fenómeno mediante sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones en diferencias y viceversa. Esto se hará haciendo uso de la llamada función de Poincaré y la suspensión, que introduciremos posteriormente.

Estas vías de presentar un modelo dinámico se pueden abstraer a una forma general, que incluye estas particulares y otras más. Esta forma general se le llama *sistema dinámico*, que a continuación vamos a definir¹:

Definición 1 Dado un semigrupo aditivo $T \subseteq \mathbb{R}$, (o sea, $0 \in T$; si $t, s \in T$, entonces $t + s \in T$), y un subconjunto abierto W de un espacio euclídeo E , se llama sistema dinámico a la terna (W, T, ϕ) , de manera que ϕ es una función definida en:

$$\phi : T \times W \mapsto W$$

¹Esta definición no es la más general de un sistema dinámico, pero incluye todos los sistemas que vamos a presentar en este trabajo.

y de clase C^1 tal que:

- $\phi(0, x) = x, \forall x \in W$
- $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x), \forall t, s \in T, \forall x \in W$

Dado un sistema dinámico (W, T, ϕ) , W se llama *espacio de estados* del sistema. Se define también como *dimensión* de un sistema dinámico la dimensión del espacio E . Notaremos como sistema dinámico la terna (W, T, ϕ) o, por simplicidad, la función $\phi(t, x)^2$.

El conjunto T representa el discurrir de la variable, que comúnmente es el tiempo. La evolución de una variable en un sistema dinámico está perfectamente determinada por la expresión concreta de la función $\phi(t, x)$. Así, dada una situación inicial del sistema x_0 , la situación en el instante t está determinada por $x(t) = \phi_t(x_0)$. Entonces al conjunto $\{\phi_t(x_0)\}_{t \in T}$ se le llama *órbita o trayectoria* del sistema con condición inicial x_0 , e indica uno de los posibles desarrollos del sistema a través del tiempo T cuando partimos de una situación en $t = 0$.

La forma particular del conjunto T revela si nos encontramos con un sistema dinámico representado por un sistema de ecuaciones en diferencias o de ecuaciones diferenciales. Así, si $T = \mathbb{Z}$ ó $T = \mathbb{Z}^+$, nos encontramos en el caso de un sistema de ecuaciones en diferencias en el cual el tiempo está considerado discretamente. La función f construida a partir de un sistema sistema dinámico $\phi(t, x)$ con $T = \mathbb{Z}$ ó $T = \mathbb{Z}^+$ de la forma $f(x) = \phi(1, x)$ define el sistema de ecuaciones en diferencias $x_{t+1} = f(x_t)$. Y el recíproco también es cierto: dado un sistema de ecuaciones en diferencias cualquiera $x_{t+1} = f(x_t)$,

²Obsérvese que si definiéramos $\phi_t : W \mapsto W$ como $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, con $t \in T$ fijo, las dos propiedades de la función ϕ indican que el conjunto $\{\phi_t\}_{t \in T}$ es un semigrupo con respecto a la composición de funciones, ya que cumple $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \forall t, s \in T$, y ϕ_0 es el elemento neutro.

la función construida de la forma $\phi(t, x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ cumple las hipótesis de sistema dinámico.

Por otro lado, un sistema dinámico $\phi(t, x)$ con $T = \mathbb{R}$ tiene asociado un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$, donde la función $f(x)$ viene determinada por la expresión:

$$f(x) = \left. \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} \quad (2.4)$$

Entonces, dada una condición inicial del sistema $\dot{x} = f(x)$, x_0 , la solución que pasa por este valor en el instante inicial está determinada por $\phi_t(x_0)$, o lo que es lo mismo, $x(t) = \phi_t(x_0)$.

El recíproco vuelve a ser cierto: dado un sistema de ecuaciones diferenciales cualquiera, existe un sistema dinámico asociado a él. Vamos a definirlo:

Definición 2 *Dado un sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

con $x \in W$, W un abierto de un espacio euclídeo E , f una función de W en E de clase C^1 , y dada $x(t)$ la única solución de 2.5 que tiene como condición inicial x_0 , se define flujo del sistema 2.5 a la siguiente función:

$$\phi(t, x_0) \equiv x(t)$$

definida en el producto cartesiano entre el intervalo J_{x_0} donde esté definida la solución para cada condición inicial x_0 , y el conjunto de condiciones iniciales, que es el conjunto W .

Se demuestra entonces que esta función $\phi(t, x)$, para una condición inicial x , arbitraria pero fija, está definida en un conjunto abierto de $\mathbb{R} \times W$ y

cumple las propiedades de sistema dinámico dadas en la definición 1. Hemos encontrado, por tanto, un sistema dinámico biunívocamente asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$. A este sistema dinámico asociado lo llamamos *flujo* del sistema.

Además, la función definida por el flujo de la ecuación diferencial 2.5, $\phi_t : W \mapsto W$, y, en general, cualquier sistema dinámico con $T = \mathbb{R}$, no es sólo diferenciable, sino que admite una inversa diferenciable en un entorno de una condición inicial x_0 , dada por la función ϕ_{-t} que siempre existe. A estas funciones diferenciables que admiten inversas diferenciables en entornos de puntos se les llama difeomorfismos locales.

Entonces, todo sistema de ecuaciones diferenciales en las condiciones de 2.5 tiene asociado un flujo que es un sistema dinámico, y todo sistema dinámico en $T = \mathbb{R}$ tiene asociado un sistema de ecuaciones diferenciales. En este trabajo vamos a tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que presentaremos los resultados para sistemas dinámicos en tiempo continuo, o sea, $T = \mathbb{R}$. No obstante, existen muchos resultados fácilmente trasladables a ecuaciones en diferencias y viceversa. A partir de ahora utilizaremos indistintamente el flujo o las ecuaciones diferenciales para referirnos a esta clase de sistemas dinámicos.

2.2 Atractores

Los primeros análisis en sistemas de ecuaciones diferenciales, que podemos remontar a la época de Newton o Leibniz, se enfocaban, y con cierto éxito, hacia el descubrimiento del conjunto de soluciones de dichos sistemas. Sin embargo, ya a finales del siglo pasado, tras la presentación de trabajos como el problema de los tres cuerpos por Poincaré en 1892 (Barrow-Green 1997 para

un amplio estudio de este trabajo), la comunidad científica comprobó que, para la mayoría de estos sistemas de ecuaciones diferenciales, no es posible hallar una expresión general analítica del conjunto de soluciones. Esto dio lugar a un giro en los métodos de análisis utilizados hasta el momento, surgiendo así el llamado estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Este método busca conocer el comportamiento de un sistema dinámico sin necesidad de conocer la expresión analítica de sus soluciones. Para ello, se basa en el estudio de una serie de propiedades topológicas de los sistemas, como es la aparición de atractores. Esta sección servirá como introducción de este tipo de estructuras.

En el estudio de los sistemas dinámicos existen unas clases de órbitas que destacan por sus características. Por ejemplo, dado un sistema dinámico $\phi(t, x)$ con $t \in \mathbb{R}$ y $x \in W$, subconjunto de un espacio euclídeo, puede existir un punto $x^* \in W$ tal que $\phi_t(x^*) = x^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que si el sistema dinámico se encuentra en este punto, siempre va a estar situado en él. Se dice, entonces, que x^* es un *punto de equilibrio* del sistema.

Analíticamente, dado el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a este sistema dinámico, $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1$, los puntos de equilibrio se localizan hallando las raíces de la función f , o sea, $x^* \in W$ es un punto de equilibrio del sistema si y sólo si $f(x^*) = 0$. La localización de los puntos de equilibrio es la primera etapa en el análisis de un sistema dinámico. En modelos de dinámica económica, estos puntos de equilibrio indican la situación de equilibrio intertemporal de la economía, que no tienen por qué ser la misma que la del equilibrio de mercado.

Existen otros tipos de trayectorias especiales que son las órbitas cerradas. Dado un sistema dinámico $\phi(t, x)$, se dice que $\gamma \subset W$ es una *órbita cerrada* si no es un punto de equilibrio y $\exists p > 0$ tal que $\phi_p(x) = x \forall x \in \gamma$. Al punto $\lambda > 0$ tal que $\lambda = \min\{p > 0 / \phi_p(x) = x, \forall x \in \gamma\}$ se le llama *periodo* de la órbita

cerrada γ . Las órbitas cerradas indican comportamientos cíclicos regulares del sistema. Localizar estos comportamientos en sistemas dinámicos suele ser una labor mucho más ardua que la localización de los puntos de equilibrio. Ejemplos que incorporan estas órbitas pueden encontrarse en Guckenheimer y Holmes (1983).

En el estudio de sistemas dinámicos se da poca relevancia al comportamiento transitorio de las variables y se centra más en la tendencia asintótica, o sea, para valores de $t \rightarrow \infty$. Esta tendencia asintótica puede dirigirse a estructuras muy complejas, aunque es usual la tendencia a los puntos de equilibrio del sistema. En este caso se dirá que el punto de equilibrio es *asintóticamente estable*. Existe también otro comportamiento más débil que la estabilidad asintótica, y es cuando las trayectorias de puntos próximos a un punto de equilibrio se mantienen próximos a este punto de equilibrio, pero sin necesidad de convergencia. En este caso, el punto de equilibrio será sólo *estable*. Vamos a establecer las definiciones de una forma más rigurosa:

Definición 3 Sea un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$, con $f : W \mapsto E$ una función C^1 , y x^* un punto de equilibrio de este sistema. Entonces, se dice que x^* es estable si para todo entorno U_{x^*} de x^* existe otro entorno V_{x^*} de x^* con $V_{x^*} \subseteq U_{x^*}$, tal que toda solución $x(t)$ con $x(0) \in V_{x^*}$ se mantiene en U_{x^*} para todo $t > 0$.

Obsérvese que, en este caso, no es necesario que las soluciones de puntos cercanos al punto de equilibrio x^* converjan a este punto de equilibrio, sino que se mantengan cercanos a él.

Definición 4 Dadas las mismas condiciones de la definición anterior, si además puedo tomar V_{x^*} tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$, para toda solución $x(t)$ con $x(0) \in V_{x^*}$, entonces se dice que el punto de equilibrio x^* es *asintóticamente estable*.

La estabilidad asintótica es un concepto más restrictivo que la estabilidad. No obstante, éste va a ser el comportamiento más usual y relevante que presenten los sistemas en torno a un punto de equilibrio. Un punto de equilibrio que no verifique la definición 3 se dice que es *inestable*.

Una órbita cerrada γ también puede atraer trayectorias. Enunciemos la definición formal:

Definición 5 *Sea un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$, con $f : W \mapsto E$ una función C^1 , y sea γ una órbita cerrada de este sistema. Se dice que γ es estable si para todo entorno U_γ de γ existe otro entorno V_γ de γ con $V_\gamma \subseteq U_\gamma$, tal que toda solución $x(t)$ con $x(0) \in V_\gamma$ se mantiene en U_γ para todo $t > 0$.*

Al igual que en el caso de los puntos de equilibrio, también podemos establecer un concepto de estabilidad de una órbita cerrada más fuerte que el anterior:

Definición 6 *Dadas las mismas condiciones que la definición anterior, si además puedo tomar V_γ tal que, dada una solución cualquiera $x(t)$ con $x(0) \in V_\gamma$, se cumple que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t), \gamma) = 0$$

con $d(x, \gamma)$ la distancia entre el punto x y la órbita cerrada γ , se dice que la órbita cerrada γ es asintóticamente estable.

Análogamente al caso de los puntos de equilibrio, una órbita cerrada que no verifica la definición 5 se dice inestable.

De las definiciones anteriores, podemos deducir que un punto de equilibrio o una órbita cerrada asintóticamente estable está referida siempre a la existencia de un entorno V donde las trayectorias que se inician en este entorno son convergentes al punto de equilibrio o la órbita cerrada. Estas

observaciones inducen a la introducción de un nuevo concepto, la llamada *cuenca de atracción*. La cuenca de atracción de un punto de equilibrio o una órbita cerrada asintóticamente estable es la unión de todas las soluciones de la ecuación diferencial que convergen al punto de equilibrio o la órbita cerrada, respectivamente.

Los puntos de equilibrio u órbitas cerradas no son necesariamente las únicas estructuras que atraen o repelen las trayectorias. Para analizar los casos más generales, vamos a definir el conjunto de puntos que atraen o repelen una órbita cualquiera, que llamaremos conjunto límite. Entonces, dado una órbita cualquiera $\{\phi_t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de un sistema dinámico, se dice que un punto $a \in W$ es un *punto ω -límite* de la trayectoria de x si es límite de esta trayectoria para alguna subsucesión de valores de t divergente en el infinito $(+\infty)$. Esto quiere decir que existe una sucesión de puntos de la trayectoria $\{\phi_{t_n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, para valores de t crecientes, que se aproxima tanto como queramos al punto a . Análogamente, se dice que $b \in W$ es un *punto α -límite* de la trayectoria de x si es límite de esta trayectoria para alguna subsucesión de valores de t divergente en menos infinito $(-\infty)$.

Al conjunto de puntos que son ω -límite de una trayectoria $\{\phi_t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se dice *conjunto ω -límite de x* , $L_\omega(x)$, y al conjunto de puntos que son α -límite de esta trayectoria se dice *conjunto α -límite de x* , $L_\alpha(x)$. La definición conjuntista es, por tanto, la siguiente:

$$\begin{aligned} L_\omega(x) &= \{a \in W / \exists t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = a\} \\ L_\alpha(x) &= \{b \in W / \exists t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = b\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Un conjunto $A \subseteq W$ se dice *invariante* para un sistema dinámico $\phi(t, x)$ si $\phi_t(A) \subseteq A, \forall t \in \mathbb{R}$ (si $\phi_t(A) \subseteq A, \forall t > 0$, se dice *positivamente invariante*, análogamente $\forall t < 0$, *negativamente invariante*). Se demuestra que los conjuntos límites de un sistema dinámico en un punto son necesariamente *invariantes*. Esto quiere decir que las órbitas asociadas a cualquiera de sus

puntos nunca se escapan del conjunto. Cualquier conjunto límite, por tanto, incluye todas las órbitas de los puntos que están incluidas en él.

Cuando un conjunto límite es una órbita cerrada se le llama *ciclo límite*. En general, a un sistema que presente un comportamiento periódico sostenido, o que posea una órbita cerrada como conjunto ω -límite para un subconjunto denso de puntos de su dominio de definición, se le llama un *oscilador*.

Los conjuntos límites son importantes en el estudio cualitativo de los sistemas dinámicos, pues nos indican el comportamiento hacia el que tiende o del que puede considerarse fuente las soluciones de dicho sistema. Cualitativamente, el comportamiento transitorio hacia dicho conjunto se desecha, y se toma como comportamiento general el indicado en su conjunto límite.

Nótese que el conjunto α -límite corresponde a conjuntos invariantes que son inestables. De hecho, se demuestra que todo punto de equilibrio inestable es conjunto α -límite para un conjunto de puntos alrededor de él, y salvo ciertos casos que podemos despreciar, el hecho de que un punto de equilibrio sea α -límite de otro punto diferente implica su inestabilidad.

Los conjuntos ω -límites se refieren a conjuntos que atraen órbitas. Si un conjunto atrae no a una órbita exclusivamente, sino a todas las órbitas iniciadas en un entorno alrededor suyo, se le llamará un *atractor*. A continuación vamos a establecer la definición de atractor según Broer et al. (1991):

Definición 7 Dado un sistema dinámico $\phi(t, x)$ donde $x \in W$, W abierto de un espacio vectorial E , $t \in T (= \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{Z}^+)$. Se dice que $A \subseteq W$ es un atractor de este sistema dinámico si verifica las siguientes propiedades:

- A es un compacto (cerrado y acotado).

- $\phi_t(A) = A, \forall t \in T$ (A es invariante).
- $\exists U$ entorno de A en E tal que $A = \bigcap_{t>0} \phi_t(U)$, que dicho de otra manera, indica que el conjunto de los límites cuando $t \mapsto +\infty$ de todas las trayectorias iniciadas en puntos de U es el conjunto A .

Existen otras definiciones en la literatura (ver Guckenheimer y Holmes 1983) que incluyen que la órbita de cualquier punto $a \in A$, $\{\phi_t(a)\}_{t \in T}$, haya de ser densa en el conjunto A . A esta propiedad se le denomina *transitividad*. Con esto se evita que el conjunto se pueda dividir en varias componentes.

Análogamente al caso de los puntos de equilibrio, se define *cuenca de atracción* de un atractor como la unión de todas las trayectorias que son atraídas hacia ese conjunto.

Es evidente que puntos de equilibrio u órbitas cerradas asintóticamente estables son ejemplos de atractores. No obstante, existen otros ejemplos de atractores exhibiendo formas mucho más complejas que éstas. Un ejemplo clásico de este tipo de atractores en tiempo continuo es el inducido por el sistema de Lorenz en 1963 (ver Guckenheimer y Holmes 1983), que explica el movimiento turbulento de un fluido:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= \beta z + xy \end{aligned} \tag{2.7}$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma, \rho, \beta > 0$. Simulando el sistema para ciertos valores concretos de los parámetros, obtenemos una trayectoria como la que aparece en la figura 2.1. Curiosamente, las órbitas de este sistema, para un amplio rango de los valores de los parámetros, adquieren a largo plazo esta estructura, siendo soluciones diferentes. Esta estructura sugiere la existencia de un atractor que no es ni un punto de equilibrio, ni órbitas cerradas, ni combinaciones entre

ellos.

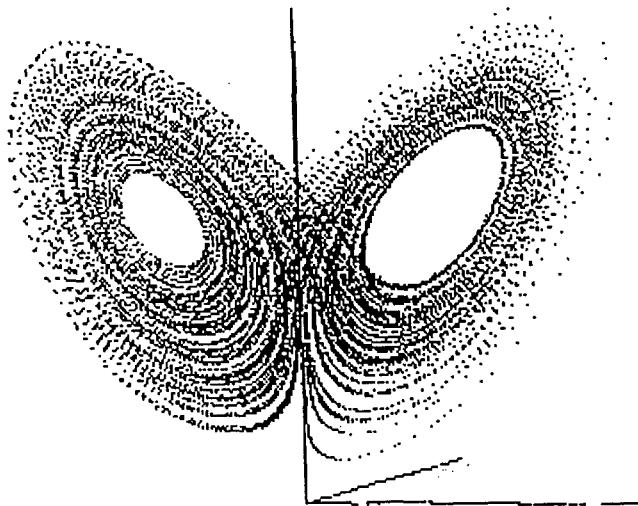


Figura 2.1: Atractor de Lorenz. Fuente: Lorenz (1993).

Usualmente este tipo de atractores están asociados a comportamientos de las trayectorias muy sensibles a las condiciones iniciales, o sea, que trayectorias con condiciones iniciales muy próximas entre sí manifiestan comportamientos radicalmente diferentes. Un atractor con la propiedad de transitividad, y exhibiendo este comportamiento complejo ha sido denominado por Ruelle en 1979 como *atractor extraño* (ver Lorenz 1993). A partir de esta definición, podemos decir que un sistema es *caótico* si tiene asociados a él atractores extraños.

Existen muchos otros ejemplos de atractores exhibiendo una geometría compleja. Estos comportamientos están relacionados con una alta sensibilidad a las condiciones iniciales y una alta impredecibilidad. Usualmente estos atractores tienen una dimensión topológica no entera, llamada *dimensión fractal*, que es otra característica de comportamiento caótico. En general, podemos considerar el caos como una situación intermedia entre comportamientos puramente deterministas, con baja sensibilidad a las

condiciones iniciales, y los comportamientos aleatorios.

La mayoría de las teorías que tratan de desentrañar la dinámica de estos sistemas han sido impulsadas en los últimos tiempos por la utilización de ordenadores, que se han presentado como una gran ayuda en la localización y descripción de atractores extraños. Es por ello que, desde el primer trabajo de Lorenz, se han acumulado muchos resultados de tipo teórico que intentan comprender estas estructuras, de los cuales podemos citar los más relevantes, como Ruelle y Takens en 1971, Li y Yorke en 1975, Feigenbaum (1978), Ruelle en 1979 (Lorenz 1993 para una breve revisión).

A pesar de los amplios avances en la materia, la definición de comportamiento caótico todavía sigue siendo materia de estudio. A esto se le une la dificultad intrínseca, en muchos sistemas, en la verificación de caos. Así, ejemplos clásicos como el atractor de Hénon (Broer et al. 1991), que exhibe una dimensión fractal, no han encontrado una justificación clara de ser ni siquiera atractor. No obstante, existen ciertos criterios de justificación del caos que han tenido éxito en multitud de estudios. Tal es el caso del estudio de los llamados *exponentes de Lyapunov*, o bifurcaciones de desdoblamiento de periodo, o la utilización de ciertos resultados, como el teorema de Newhouse, Ruelle y Takens o el de Marotto en 1978 (Lorenz 1989).

2.3 Sistemas lineales

Como hemos mencionado en el capítulo I, puede establecerse una división en el estudio de los fenómenos dinámicos en todos los campos del saber según dos enfoques: un enfoque lineal o un enfoque no lineal. En Economía, en particular, a pesar de la poca riqueza dinámica que los sistemas lineales tienen con respecto a los no lineales, la utilización de uno u otro tipo de modelización sigue siendo materia de debate. Ello motiva que un estudio general del comportamiento de

los sistemas lineales sea de interés.

Los sistemas lineales se basan en el principio de que cambios en la situación inicial de una variable dentro del modelo, producen cambios proporcionales en el comportamiento de esa variable a lo largo del tiempo, o de cualquier otra que integre el sistema. Esto implica que la variación de cualquier variable ha de ser, en cada instante, igual a una combinación lineal de los valores de cada una de las variables, salvo una constante. Nosotros nos vamos a ceñir al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales autónomas, o sea, que no dependen explícitamente del tiempo. También se le suele llamar sistema lineal con coeficientes constantes. Entonces, de acuerdo con lo dicho anteriormente, un sistema lineal ha de tener la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.8)$$

donde $x \in E$, de dimensión n , con lo que podemos considerarlo como \mathbb{R}^n . "A" es una matriz de orden $n \times n$ con coeficientes constantes. A este sistema lineal se le dice también *homogéneo*, porque no admite un término independiente de la variable sumado en la ecuación. El estudio de sistemas lineales autónomos no homogéneos es una ampliación sencilla del caso anterior que no perturba el comportamiento cualitativo del sistema.

La consideración del sistema no dependiente explícitamente del tiempo no es sólo una mera simplificación. Incorporar esta dependencia implicaría que la evolución de las variables se ven afectadas no sólo por su valor, sino también por el transcurso del tiempo. Esta suposición indica que las variables están afectadas por circunstancias exógenas al sistema que, lógicamente, perturbarán su comportamiento. Analizar el caso puramente endógeno es ausentarlo de fuentes externas de variación.

Trivialmente, el punto $0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema. Un primer análisis sería, por tanto, estudiar el comportamiento alrededor de

este punto de equilibrio. Afortunadamente, este sistema es sencillo y podemos conocer la forma general explícita de cualquier solución dada una condición inicial $x(0) = x_0$. Nos remitimos a Hirsch y Smale (1974) o Arnol'd (1992) para un desarrollo extenso de los fundamentos de álgebra lineal necesarios para la comprensión y demostración de los resultados acerca de estas soluciones, así como una demostración de los mismos.

En pocas palabras, se demuestra que el conjunto de soluciones del sistema 2.8 es un espacio vectorial de la misma dimensión que el espacio de estados y que, por tanto, cualquier solución $x(t)$ puede expresarse como combinación lineal de n soluciones particulares independientes que forman una base, $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Así:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t), \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.9)$$

Estas soluciones $x_j(t)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se pueden construir a partir de los valores propios en \mathbb{C} de la matriz A considerando su multiplicidad. De esta manera, dado el conjunto de valores propios $\{\lambda_h\}_{h \in \{1, 2, \dots, k\}}$ de la matriz A , obtengo un conjunto de n soluciones linealmente independientes $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ que forman una base del espacio de soluciones del sistema 2.8. Las componentes $c_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, de una solución concreta $x(t)$, en esta base de soluciones, se determinan a partir de las condiciones iniciales impuestas en el sistema.

De la observación de la forma analítica que tiene el conjunto de soluciones independientes podemos deducir directamente el comportamiento asintótico del sistema. El signo de la parte real de los autovalores de la matriz A determina este comportamiento.

Teorema 1 *Toda solución tiende al punto de equilibrio $x^* = 0$ para $t \mapsto \infty$ si y solo si la parte real de todos los valores propios de A es negativa.*

En este caso, el punto de equilibrio atrae cualquier solución monótonamente si todos los valores propios son reales, o mediante oscilaciones amortiguadas, si existe algún valor propio con parte imaginaria no nula. El punto de equilibrio es asintóticamente estable y la cuenca de atracción es todo el conjunto \mathbb{R}^n . Un punto de equilibrio en esta situación se le dice *sumidero* (ver figura 2.2).

Si todos los valores propios de A tienen parte real estrictamente positiva, toda solución que no sea el punto de equilibrio tiende a alejarse cada vez más de él, de una forma monótona o mediante oscilaciones explosivas, según si los valores propios son todos reales o no. En este caso, el punto de equilibrio $x^* = 0$ es inestable y se dice una *fente* (ver figura 2.2).

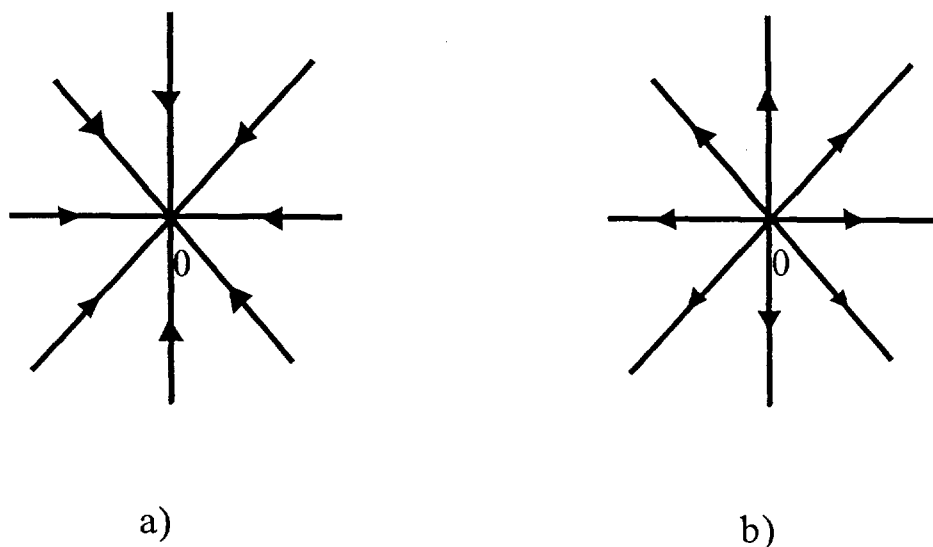


Figura 2.2: Comportamiento del sistema lineal $\dot{x} = Ax$: a) $Re\lambda < 0$, $Im\lambda = 0$, siendo λ cualquier valor propio de la matriz A . El punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^2$ es un sumidero; b) $Re\lambda > 0$, $Im\lambda = 0$, siendo λ cualquier valor propio de la matriz A . El punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^2$ es una fuente.

En orden a completar el estudio de los sistemas lineales, supongamos que la matriz A comprende valores propios que tienen todos parte real no nula, o positiva o negativa. En este caso el sistema se dice que es un *flujo hiperbólico* y el punto de equilibrio $x^* = 0$ se dice *punto hiperbólico*. Podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2 *Sea $\dot{x} = Ax$ un sistema lineal que es un flujo hiperbólico, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, existe una partición del espacio vectorial \mathbb{R}^n , de forma única, en una suma directa de un subespacio vectorial E^s (asociado a los valores propios con parte real negativa), más otro subespacio vectorial E^u (asociado a los valores propios con parte real positiva):*

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$$

de manera que cada uno de los subespacios son conjuntos invariantes por el sistema, y las soluciones iniciadas en E^s tienden asintóticamente al punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^n$, y las iniciadas en E^u se alejan de él.

Entonces a E^s se le llama *subespacio estable* y a E^u *subespacio inestable*. En particular, de este teorema se deduce que si existe algún valor propio con parte real positiva el punto de equilibrio es inestable. Si todos los valores propios tienen parte real negativa, el punto de equilibrio es estable. Podemos ver algunos ejemplos gráficos del comportamiento del sistema según estos subespacios en la figura 2.3.

Existe otra situación aún no analizada, que es el caso de algún valor propio con parte real nula. En este caso, podríamos construir un tercer subespacio, de manera que las soluciones iniciadas en él oscilen alrededor del punto de equilibrio manteniendo la misma distancia, si la parte imaginaria del valor propio es no nula, o se mantengan constantes, si el valor propio es el cero. Si todos los valores propios del sistema tienen parte real nula, este subespacio sería el total, \mathbb{R}^n . Entonces el punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^n$ sería estable. No

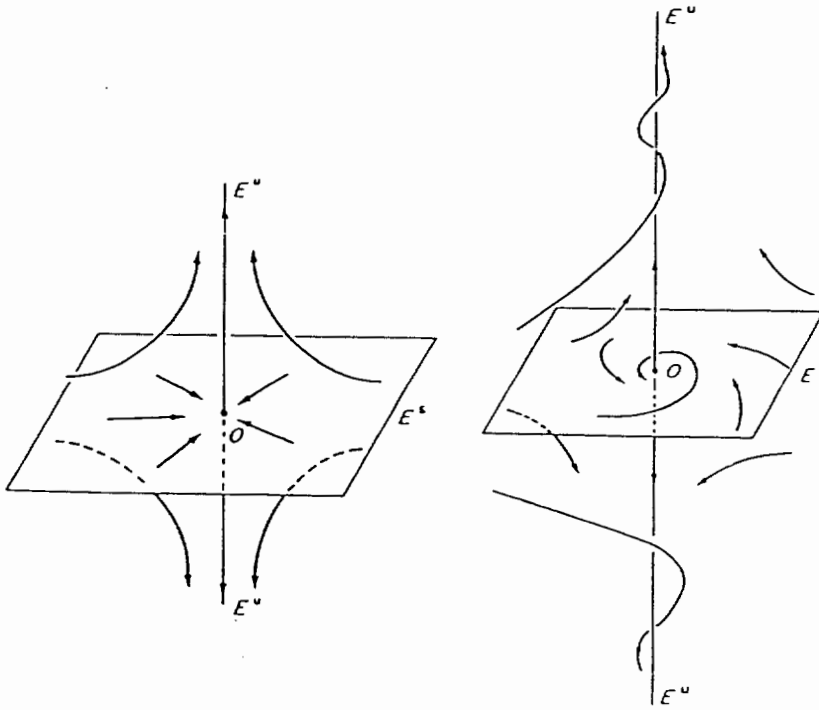


Figura 2.3: Subespacios estables e inestables de sistemas lineales. Fuente: Hirsch y Smale (1974).

obstante, esta situación es poco adecuada a la realidad, porque no se conserva frente a ligeras perturbaciones en el sistema. Pequeños cambios en la matriz A pueden originar que los valores propios no sean todos nulos, y el sistema pierda totalmente este comportamiento. Si el sistema representara una situación real, este comportamiento es desechable, ya que las continuas alteraciones existentes en las condiciones de un sistema real perturbarían esta situación tan frágil, no pudiendo presentarse. Se dice que esta situación es entonces *estructuralmente inestable*. En las próximas secciones ahondaremos más en esta cuestión.

2.4 Estabilidad estructural. Estabilidad local de puntos de equilibrio y órbitas cerradas

Como hemos podido comprobar en la anterior sección, el comportamiento cualitativo de los sistemas lineales está completamente determinado por el carácter del punto de equilibrio $0 \in \mathbb{R}^n$ asociado a él. Se tiene, por tanto, un conocimiento global del sistema, ya que, dada cualquier condición inicial, por muy distante del punto de equilibrio que se encuentre, su evolución asintótica está perfectamente determinada. Esta evolución asintótica puede manifestar convergencia al punto de equilibrio, divergencia en valor absoluto, o mantenimiento de la distancia al punto de equilibrio.

Desgraciadamente, los sistemas no lineales no poseen, en general, estos comportamientos tan sencillos. Al igual que una función no lineal entre dos espacios vectoriales posee unas posibilidades de variación y comportamiento asintótico mucho mayores que las lineales, así los sistemas no lineales también incorporan una riqueza mucho mayor. Ello supone una dificultad, muchas veces insalvable, en el estudio global del comportamiento del sistema. No obstante, se han desarrollado numerosos resultados que ayudan a conocer, al menos localmente, la evolución de las trayectorias.

2.4.1 Estabilidad estructural

Una de las primeras formas de llevar a cabo el estudio de los sistemas dinámicos en general es agruparlos en diversas clases de comportamientos cualitativos similares. De esta manera, reducimos estudiar todos los sistemas pertenecientes a una clase a estudiar la evolución de uno cualquiera de sus elementos. Para ello habrá que establecer una relación de equivalencia que ligue dos sistemas de una misma clase. Esta relación de equivalencia se llama

conjugación y está definida como sigue:

Definición 8 *Dados dos sistemas dinámicos (W, T, ϕ) , (W, T, ψ) , se dice que son conjugados si existe un homeomorfismo³ $h : W \mapsto W$ tal que*

$$h(\phi(t, x)) = \psi(t, h(x))$$

para todo $t \in T$, $x \in W$.

A la función h también se le llama *conjugación* entre los sistemas $\phi(t, x)$ y $\psi(t, x)$. Se demuestra que esta función preserva los conjuntos invariantes, lleva conjuntos estables en conjuntos estables, e inestables en inestables. Por tanto, a partir de estas propiedades, podemos decir que, cualitativamente, dos sistemas conjugados tienen el mismo comportamiento asintótico. No obstante, es posible que el modo de atracción o repulsión de ciertos conjuntos invariantes sea diferente entre dos sistemas conjugados, en el sentido que un sistema pudiera atraer trayectorias de una forma monótona, y otro en forma de oscilaciones amortiguadas (ver Broer et al. 1991 para un ejemplo).

Se demuestra que la conjugación es una relación de equivalencia, de manera que podemos construir diversas clases de equivalencias que incluyan todos los sistemas con las mismas características dinámicas. Por tanto, la descripción cualitativa de un sistema particular de una clase es suficiente para la descripción cualitativa de todos los sistemas de esa clase.

Por otro lado, los sistemas dinámicos que vamos a considerar como representaciones válidas de fenómenos reales son aquellos cuyos

³Un homeomorfismo $h : W \mapsto W$ es una función biyectiva continua y con inversa continua. Coloquialmente, los homeomorfismos transforman subconjuntos de W en otros subconjuntos de W estirando o encogiendo el de partida, nunca rompiendo o quebrando el contorno de ese subconjunto. Se trata de una transformación que maneja los conjuntos como si estuvieran hechos de "plastilina", pero sin realizar cortes ni pegados.

comportamientos cualitativos se mantienen frente a pequeñas perturbaciones en las funciones que definen el sistema. Sistemas que no mantienen estas características podemos considerarlos "desechables"⁴. Para establecer una definición concreta de esta propiedad, hemos de introducir una topología en el conjunto de sistemas dinámicos $\phi : W \times T \mapsto W$, $\phi \in C^k$, $k \in \mathbb{Z}$, que indique un concepto de cercanía entre los distintos sistemas. Esta va a ser la topología C^k , que establece que dos funciones son cercanas si sus imágenes y sus sucesivas diferenciales están cercanas hasta el orden k . Estamos entonces en disposición de enunciar la siguiente definición:

Definición 9 *Dado un sistema dinámico (W, T, ϕ) , con $\phi \in C^k$, se dice que este sistema es estructuralmente estable para la topología C^k si es un punto interior de una clase de equivalencia de sistemas conjugados, para el espacio topológico de los sistemas dinámicos con la topología C^k introducida.*

La definición anterior quiere decir que, dado un sistema $\psi(t, x)$ que esté lo suficientemente próximo a $\phi(t, x)$ por la topología C^k , tiene el mismo comportamiento asintótico que $\phi(t, x)$. Entonces, el sistema no sufre alteración cualitativa para pequeñas perturbaciones de sus imágenes y sus derivadas parciales. Así, pequeñas perturbaciones en el sistema no suponen cambios estructurales en el mismo.

2.4.2 Estabilidad local de puntos de equilibrio

Iniciamos en esta sección el estudio del comportamiento cualitativo de un sistema dinámico no lineal cualquiera en torno a sus puntos de equilibrio y en base a resultados sobre conjugación. Consideraremos el sistema dinámico

⁴Aunque a veces las condiciones reales del sistema obligan a considerar este otro tipo de sistemas como buenas representaciones, nosotros vamos a suponer que este caso no se presenta en los sistemas que vamos a trabajar.

en forma de ecuaciones diferenciales, por lo que, dada una función $f : W \mapsto E$, $f \in C^1$, el sistema está expresado por medio de la ecuación:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.10)$$

Una primera etapa en el estudio de este sistema es descubrir los puntos de equilibrio del mismo, es decir, el conjunto de $\{x_i^*\}_{i \in I}$, tal que $f(x_i^*) = 0$, siendo I un conjunto de índices tal que su cardinal sea igual al número de puntos de equilibrio del sistema. A cada punto de equilibrio x^* del sistema 2.10 le tenemos asociada una función lineal, dada por la diferencial de f en ese punto de equilibrio, $Df(x^*)$. Análogamente al caso lineal, vamos a clasificar el punto de equilibrio x^* según el signo de los valores propios de la diferencial $Df(x^*)$. Así, un punto de equilibrio x^* se dirá *hiperbólico* si la parte real de todos los valores propios de la diferencial de f en ese punto es distinta de cero. En esta situación podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3 (Hartman-Grobman) *Dado un sistema $\dot{x} = f(x)$ y un punto de equilibrio x^* hiperbólico, entonces existe un entorno de ese punto de equilibrio, U_{x^*} tal que el sistema anterior restringido a ese entorno es conjugado al sistema lineal $\dot{x} = Df(x^*)x$.*

Este teorema quiere decir que un sistema cualquiera se comporta cualitativamente igual que un sistema lineal, en un entorno de sus puntos de equilibrio hiperbólicos. Se dice, entonces, que el sistema es *localmente conjugado* al sistema lineal formado por su diferencial en cada uno de sus puntos de equilibrio hiperbólicos. Por tanto, todos los resultados generales para los sistemas lineales pueden trasladarse localmente a un entorno de estos puntos de equilibrio de los sistemas no lineales. Así, si todos los valores propios de la diferencial del sistema 2.10 en x^* son negativos, se dice que x^* es *asintóticamente estable localmente*, y si hay alguno de ellos positivo, entonces x^* es *inestable* (ver figura 2.4). En caso que se demuestre que un punto de equilibrio es asintóticamente estable con todo el dominio de definición

como cuenca de atracción, se dice que es *asintóticamente estable globalmente*. Por ejemplo, los puntos de equilibrio asintóticamente estables de los sistemas lineales son asintóticamente estables globalmente.

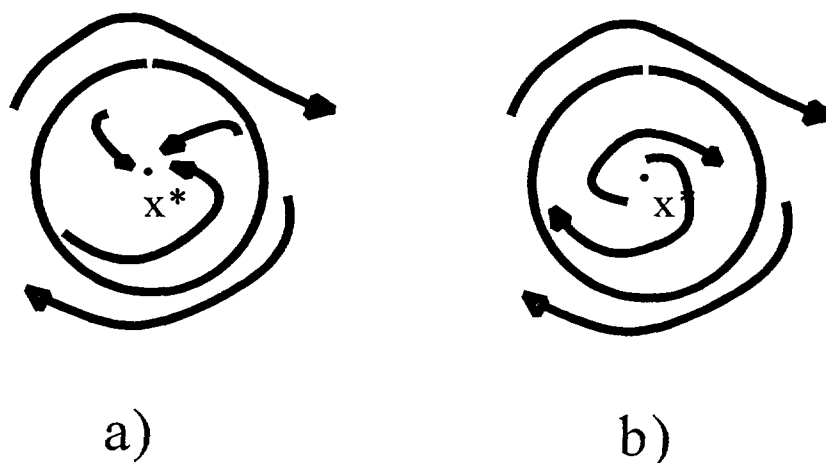


Figura 2.4: Comportamiento local de un sistema en torno a un punto de equilibrio x^* : a) x^* es asintóticamente estable localmente; b) x^* es inestable.

Es sencillo demostrar también que en un sistema lineal, si el punto de equilibrio es hiperbólico, es estructuralmente estable. Entonces, por el teorema de Hartman-Grobman, podemos deducir que los puntos de equilibrio hiperbólicos de un sistema no lineal son *localmente estructuralmente estables*, al existir una conjugación local que los liga con los sistemas lineales. Si, en cambio, el punto de equilibrio es no hiperbólico, su comportamiento no es sostenible frente a pequeñas perturbaciones, por lo que el sistema, en este caso, no es estructuralmente estable, y podemos desechar este tipo de comportamientos.

Sin embargo, aunque los puntos de equilibrio hiperbólicos de sistemas no lineales sean localmente estructuralmente estables, es posible que no representen la situación general de los sistemas. Es posible que los sistemas

con puntos no hiperbólicos representen un conjunto considerable dentro de los sistemas dinámicos. Para poder establecer una medida de relevancia de una propiedad dentro de un espacio topológico definiremos el siguiente concepto:

Definición 10 Dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado cualquiera con norma $\|\cdot\|$. Una propiedad P se dice *genérica* si se verifica para un subconjunto abierto y denso de X .

Entonces, si una propiedad en el conjunto de sistemas dinámicos definidos en W con tiempo \mathbb{R} y con la topología C^k es *genérica*, se mantiene frente a pequeñas perturbaciones de los sistemas, y si existe algún sistema que no verifica esa propiedad, se puede aproximar por sistemas que sí la verifican. Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que esa propiedad está extendida entre todo el conjunto de sistemas.

La propiedad de hiperbolicidad de un punto de equilibrio es una propiedad genérica. Es sencillo comprobar que, dado cualquier sistema con un sólo punto de equilibrio no hiperbólico, puede ser aproximado localmente por sistemas donde el punto de equilibrio es hiperbólico, y el caso contrario no puede darse. Los sistemas con un punto de equilibrio hiperbólico representan un conjunto abierto y denso dentro del conjunto de sistemas dinámicos con un sólo punto de equilibrio.

2.4.3 Estabilidad local de órbitas cerradas

En este apartado analizaremos las condiciones de estabilidad y estabilidad estructural local de otro tipo de atractores especiales, las órbitas cerradas, al igual que lo hicimos para los puntos de equilibrio. Recuérdese que, dado un sistema dinámico $\phi(t, x)$, una órbita cualquiera $\{\phi_t(x)\}_{t \in T} \equiv \gamma$ se dice *cerrada* si existe un $\lambda \in T$, $\lambda > 0$ tal que $\phi_{t+\lambda}(x) = \phi_t(x)$. Si además λ es el mínimo elemento positivo de T tal que verifica la propiedad anterior, λ es el *periodo*

de la órbita cerrada. Recuérdese también de la sección 2.2 el concepto de estabilidad de una órbita cerrada. Una órbita cerrada γ es estable si puntos cercanos a γ se mantienen cercanos a γ , y es asintóticamente estable si además estos puntos cercanos se aproximan tanto como queramos a γ .

Para empezar a analizar el comportamiento asintótico de un sistema en torno a una órbita cerrada es necesario tomar primero una *sección local transversal*. Una sección local transversal S de un sistema dinámico cualquiera alrededor de un punto $p \in W$ es un conjunto abierto contenido en un hiperplano H del espacio euclídeo E , o sea, H es un subespacio de E con dimensión una unidad menor que E . Este conjunto S debe estar incluido también en W , contener al punto p y ser *transversal* al flujo. S es un conjunto transversal si, dado $\dot{x} = f(x)$ las ecuaciones diferenciales asociadas al sistema, necesariamente $f(x) \notin H, \forall x \in S$ (ver figura 2.5).

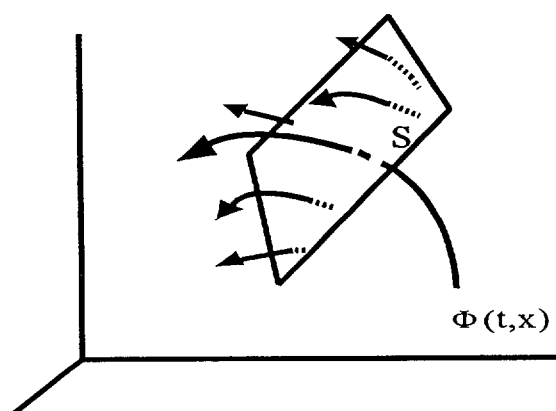


Figura 2.5: Sección local transversal de un sistema dinámico.

Dado un sistema dinámico que admite una órbita cerrada γ de periodo λ , y $p \in \gamma$ cualquiera (necesariamente $\phi_\lambda(p) = p$). Sea S una sección local transversal del sistema dinámico en p . Se demuestra que $\exists U_p$ entorno de p y

$\exists \tau : U_p \mapsto \mathbb{R}$, $\tau \in C^1$, tal que $\phi_{\tau(x)}(x) \in S$. Entonces, tomando $S_0 = S \cap U_p$, podemos definir la siguiente función de clase C^1 :

$$\begin{aligned} g : S_0 &\longrightarrow S \\ x &\longrightarrow \phi_{\tau(x)}(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

A esta función se le llama *función de Poincaré* del sistema dinámico $\phi(t, x)$ en torno al punto p . Esta función induce un sistema dinámico discreto en S_0 con un punto de equilibrio p . Si el punto de equilibrio para la aplicación de Poincaré es asintóticamente estable, la órbita cerrada va a ser asintóticamente estable, y si es inestable, la órbita cerrada será inestable. Así, por medio de la función de Poincaré, reducimos la estabilidad de una órbita cerrada a la estabilidad de un punto de equilibrio.

La condición de estabilidad para el punto de equilibrio de una función g discreta es que los valores propios de la diferencial $Dg(p)$ sean, en norma, menores que uno. Estamos, entonces, en condiciones de enunciar un resultado general sobre la estabilidad de las órbitas cerradas:

Teorema 4 *Sea γ una órbita cerrada de un sistema dinámico $\phi(t, x)$ con periodo λ . Dado un punto $p \in \gamma$, si la diferencial $D\phi_\lambda(p)$ tiene todos los valores propios menos uno menores que uno en norma, entonces γ es un atractor.*

Este teorema se basa en que la diferencial $Dg(p) = D\phi_\lambda(p)|_H$. Uno de los valores propios de la diferencial $D\phi_\lambda(p)$ es siempre igual a uno, ya que siempre se verifica que $D\phi_\lambda(p)(f(p)) = f(p)$, para cualquier $p \in \gamma$. Si el resto tienen norma menor que uno, la órbita cerrada será un atractor. Se dice también que γ es un atractor periódico.

En caso de que alguno de los valores propios de $D\phi_\lambda(p)$ fuera mayor que uno en norma, γ ya no sería un atractor periódico. Este comportamiento es muy similar al de los puntos de equilibrios x^* con respecto a los valores propios

de la diferencial $Df(x^*)$. De hecho, una órbita periódica se dice *hiperbólica* si todos los valores propios menos uno de la diferencial $D\phi_\lambda(p)$, para $p \in \gamma$ cualquiera, son distintos de uno en norma. Al igual que con los puntos de equilibrio, se demuestra que las órbitas cerradas hiperbólicas son localmente estructuralmente estables. Esto quiere decir que si un sistema posee una órbita cerrada hiperbólica, las variaciones suficientemente pequeñas de este sistema también poseen una órbita cerrada hiperbólica y con el mismo carácter. Si en el sistema original la órbita era un atractor periódico, en el perturbado también. Cualquier otro comportamiento cualitativo de las órbitas cerradas hiperbólicas también se mantiene. Además, la hiperbolicidad de las órbitas cerradas es una propiedad genérica, con lo que podemos entonces desechar el resto de las posibilidades.

Los resultados sobre estabilidad estructural que hasta ahora hemos presentado se refieren a comportamientos locales del sistema en torno a puntos de equilibrio u órbitas cerradas. La búsqueda de conjuntos de sistemas estructuralmente estables que sean, a su vez, una propiedad genérica a nivel global ha sido fuente de numerosos trabajos a lo largo de las décadas. Desgraciadamente, la estabilidad estructural no es una propiedad genérica para los sistemas dinámicos en general, pero se han obtenido muchos resultados al respecto. Presentar estos resultados en toda su extensión suponen un alejamiento de los objetivos de este trabajo. No obstante, a continuación vamos a enunciar uno que se deduce directamente de teoremas generales de estabilidad estructural y que pueden ser encontrados en Broer et al. (1991). Este teorema nos va a servir de utilidad en el análisis que vamos a llevar a cabo en el capítulo III.

Teorema 5 *Un sistema dinámico (W, T, ϕ) , con $W \subseteq \mathbb{R}^2$, tal que admite un único punto de equilibrio hiperbólico y asintóticamente estable es estructuralmente estable.*

2.5 Sistemas planos. Teorema de Poincaré-Bendixon

El estudio del comportamiento local en torno a puntos de equilibrio u órbitas cerradas, lógicamente, no es suficiente para conocer en su totalidad el comportamiento cualitativo de un sistema, ya que el mismo puede exhibir conjuntos límites más complejos fuera de la cuenca de atracción de los puntos de equilibrio u órbitas cerradas. De hecho, el estudio global de un sistema puede llegar a ser una tarea casi imposible de realizar. En esta sección, presentaremos varios resultados que ayudan a estudiar el comportamiento global de una clase especial de sistemas, los sistemas dinámicos planos, que son aquellos donde el espacio de estados está definido en \mathbb{R}^2 . Este tipo de sistemas presentan ciertas limitaciones en las posibles estructuras de sus conjuntos límites, que hacen más sencillo su análisis.

En general, vamos a describir un sistema dinámico plano por medio de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= g(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

con $x \equiv (x_1, x_2) \in W \subseteq \mathbb{R}^2$, f y g funciones de clase C^1 .

Recordamos de la sección 2.2 el concepto de conjunto ω -límite de un punto x cualquiera, $L_\omega(x)$, respectivamente α -límite, $L_\alpha(x)$, que es el conjunto de puntos que son límite de trayectorias $\phi_{t_n}(x)$ cuando $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, respectivamente $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Hemos visto en la sección 2.2 que los conjuntos límites de un sistema dinámico cualquiera y, por tanto, los atractores, pueden tener formas muy complicadas. Cuando nos encontramos con un sistema como 2.12, estos conjuntos límites no pueden describir cualquier forma. Esta restricción viene determinada por el siguiente teorema:

Teorema 6 (Poincaré-Bendixon) *Un conjunto límite compacto no vacío de un sistema dinámico plano que no contiene puntos de equilibrio es una órbita cerrada.*

Este célebre teorema indica que, en el plano, los posibles conjuntos α u ω -límite cerrados y acotados han de ser o puntos de equilibrio, u órbitas cerradas, o combinaciones entre ellos. Las estructuras que obteníamos mediante el atractor de Lorenz (figura 2.1) son imposibles en este tipo de sistemas. El teorema es, por tanto, muy útil para el descubrimiento de la existencia o no existencia de ciclos límites en sistemas planos, al utilizarlo junto con otros resultados que a continuación presentamos:

Proposición 1 *Son ciertos los dos siguientes resultados:*

- *Sea un sistema dinámico cualquiera y un conjunto $D \subseteq W$ cerrado y positivamente invariante. Entonces, $\forall x \in D, L_\omega(x) \subseteq D$.*
- *Sea un sistema dinámico cualquiera y un conjunto $D \subseteq W$ cerrado y negativamente invariante. Entonces, $\forall x \in D, L_\alpha(x) \subseteq D$.*

Combinando este resultado con el teorema de Poincaré-Bendixon podemos deducir este otro teorema:

Teorema 7 *En un sistema dinámico plano, un conjunto cerrado y acotado Γ positiva o negativamente invariante ha de tener necesariamente o un punto de equilibrio o un ciclo límite.*

Entonces, si se sabe que este conjunto Γ no contiene ningún punto de equilibrio, necesariamente ha de incluir un ciclo límite. Si el conjunto es positivamente invariante, el ciclo límite es ω -límite, si es negativamente invariante, el ciclo límite es α -límite. Se demuestra (ver Hirsch y Smale 1974) que un ciclo ω -límite es necesariamente estable localmente y un ciclo α -límite es necesariamente inestable. Dicho de otra manera, si un conjunto Γ en las

condiciones del teorema 7 no contiene puntos de equilibrio, ha de contener un atractor o un repulsor del sistema en forma de órbita cerrada.

El siguiente teorema es consecuencia directa del anterior:

Teorema 8 *En un sistema dinámico plano, toda órbita cerrada ha de incluir, necesariamente, un punto de equilibrio en el dominio acotado interior de dicha órbita.*

El teorema de Poincaré-Bendixon, utilizado junto con estos últimos teoremas, es de extrema utilidad para el descubrimiento de ciclos límites y su carácter en sistemas dinámicos planos. De hecho, estos resultados van a constituir los principales argumentos que utilizaremos en el análisis del siguiente capítulo.

2.6 Bifurcaciones

En la mayoría de los sistemas dinámicos que estudian fenómenos reales, y los que vamos a introducir no son una excepción, el comportamiento de los mismos no está determinado únicamente por la expresión de las relaciones entre las variables que lo definen y sus condiciones iniciales, sino también por ciertos parámetros exógenos cuyo valor exacto se desconoce. Estos parámetros pueden influir en el desarrollo del modelo, de manera que el comportamiento cualitativo del mismo puede diferir enormemente para un valor del parámetro o para otro. Formulando estas apreciaciones más formalmente, si nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciales definido en la variable $x \in W \subseteq E$, espacio vectorial euclídeo que podemos considerar como \mathbb{R}^n , incorporáramos en estas ecuaciones una dependencia con respecto a un cierto parámetro $\mu \in \mathbb{R}^m$. De esta manera, el sistema tendría la forma siguiente:

$$\dot{x} = f(\mu, x) \tag{2.13}$$

con $f : \mathbb{R}^m \times W \mapsto E$ una función de clase C^1 .

El parámetro μ puede influir en el desarrollo del modelo. Diremos que el sistema 2.13 presenta una *bifurcación* si el comportamiento cualitativo del sistema se modifica cuando variamos los valores del parámetro μ . Se dice, entonces, que un punto $\mu = \mu^*$ es un *punto de bifurcación* si, para cualquier entorno de ese punto, existen valores del parámetro para los cuales el comportamiento dinámico del sistema es diferente del comportamiento dinámico para otros valores dentro de ese mismo entorno. Al decir comportamiento dinámico diferente nos referimos a que los sistemas no son conjugados. Por ejemplo, un punto de equilibrio que es estable para ciertos valores de μ puede ser inestable para otros, o pueden surgir nuevos atractores que no aparecían en otras situaciones, etc. Lógicamente, es necesario, para que se de esta circunstancia, que en un punto de bifurcación μ^* el sistema no sea estructuralmente estable.

Las bifurcaciones son un hecho muy común en cualquier modelo que intenta explicar un fenómeno real. La percepción de la realidad sobre la que se construye el modelo se basa en teorías de dependencia entre las variables que influyen en un fenómeno. Es natural que esta dependencia se fundamente en relaciones matemáticas entre estas variables, para las cuales no conocemos la forma exacta. Por medio de la introducción de parámetros ampliamos el rango de funciones que pueden ser válidas para explicar el fenómeno. Estudiar las situaciones en las cuales el comportamiento sufre un salto cualitativo, al modificar los parámetros, puede darnos información útil de la posible evolución de un sistema real. Esta circunstancia se presentaba ya en los primeros modelos de tipo económico. Por citar algunos ejemplos, en el modelo de Samuelson en 1939, las variables dependían del valor de dos parámetros que eran el multiplicador de consumo y otro que representaba la magnitud del acelerador de inversión. Según el valor de estos parámetros, el comportamiento del

sistema era completamente diferente (ver Chiang 1987). Lo mismo ocurre con otros modelos clásicos, como el de Hicks, Solow, etc. En los modelos actuales que admiten comportamientos más complejos, las bifurcaciones son un punto básico de estudio, como Benhabib y Miyao (1981), Sterman y Mosekilde (1993).

Las múltiples bifurcaciones que se pueden presentar en los sistemas dinámicos las podemos englobar en ciertas clases o tipos. No es el objetivo de esta sección analizar todos los tipos posibles de bifurcaciones estudiados en sus casos más complejos, sino dar una introducción somera de los más sencillos, con algunos ejemplos que ayuden a comprender estas situaciones para poder localizarlas en los modelos que vamos a estudiar en capítulos posteriores. Estas bifurcaciones van a estar referidas a variaciones del comportamiento del sistema en un entorno de un conjunto límite, llamadas *bifurcaciones locales*. Entre estas bifurcaciones, nos quedaremos con las que estudian los saltos cualitativos del comportamiento de conjuntos límites del tipo punto de equilibrio u órbita cerrada. Existen otras muchas clases de bifurcaciones que pueden ser analizadas en literatura especializada (Guckenheimer y Holmes 1983).

2.6.1 Bifurcaciones de punto de silla y de Hopf

Vamos a analizar uno de los tipos de bifurcación que se produce en un sistema debido a un cambio de carácter de un punto de equilibrio. Por simplicidad, vamos a situarnos en un ejemplo concreto que nos va a servir como modelo de este tipo de bifurcación. Sea el sistema:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (2.14)$$

donde $x, \mu \in \mathbb{R}$. Es obvio que este sistema, para valores de $\mu < 0$, no posee ningún punto de equilibrio real. En cambio, para valores de $\mu > 0$, existen dos puntos de equilibrio situados en $\mu^{1/2}$ y $-\mu^{1/2}$. Es sencillo también demostrar

que $\mu^{1/2}$ es inestable $-\mu^{1/2}$ es asintóticamente estable. Entonces, al pasar el parámetro del valor $\mu < 0$ al valor $\mu > 0$, de un comportamiento sin puntos de equilibrio obtenemos otro con dos puntos de equilibrio, uno de ellos estable y otro inestable. Según los conceptos que hemos introducido anteriormente, $\mu_0 = 0$ es un punto de bifurcación, con lo que necesariamente en esta situación el sistema no es estable estructuralmente. Efectivamente, el valor propio de la diferencial de la función f en el punto crítico $x^*(\mu)$, correspondiente a un valor del parámetro μ , es nulo en $\mu_0 = 0$, con lo que $x^*(0)$ no es un punto de equilibrio hiperbólico, que es una condición necesaria y suficiente de inestabilidad estructural local de un punto de equilibrio.

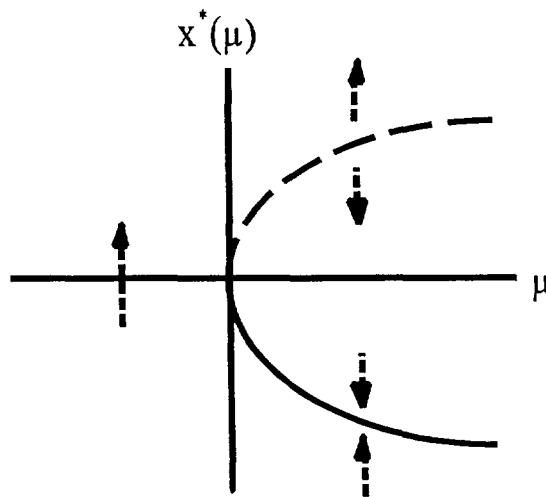


Figura 2.6: Bifurcación de punto de silla. Diagrama de bifurcación.

Podemos representar gráficamente esta bifurcación mediante un diagrama, llamado *diagrama de bifurcación*, que relaciona el valor del parámetro μ con el valor de los puntos de equilibrio del sistema correspondiente a ese parámetro $x^*(\mu)$, indicando la estabilidad o inestabilidad de ese punto de equilibrio por medio de líneas continuas o punteadas, respectivamente, como en la figura 2.6. A este tipo de bifurcación se le llama *bifurcación de punto de silla*.

Podemos obtener un resultado general con el que se garantiza la existencia de bifurcaciones de este tipo (ver Lorenz 1993). Vamos a suponer que disponemos de una ecuación diferencial en una variable con la dependencia de un parámetro real. O sea:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad (2.15)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Además la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(\mu, x) \equiv f_{\mu}(x)$, $\forall x, \mu \in \mathbb{R}$, es de clase C^{∞} . Entonces, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 9 *Dado un sistema como 2.15, y sea x^* un punto de equilibrio de este sistema para un valor del parámetro μ_0 en las siguientes condiciones:*

- $\frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0, x^*) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_0, x^*) \neq 0$
- $\frac{\partial f}{\partial \mu}(\mu_0, x^*) \neq 0$

entonces, dependiendo de los signos de las dos derivadas parciales últimas, se verifica que no existen puntos de equilibrio del sistema para puntos cercanos a x^ , con $\mu < \mu_0$ ($\mu > \mu_0$) y existen dos puntos de equilibrio del sistema cercanos a x^* , con $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$)*

El teorema indica entonces que, dadas las hipótesis señaladas, el diagrama de bifurcación es el mismo que en la figura 2.6, o cambiando la dirección de la bifurcación.

En general, se verifica que el conjunto de sistemas de una variable y un parámetro con un punto de equilibrio no hiperbólico, y cumpliendo las mismas hipótesis que el teorema 9, es abierto y denso en el conjunto de sistemas de una variable con un punto de equilibrio no hiperbólico, con lo que esta propiedad es genérica. Esto no quiere decir que otro tipo de bifurcaciones no sea relevante, pues podemos tener unas circunstancias particulares en nuestro sistema real de

tal forma que no se verifique alguna de las dos últimas hipótesis del teorema 9. En este caso, obtenemos un sistema real que se encuentra fuera de ese abierto y denso del conjunto de sistemas con punto de equilibrio con valor propio nulo. Para ver un desarrollo teórico de estos otros tipos de bifurcaciones y sus aplicaciones a modelos económicos, algunos de ellos tan conocidos como el de Solow o Kaldor, ver Lorenz (1993).

Vamos a considerar ahora otro tipo de bifurcación local, muy común entre los sistemas dinámicos, y que surge en puntos de equilibrio no hiperbólicos pero con valor propio no nulo, sino complejo y con parte real nula. O sea, el valor propio $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, y $Re(\lambda) = 0$. Como los valores propios complejos incluyen sus conjugados, es necesario introducir al menos un sistema de dimensión dos en que se verifique esta situación. Entonces, sea:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_{\mu}(x, y) \\ \dot{y} &= g_{\mu}(x, y)\end{aligned}\tag{2.16}$$

un sistema de dimensión dos con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ y tal que la función definida de la forma $h_{\mu}(x, y) \equiv (f_{\mu}(x, y), g_{\mu}(x, y))$ es de clase C^{∞} . Estamos en disposición de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 10 (Hopf) *Sea μ_0 un valor del parámetro μ , (x^*, y^*) un punto de equilibrio del sistema 2.16 con $\mu = \mu_0$. Sean λ_1, λ_2 valores propios de $Dh(x^*, y^*)$, $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$. Entonces, dadas unas condiciones sobre la derivada de h con respecto a μ en el punto de equilibrio (x^*, y^*) , el sistema admite una bifurcación en el punto μ_0 , de manera que, a un lado de este valor, el sistema posee una órbita cerrada y, al otro lado, pierde esta órbita cerrada.*

A este tipo de bifurcación se le llama *bifurcación de Hopf*. La bifurcación de Hopf puede ser de dos tipos, *subcrítica*, que es aquella en la cual, a un lado del valor μ_0 , el sistema admite un punto de equilibrio estable y una órbita cerrada que es inestable, y al otro lado de μ_0 , desaparece la órbita cerrada y

se pierde la estabilidad de este punto de equilibrio (ver figura 2.7). El otro tipo de bifurcación se llama *supercrítica*, que es aquella donde, a un lado de μ_0 , el punto de equilibrio es estable y no admite ninguna órbita cerrada, y a otro lado de μ_0 , el punto de equilibrio pierde la estabilidad y aparece un ciclo límite estable (ver figura 2.7).

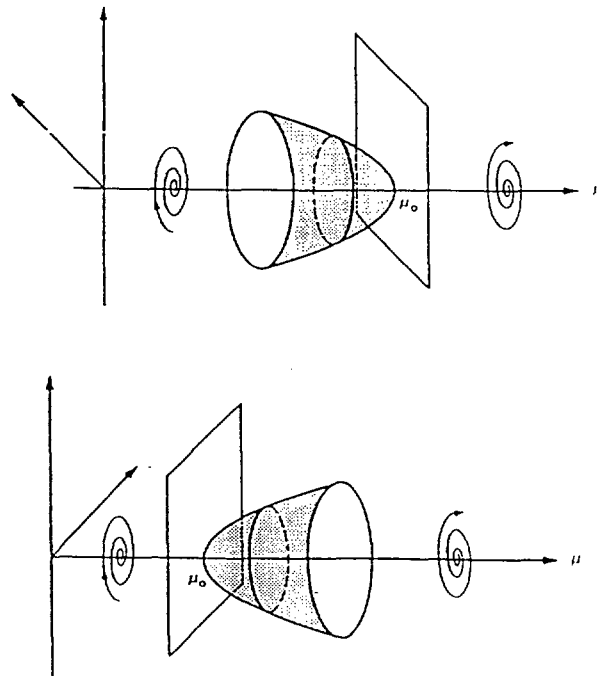


Figura 2.7: Bifurcaciones de Hopf. Arriba: Bifurcación subcrítica. Abajo: Bifurcación supercrítica. Fuente: Lorenz (1993).

En general, no es fácil descubrir cuándo nos encontramos con una bifurcación subcrítica o supercrítica. Para un método general, ver Guckenheimer y Holmes (1983). Las bifurcaciones de Hopf han sido estudiadas en varios modelos de tipo económico, modificaciones de algunos de los cuales vamos a introducir en este trabajo (Benhabib y Miyao 1981, Zhang 1990).

En caso de que nos encontremos con un sistema definido en un espacio euclídeo E de dimensión mayor que uno, los resultados sobre puntos de bifurcación para dimensión uno y sobre bifurcaciones de Hopf se pueden ampliar a estos sistemas haciendo uso del llamado Teorema de la Variedad Central (Broer et al. 1991). Este teorema permite identificar localmente la dinámica de un sistema por la dinámica de este mismo sistema restringido a una variedad de dimensión menor, definida a través de los valores propios con parte real nula. Así, los resultados obtenidos para sistemas con dimensión uno o dos se mantienen para sistemas de mayor dimensión.

2.6.2 Bifurcaciones en sistemas dinámicos en tiempo discreto

Al igual que los sistemas dinámicos en tiempo continuo, los sistemas dinámicos en tiempo discreto también pueden manifestar bifurcaciones para ciertos valores de parámetros. En el caso más sencillo, el sistema está formado por una función $f_\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^∞ que define una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{t+1} = f_\mu(x_t) \quad (2.17)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro real que gobierna el sistema. Los puntos de equilibrio en este tipo de sistemas son los puntos x^* que verifican $f_\mu(x^*) = x^*$. En este caso, las situaciones estructuralmente inestables son aquellas en las que el valor propio, λ , de la diferencial de la función f en x^* , $Df(x^*)$, es igual en norma a uno, o sea, $|\lambda| = 1$. Por tanto, en sistemas discretos, el punto de equilibrio no hiperbólico se define cuando $|\lambda| = 1$. Entonces, utilizando las mismas hipótesis que imponíamos sobre los sistemas continuos en un punto de equilibrio no hiperbólico, obtenemos los mismos tipos de bifurcaciones para sistemas discretos. Así, podemos obtener, en sistemas discretos, bifurcaciones de punto de silla, donde de una situación de no existencia de puntos de

equilibrio en el sistema para un cierto $\mu < \mu_0$, pasamos a una situación de dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable, para $\mu > \mu_0$. También existe una extensión del teorema de bifurcación de Hopf para el caso de sistemas discretos.

Si la función que define el sistema dinámico discreto es un difeomorfismo, o sea, una función diferenciable donde existe la inversa y también es diferenciable, podemos construir un sistema dinámico continuo a partir de este sistema discreto, haciendo el proceso inverso al que utilizábamos para obtener la función de Poincaré. Así, si en general disponemos de un difeomorfismo $f : W \subseteq E \mapsto E$, donde E es un espacio vectorial de dimensión n , podemos construir un sistema dinámico continuo $\phi_t(x, \varphi)$ con $x \in W$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, definido en la variedad resultante de identificar los puntos $(x, 0)$ con $(f(x), 2\pi)$, de la siguiente manera:

$$\phi_t(x, \varphi) = (f^k(x), (t + \varphi) \bmod 2\pi), \quad \forall x \in W, \forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad (2.18)$$

donde k es el número de múltiplos de 2π entre 0 y $t + \varphi$. Se puede demostrar que $f(x)$ es la función de Poincaré para este sistema tomando una adecuada sección local. Al sistema dinámico $\phi(t, \varphi)$ definido de esta forma se llama *suspensión* del difeomorfismo $f : W \mapsto E$.

Entonces, todo sistema dinámico discreto definido por un difeomorfismo puede suspenderse a un sistema dinámico en tiempo continuo, por lo que las bifurcaciones que el difeomorfismo manifieste se traducirán en nuevos tipos de bifurcaciones para la suspensión. Por tanto, si un sistema dinámico discreto manifiesta una bifurcación de punto de silla, el sistema dinámico inducido por la suspensión también manifestará una bifurcación, que consiste en la aparición de dos órbitas cerradas, una estable y otra inestable, antes inexistentes, cuando el valor del parámetro atraviese el punto de bifurcación.

Por último, existe un tipo de bifurcación importante en sistemas dinámicos en tiempo discreto, cuya traducción al sistema suspendido es útil para los siguientes capítulos. Es la bifurcación de *desdoblamiento de periodo*. Esta bifurcación está asociada a puntos de equilibrio de sistemas discretos con valor propio asociado igual a -1 en valores del parámetro $\mu = \mu_0$, para los cuales, si el valor del parámetro atraviesa este umbral μ_0 , un punto de equilibrio inicialmente estable pierde esa estabilidad y aparecen otros dos puntos de periodo dos que son estables (ver figura 2.8). No se trata, por tanto, de que un punto de equilibrio $x^*(\mu)$, o sea, con $f(x^*(\mu)) = x^*(\mu)$, se bifurque obteniendo otros dos puntos de equilibrio, sino que aparecen, para valores mayores que μ_0 , dos puntos $x_1^*(\mu)$, $x_2^*(\mu)$ periódicos de periodo dos, $f \circ f(x_1^*(\mu)) = f^2(x_1^*(\mu)) = x_1^*(\mu)$ y $f \circ f(x_2^*(\mu)) = f^2(x_2^*(\mu)) = x_2^*(\mu)$, que son estables.

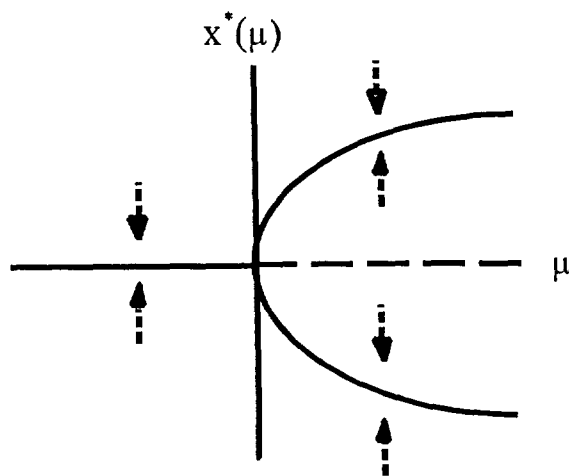


Figura 2.8: Bifurcación de desdoblamiento de periodo. Diagrama de bifurcación. En la gráfica, $\mu_0 = 0$.

La suspensión de un difeomorfismo exhibiendo una bifurcación de desdoblamiento de periodo no es posible representarla en el plano, ya que la identificación $(x, 0)$ con $(f(x), 2\pi)$ hace que el plano se retuerza, debido a

que la dirección está gobernada por el valor propio -1 . La bifurcación que se produce ha de representarse en un espacio con dimensión $n \geq 3$. El atractor para valores de μ menores que el umbral μ_0 es una órbita cerrada estable que se bifurca, al pasar por μ_0 , en dos órbitas estables que contienen dos tirabuzones cada una, de manera que cada órbita pasa dos veces por la sección local a partir de la cual hemos suspendido el difeomorfismo antes de completar una órbita cerrada completa. Como puede comprobarse, la representación gráfica de tal bifurcación no es sencilla.

Las bifurcaciones que hemos visto para sistemas discretos con una o dos dimensiones pueden generalizarse también a más dimensiones haciendo uso del Teorema de la Variedad Central, al igual que lo hacíamos en el caso de sistemas dinámicos continuos.

2.6.3 Bifurcaciones sucesivas

Una de las formas de generar estructuras caóticas en sistemas dinámicos es a través de bifurcaciones sucesivas, en las que van apareciendo atractores cada vez más complejos hasta llegar a comportamientos caóticos. Estas "rutas" hacia el caos son muy comunes en modelos que explican fenómenos naturales, y van a presentarse en los que vamos a trabajar posteriormente.

Bifurcaciones sucesivas de desdoblamiento de periodo es una de estas rutas hacia el caos. La función logística, definida por la ecuación:

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t), \quad (2.19)$$

con $x_t \in [0, 1]$, es un ejemplo clásico que presenta este tipo de bifurcaciones en serie. Se puede demostrar que el valor de $\mu_1 = 3$ es un punto de bifurcación de desdoblamiento de periodo, pasando el sistema de tener un punto de equilibrio estable a tener un punto fijo inestable y dos órbitas periódicas de periodo

dos estables. Sucesivamente, van apareciendo nuevos puntos de bifurcación μ_2, μ_3, μ_4 ($\mu_2 < \mu_3 < \mu_4$), a partir de los cuales surgen órbitas periódicas estables de periodo 4, 8, 16 respectivamente. En general, podemos notar como μ_n ($\mu_{n-1} < \mu_n, \forall n \in \mathbb{N}$) el punto de bifurcación a partir del cual obtenemos órbitas de periodo 2^n . Se demuestra que esta sucesión de puntos de bifurcación tiene un límite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \approx 3.5699$. Existen valores de μ más allá de este límite para los cuales aparecen órbitas de periodo tres, órbitas cuasiperiódicas y comportamientos caóticos. El diagrama de bifurcación puede ser observado en la figura 2.9. Las franjas verticales limpias indican intervalos de valores del parámetro μ para los cuales existen órbitas periódicas estables de bajo periodo.

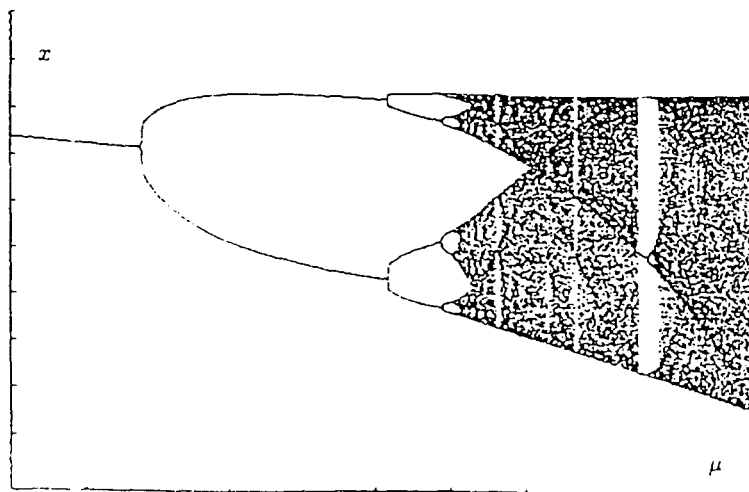


Figura 2.9: Bifurcaciones sucesivas de desdoblamiento de periodo. Ruta Feigenbaum hacia al caos. Fuente: Broer et al. (1991).

Feigenbaum (1978), en un estudio hecho para la función logística, descubrió ciertas constantes que relacionan los sucesivos puntos de bifurcación $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la ecuación logística, y demostró que esta ruta hacia el caos, llamada *ruta Feigenbaum*, se verifica para un amplio conjunto de sistemas

dinámicos conjugados con la función logística. De hecho, este tipo de diagramas de bifurcación suele ser muy común en los modelos. Para una revisión de algunos de ellos, ver Schuster (1989), Jackson (1991). Como una de las primeras aplicaciones a la Economía, podemos mencionar el trabajo de Day (1982), en el que se estudian condiciones para la aparición de comportamientos caóticos en un modelo neoclásico de crecimiento.

Otro tipo de ruta hacia el caos es a través de sucesivas bifurcaciones de Hopf. Podemos describir este tipo de bifurcación a partir de un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_\mu^1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dot{x}_2 &= f_\mu^2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\dots \\ \dot{x}_m &= f_\mu^m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, y las funciones f_μ^i son todas de clase C^∞ . Supongamos que, para cualquier valor $\mu < \mu^1$, el sistema admite un punto de equilibrio estable, y en $\mu = \mu^1$ el sistema admite una bifurcación de Hopf para las variables x_1 , con lo que el atractor del sistema sería una órbita cerrada. Podemos suponer que esta situación se mantiene para $\mu^1 < \mu < \mu^2$, y, en μ^2 , el sistema admite otra bifurcación de Hopf donde las variables que manifiestan un punto de equilibrio con valores propios asociados con parte real nula están dentro de x_2 . Entonces, el atractor del sistema en esta situación se representa en el producto cartesiano de dos circunferencias S^1 , en lo que se denomina un toro de dimensión dos $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ (ver gráfica 2.10)⁵. Este atractor es la combinación de dos órbitas correspondientes a las variables x_1 y x_2 .

⁵El conjunto S^1 representa una circunferencia. Esta se puede definir a través del espacio topológico cociente $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, que es un conjunto idéntico al intervalo $[0, 2\pi]$, identificando 0 con 2π . En general, un toro de dimensión n es el producto cartesiano de n circunferencias. Así, $\mathbb{T}^n \equiv S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, que es homeomorfo al conjunto cociente $\frac{\mathbb{R}^n}{(2\pi\mathbb{Z})^n}$.

Este proceso puede seguir, de manera que se producen sucesivas bifurcaciones de Hopf en el resto de las variables. La combinación de estas sucesivas órbitas cerradas puede producir un comportamiento complejo de las variables. Landau en 1944 propuso una explicación a este comportamiento, basada en la complejidad intrínseca de la evolución de tres o más órbitas encerradas en un toro. Según este planteamiento, a medida que incrementamos las bifurcaciones de Hopf, la complejidad va aumentando, pero siempre el comportamiento del sistema está situado en un toro de dimensión igual al número de bifurcaciones producidas. Sin embargo, Ruelle, Takens y Newhouse en 1978 demostraron que, a partir de la tercera bifurcación de Hopf, el comportamiento en el toro es muy inestable, pudiendo aparecer atractores extraños. Este hecho está relacionado a la inestabilidad del comportamiento, bajo pequeñas perturbaciones, de dos osciladores emparejados, que veremos en la próxima sección.

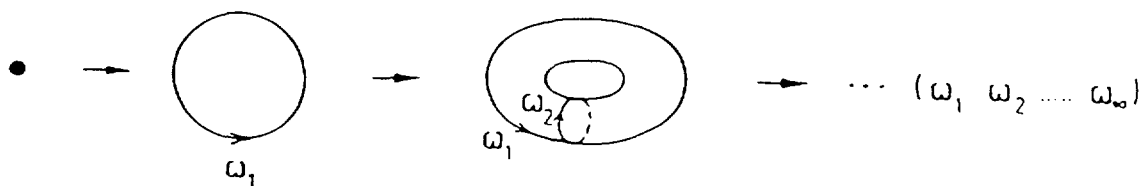


Figura 2.10: Bifurcaciones sucesivas de Hopf. Los parámetros ω_i , $i \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, representan las frecuencias de las oscilaciones. Fuente: Schuster (1989).

Estas rutas hacia el caos tienen muchos ejemplos en modelos que tratan

de explicar fenómenos naturales. Para una amplia muestra de estos sistemas aplicados y sus fundamentos teóricos, nos referimos al trabajo de Schuster (1989) y Jackson (1991).

2.7 Acoplamiento de osciladores

Recuérdese que por oscilador entendemos un sistema dinámico que admite, salvo situaciones muy particulares, una órbita cerrada como único atractor. En esta sección vamos a suponer que disponemos de dos osciladores con, inicialmente, amplitud y periodo diferentes. Estudiaremos el comportamiento que se produce en el sistema formado por estos dos osciladores cuando los emparejamos por medio de relaciones no lineales.

El comportamiento que manifiesta un sistema no lineal de osciladores emparejados puede ser muy complejo, llegando incluso a presentar, en algunos casos, atractores extraños. Sin embargo, entre estos posibles comportamientos hay uno que se presenta con bastante frecuencia en la naturaleza, el llamado *acoplamiento o mode-locking*. Como ya comentamos en la sección 1.4, el acoplamiento se produce cuando la forma de relacionar no linealmente dos osciladores hace que, asintóticamente, acoplen sus fases y frecuencias a una tasa racional. El conjunto límite del sistema estaría formado, entonces, por dos órbitas cerradas combinadas de tal manera, que por cada m oscilaciones de una de las órbitas, la otra produce n oscilaciones, con m, n dos números naturales. En este caso, se dice que se ha producido un acoplamiento del tipo $m : n$. El objetivo de esta sección es, por tanto, presentar el planteamiento y resultados del fenómeno de acoplamiento de osciladores desde el punto de vista de la Matemática.

Ya hemos revisado en la sección 1.4 algunos de los múltiples ejemplos

que tiene este fenómeno en la naturaleza, desde las primeras observaciones hechas por Huygens en el siglo XVII. Desde el punto de vista de la Economía, este fenómeno pudiera ser una buena explicación de los pocos modos cíclicos persistentes que se han manifestado a lo largo de la historia, y una explicación también a las observaciones de relaciones entre modos cíclicos diferentes hechas en ciertos trabajos recientes (Mosekilde et al. 1992, 1993a Sterman y Mosekilde 1993). Un modelo (Kampmann et al. 1994) que intenta dar respuesta a estas evidencias se ha citado someramente en el capítulo I, y en los siguientes capítulos expondremos estudios más específicos del mismo y ampliaciones incorporando nuevos factores.

2.7.1 Desarrollo teórico

Formalizando las ideas arriba señaladas, vamos a suponer que disponemos inicialmente de dos osciladores, que, expresados en forma de ecuaciones diferenciales, son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $m_1, m_2 \geq 2$. Como puede observarse, estos osciladores están desacoplados, o sea, son completamente independientes el uno del otro. Notemos por $\phi_1(t, x_1)$, $\phi_2(t, x_2)$, el flujo asociado al primer y segundo sistema de ecuaciones diferenciales, respectivamente. Estos flujos ϕ_1 , ϕ_2 , admiten entonces un ciclo límite como único atractor, salvo situaciones muy particulares que podemos despreciar.

El comportamiento asintótico del sistema 2.21 ha, necesariamente, de inscribirse en un toro de dimensión dos, \mathbb{T}^2 , formado por los ciclos límites de los osciladores, como en la figura 2.11. Las trayectorias de un sistema dinámico en un toro de dimensión dos están unívocamente determinadas por dos direcciones, φ_1, φ_2 , con $\varphi_i \in \frac{\mathbb{R}}{(2\pi\mathbb{Z})}$, $i \in \{1, 2\}$. Entonces, la restricción

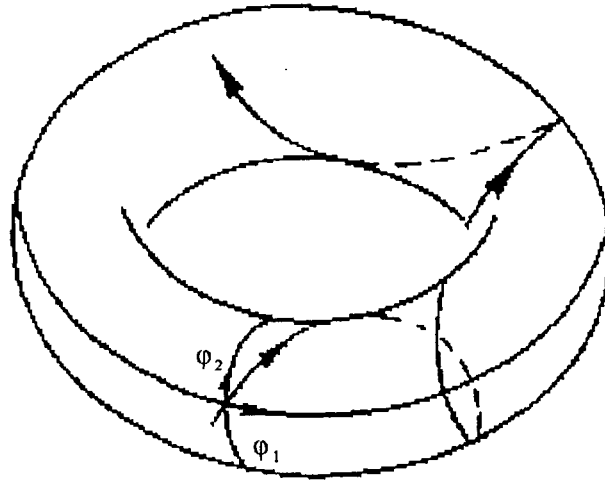


Figura 2.11: Atractor toroidal formado por los ciclos límites de los sistemas correspondientes a las variables φ_1 y φ_2 . Fuente: Broer et al. (1991).

de cada uno de los sistema ϕ_i sobre el toro, $\phi_i | \mathbb{T}^2$, es conjugada al sistema $\dot{\varphi}_i = \omega_i$, $i \in \{1, 2\}$, siendo ω_i la frecuencia del ciclo límite asociado a ϕ_i . Así, para estudiar el comportamiento del atractor toroidal del sistema 2.21, nos basta estudiar el comportamiento del sistema siguiente inscrito en el toro:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2\end{aligned}\tag{2.22}$$

La evolución de este sistema desacoplado depende del valor que adquiera el cociente de sus frecuencias $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ (ver Arnol'd 1992). Puede ser de dos tipos:

- *Cuasiperiódica*, si las frecuencias son inconmensurables ($\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). La trayectoria es un conjunto denso en el toro (figura 2.12a)
- *Resonante*, si las frecuencias son conmensurables ($\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$). En este caso, la trayectoria forma una órbita cerrada dentro del toro (figura 2.12b)



Figura 2.12: Evolución de un sistema formado por dos osciladores desacoplados: a) Comportamiento cuasiperiódico, $(\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; b) Comportamiento resonante, $(\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q})$. Fuente: Lorenz (1993).

Entonces, si el sistema emparejado de dos osciladores está desacoplado, la evolución del mismo depende exclusivamente de las frecuencias ω_1 y ω_2 . Sin embargo, al considerar los osciladores emparejados entre sí por medio de funciones no lineales, la evolución del sistema pudiera modificarse esencialmente. Podemos, sin que suponga una restricción, considerar el emparejamiento no lineal como una perturbación del sistema desacoplado. Así, en este caso, disponemos del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + \delta h_1(x_1, x_2, \delta) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) + \delta h_2(x_1, x_2, \delta) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde h_1, h_2 son funciones en C^∞ y $\delta > 0$ un parámetro pequeño. Obsérvese que, en el caso $\delta = 0$, obtenemos el sistema desacoplado, que convergerá a un atractor inscrito en el toro formado por la representación conjunta de los dos ciclos límites desacoplados. Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de

este sistema para valores de $\delta > 0$.

Para valores suficientemente pequeños de la perturbación, la variedad toroidal se mantiene invariante, incluyendo el atractor del sistema (ver Broer et al. 1991). Sin embargo, la dinámica dentro del toro puede ser muy diferente a la del caso no perturbado. Para describir mejor el comportamiento del sistema emparejado, haremos uso de la *función de Poincaré* construida a partir de la restricción del sistema a la variedad toroidal. Vamos a definir, primeramente, la sección local como el corte del plano transversal al toro en la dirección de la primera componente φ_1 . O sea, dado $\mathbb{T}^2 \equiv \frac{\mathbb{R}^2}{(2\pi\mathbb{Z})^2}$, sea $S_0 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2 / \varphi_1 = 0\}$, que es una sección local en cero para valores de δ suficientemente pequeños. Es evidente que esta sección local es una circunferencia. Es decir $S_0 \cong \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ (ver figura 2.13). A partir de esta sección local definimos la función de Poincaré para el sistema 2.23, restringido a la variedad toroidal invariante, de la forma:

$$\begin{aligned} g : S_0 &\longrightarrow S_0 \\ \varphi_2 &\longrightarrow \phi_{\tau(\varphi_2)}(0, \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

siendo $\tau(\varphi_2)$ el mínimo tiempo tal que $\phi_{\tau(\varphi_2)}(0, \varphi_2) \in S_0$. O sea, que la función de Poincaré $g(\varphi_2)$ es la función que lleva un punto φ_2 de la circunferencia a otro punto de la circunferencia siguiendo la trayectoria del sistema (ver figura 2.13). Esta función es un difeomorfismo y conserva la orientación. En general, a una función de S^1 en S^1 cumpliendo estas restricciones se le llama *función sobre el círculo*. Por facilidad de notación, identificaremos a partir de ahora $\varphi_2 \equiv \varphi$.

Es fácil comprobar que, para el sistema desacoplado 2.21

$$g(\varphi) = (\varphi + 2\pi\Omega) \text{ mod } 2\pi, \quad \text{con } \Omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.25)$$

A este tipo de función sobre el círculo se le llama *rotación* de ángulo $2\pi\Omega$ de la variable φ . De esta forma también se demuestra que, en el caso de ω_1, ω_2

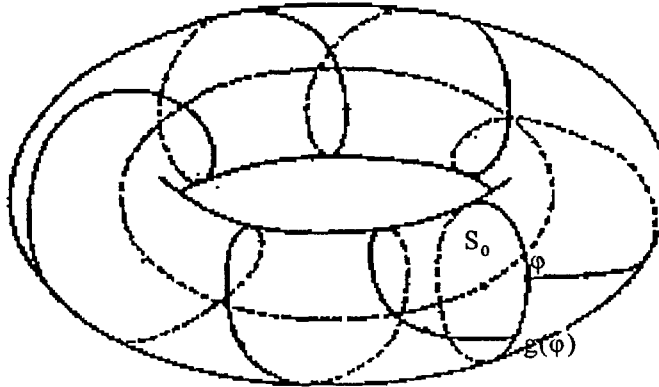


Figura 2.13: Función de Poincaré de un sistema dinámico sobre el toro. Fuente: Arrowsmith y Place 1990.

incommensurables, la órbita de la función $g(\varphi)$, esto es, $\Gamma_g = \{g^n(\varphi) / \varphi \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}, n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ (comportamiento cuasiperiódico). En cambio, si ω_1, ω_2 son commensurables, la órbita Γ_g es cíclica (comportamiento resonante).

Como ya hemos comentado, al perturbar este sistema, aunque para perturbaciones suficientemente pequeñas la variedad toroidal persiste (ver Broer et al. 1991), el comportamiento asintótico en el toro puede sufrir modificaciones. De hecho, la función de Poincaré asociada al sistema 2.23, caso de persistir el comportamiento toroidal, se transforma en una función que adopta la forma:

$$g(\varphi) = (\varphi + 2\pi\Omega + h(\varphi, \varepsilon, \Omega)) \bmod 2\pi \quad (2.26)$$

con $\Omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ y h de clase C^∞ que necesariamente ha de ser periódica, de tal forma que $h(\varphi + 2\pi) = h(\varphi), \forall \varphi \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$. Esta función funciona como una perturbación de la rotación para valores de ε ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varphi, \varepsilon, \Omega) = 0, \forall \varphi, \forall \Omega$).

La función 2.26 describe la evolución de la trayectoria del sistema perturbado en \mathbb{T}^2 . Para analizar cómo evoluciona esta función de Poincaré,

es útil conocer el valor del siguiente límite:

$$\rho(g) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g^{(n)}(\varphi) - \varphi}{n}, \quad \varphi \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \quad (2.27)$$

Este valor $\rho(g)$, llamado *número de rotación*, indica asintóticamente el número de vueltas que describe la órbita de φ_2 por cada vuelta de φ_1 . Por simplicidad, lo notaremos como ρ . Se demuestra que este valor ρ es independiente del punto φ concreto tomado e invariante por conjugación. Es fácilmente comprobable que, para el caso de una función de Poincaré $g(\varphi)$ como 2.25, el valor del número de rotación es $\rho = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, con lo que, efectivamente, indica el número de vueltas que ejecuta φ_2 por cada vuelta de φ_1 .

El valor del número de rotación proporciona un método para averiguar si se ha producido acoplamiento en el sistema o no. Si para el caso perturbado (ecuación 2.26) $\rho = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, el comportamiento del sistema se aproxima a un ciclo en el cual un oscilador completa m vueltas cuando el otro completa n , por lo que se produce entonces el llamado acoplamiento o cierre de modo $m : n$. Si $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el comportamiento asintótico del sistema es similar al comportamiento cuasiperiódico descrito para el sistema desacoplado.

Arnol'd (1965) realizó un estudio exhaustivo sobre la función sobre el círculo en relación con el número de rotación. Definiendo previamente como $C_{\frac{m}{n}}$ el conjunto de perturbaciones h tal que el sistema 2.26 tiene el mismo número de rotación $\frac{m}{n}$, demostró que todos los elementos de este conjunto $C_{\frac{m}{n}}$ son conjugados entre sí y conjugados con la rotación 2.25, para $\Omega = \frac{m}{n}$. Además, $C_{\frac{m}{n}}$ es conexo, pero no abierto, por lo que existen sistemas que manifiestan acoplamiento que se pierde para variaciones tan pequeñas como se quiera. No obstante, existe un amplio subconjunto de $C_{\frac{m}{n}}$ para el cual el acoplamiento se mantiene frente a perturbaciones.

Para el caso de un número de rotación $\rho = \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Arnol'd se apoyó

en un resultado ya existente, que es el siguiente:

Teorema 11 (Denjoy) *Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ una función sobre el círculo difeomorfa que preserva la orientación y tal que $f \in C^2$. Entonces, si $\rho = \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la función f es conjugada a la rotación 2.25 para $\Omega = \beta$*

Por tanto, todas las funciones de Poincaré de sistemas perturbados con conjunto límite inscrito en un toro, que tienen un número de rotación irracional, son conjugadas entre sí. Arnol'd amplió estos resultados incorporando que, además de ser conjugados, la conjugación no es sólo continua sino diferenciable, siempre que el número irracional β cumpla unas condiciones llamadas de diofanto y verificadas por un conjunto de medida positiva del intervalo $[0, 1]$ (ver Arnol'd 1965, Broer et al. 1991). Además, se demuestra que, para ε suficientemente pequeño, el sistema 2.26 es conjugado por medio de una función diferenciable a la rotación 2.25. Esto indica que la cuasiperiodicidad, que es el comportamiento que se produce cuando disponemos de números de rotación irracionales, es persistente bajo pequeñas perturbaciones de 2.25 en un conjunto de medida positiva del conjunto números de rotación irracionales.

Nótese entonces que, debido a la conexión del conjunto de perturbaciones 2.26 con $\rho = \frac{m}{n}$, y a la persistencia de números de rotación irracionales frente a pequeñas perturbaciones, los conjuntos de funciones $C_{\frac{m}{n}}$ y C_β tienen que estar alternados en el diagrama de representación del espacio (Ω, ε) , siempre con un ε lo suficientemente pequeño. Para ilustrar este comportamiento, vamos a presentar un ejemplo de un sistema concreto del tipo 2.26 analizado por Arnol'd. El sistema es el siguiente:

$$g(\varphi) = (\varphi + 2\pi\Omega + \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi)) \operatorname{mod} 2\pi \quad (2.28)$$

Para $\varepsilon < 1$ la función 2.28 es invertible, por lo que es un difeomorfismo y admite un sistema dinámico asociado cuya función de Poincaré es la propia función $g(\varphi)$. Se puede entonces construir las regiones del plano formado por

los parámetros Ω y ε donde se produce el fenómeno de acoplamiento (figura 2.14). Estas regiones son conexas y se les llamaron *Lenguas de Arnol'd*.

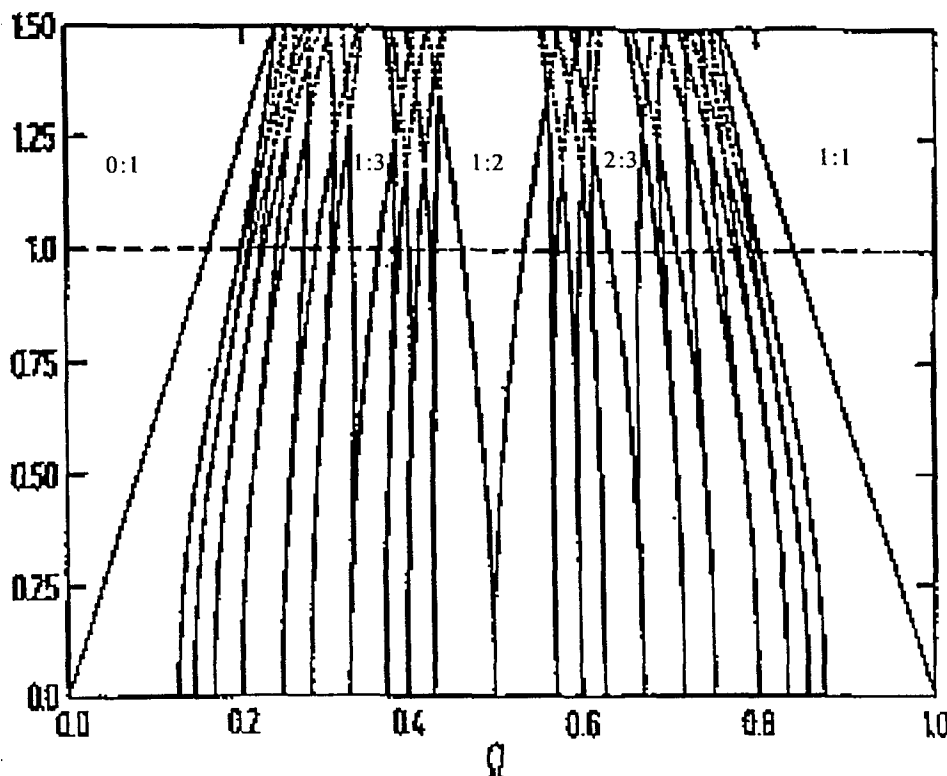


Figura 2.14: Lenguas de Arnol'd para la función 2.28. Fuente: Jensen et al. (1984).

Obsérvese en esta figura que, a medida que el parámetro de perturbación ε es mayor, los intervalos de Ω donde se produce el acoplamiento son cada vez más anchos, fortaleciéndose, entonces, el proceso de acoplamiento. En el punto $\varepsilon = 1$ alcanzamos la situación en la cual los intervalos en Ω donde se manifiesta el acoplamiento ocupan casi todo el intervalo de definición. Los trabajos de Jensen et al. (1983, 1984) descubrieron que el complementario a este conjunto es un conjunto de Cantor de dimensión fractal, D , aproximadamente $D \sim 0.87$. A su vez, propusieron que esta constante era universal para una cierta clase de funciones círculo, que comprueban numéricamente.

Para $\varepsilon > 1$, la función ya no es invertible, con lo que la función sobre el círculo ya no representa una función de Poincaré de un sistema dinámico dado. No obstante, el estudio de esta región en el ejemplo dado es interesante, ya que una función de Poincaré puede estar definida por dos componentes del tipo 2.26, y, aunque con la restricción a una variable se obtenga una función no invertible, las conclusiones que podamos obtener de esta restricción pueden extrapolarse al comportamiento general del modelo. Como un ejemplo en el cual se produce esta situación, podemos citar el trabajo de Jensen et al. (1984), que llevaron a cabo el análisis de un modelo que describe el estudio de empalmes Josephson en campos de microondas (ver Schuster 1989 para una revisión del modelo). Este modelo incorpora dos osciladores que interaccionan entre sí. Hallando la función de Poincaré asociada, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - \varepsilon \operatorname{sen}(\theta_n) + b r_n \\ r_{n+1} &= b r_n - \varepsilon \operatorname{sen}(\theta_n)\end{aligned}\tag{2.29}$$

La proyección de esta función de Poincaré sobre el plano r_n constante es de la forma 2.28, con lo que el estudio de esta función sobre el círculo adquirió gran importancia en este ejemplo. Entonces, según este modelo, decir que la función de Poincaré restringida deja de ser invertible significa que el sistema pierde el atractor inscrito en el toro, con lo que se espera que manifieste comportamientos más complejos.

Existen otros casos en los que el estudio de la estructura de la función sobre el círculo para situaciones no invertibles es interesante. A veces se construyen funciones sobre el círculo no invertibles, que sirven como aproximación del comportamiento de la función de Poincaré para dimensión uno. Tal es el caso de la llamada función de Levi-Poincaré, construida para estudiar el comportamiento de la ecuación de Van der Pol (ver Guckenheimer y Holmes 1983).

A pesar de su interés, se conoce muy poco del comportamiento de la función 2.28 por encima de la frontera $\epsilon = 1$. En Jensen et al. (1984) se observa la aparición de comportamientos caóticos debido al solapamiento que se produce en las lenguas. Esta función manifiesta una serie bifurcaciones del tipo desdoblamiento de periodos, imposible de manifestarse en sistemas inscritos en un toro, que definen una ruta hacia el caos. Otro tipo de estudios más actuales, basados en sistemas químicos (Knudsen et al. 1991), han presentado nuevos resultados generales sobre las posibles bifurcaciones que exhiben los sistemas que pierden el atractor inscrito en el toro. También podríamos citar el trabajo de Gallas (1994), que analiza unas estructuras genéricas presentes en modelos de tipo físico, y que pudiere ser aplicado a la descripción de las lenguas de Arnol'd. Reick y Mosekilde (1995) demuestran que la aparición de bifurcaciones de Hopf en sistemas emparejados simétricamente, admitiendo individualmente bifurcaciones de desdoblamiento de periodo, es una propiedad genérica, lo que conduce a la aparición de una ruta diferente hacia el caos.

2.7.2 Formas de emparejamiento de osciladores

La implementación del fenómeno de acoplamiento en un modelo puede realizarse por medio de varios métodos. Estos métodos se diferencian en la forma de interactuar los modos cíclicos involucrados en el fenómeno. En líneas generales, vamos a considerar dos formas de implementación, por medio de *osciladores forzados* y por medio de *osciladores no lineales interdependientes*.

- *Osciladores forzados:*

En pocas palabras, un oscilador forzado consiste en un oscilador no lineal al que le hacemos influir otro oscilador ajeno a él. Este oscilador ajeno tiene una amplitud y periodo independientes de las variables que gobiernan el oscilador no lineal inicial. Los osciladores forzados son muy utilizados en Física

para describir el efecto de imponer a un comportamiento cíclico, por ejemplo, un péndulo o muelle, otro comportamiento cíclico, y estudiar su movimiento conjunto. Ejemplos famosos de osciladores forzados no lineales son el oscilador de Van der Pol forzado, que data de 1927, y la ecuación de Duffing, que data de 1918. Un estudio exhaustivo de ambos puede encontrarse en Guckenheimer y Holmes (1983) o Jordan y Smith (1987).

En general, el proceso de generar un sistema con oscilador forzado consiste en tomar un sistema autónomo que admite un ciclo límite, como el siguiente (Lorenz 1993):

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.30)$$

donde x es la variable que evoluciona con el tiempo, f y g son funciones de clase C^∞ tales que el sistema admite un único ciclo límite. A este sistema se le impone entonces una señal oscilatoria externa, que puede venir representada por una función trigonométrica:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = h(t) \quad (2.31)$$

La función $h(t)$ es tal que $h(t + P) = h(t)$, para un conveniente $P \in \mathbb{R}$. Dependiendo de la forma de las funciones que gobiernan este modelo, pueden surgir acoplamientos con la señal externa u otros comportamientos dinámicos muy complejos.

Este tipo de sistemas ha sido utilizado para explicar el proceso de acoplamiento en multitud de fenómenos reales de muy diversa índole. Como ya mencionamos, en Jensen et al. (1984) se describe un modelo de oscilador forzado que explica el proceso de empalmes Josephson en campos de microondas. Existen otros muchos ejemplos, entre los que podemos citar el de Mosekilde et al. (1990, 1993b), que estudia un modelo de diodos forzados periódicamente. También se ha incorporado este proceso de osciladores

forzados a un modelo de absorción de insulina en pacientes diabéticos (Sturis et al. 1995). Para un amplio repaso de algunas de estas aplicaciones y otras más, ver Schuster (1989) y Jackson (1991).

Todos estos sistemas, además de ser modelos válidos para la explicación del acoplamiento surgido en fenómenos reales, incorporan un estudio adicional sobre el comportamiento complejo que acompaña a situaciones de acoplamiento. Entre otras características, estos modelos suelen presentar un proceso de desdoblamiento de periodo en situaciones de acoplamiento, que se traduce en que un acoplamiento del tipo $m : n$ se desdobra en acoplamientos del tipo $2m : 2n$. Estos desdoblamientos se producen en cascada, por lo que se origina una ruta hacia el caos, del mismo modo que en la función sobre el círculo 2.28. Además de éstas, también se han localizado una amplia gama de bifurcaciones locales de las que se han extraído importantes resultados generales (Knudsen et al. 1991).

A pesar de las muchas aplicaciones que han tenido los osciladores forzados en la ciencia en general, no existen muchos ejemplos de la utilización de este tipo de modelos en Economía. Entre algunas de las aplicaciones específicas, podemos citar, en primer lugar, aquella realizada al modelo de Goodwin (1951), que inicialmente genera un comportamiento de ciclo límite y al cual se le impone un modo oscilatorio a la inversión autónoma. Este oscilador forzado, al igual que el modelo de Van der Pol, puede exhibir un comportamiento caótico. Existen otras aplicaciones más actuales como los modelos de Lorenz en 1987 (ver Lorenz 1993), que ilustra el efecto nocivo de políticas keynesianas anticíclicas.

El ejemplo más interesante para el trabajo que vamos a desarrollar es el modelo de Sterman y Mosekilde (1993), que ya hemos comentado en el capítulo I. Este modelo surge como una modificación de un modelo previo, que admite

un ciclo límite y que representa la onda larga (Sterman 1985), mediante la imposición de un comportamiento oscilatorio en los pedidos de capital por parte del sector productor de bienes, inicialmente constante. Nos encontramos, entonces, con un oscilador forzado, para el cual existen extensas regiones de acoplamiento entrelazadas con comportamientos caóticos y bifurcaciones de desdoblamiento de periodo, de la misma manera que aparecían en modelos que representaban fenómenos de índole diferente. En el próximo capítulo detallaremos las regiones de acoplamiento para este modelo.

Sin embargo, como ya fue comentado en la sección 1.4, aplicar osciladores forzados en situaciones de la economía presenta serias limitaciones. Esto es debido al carácter exógeno del forzamiento periódico. Los fenómenos económicos tienen la característica de estar muy interrelacionados entre sí, y la evolución de un sector acarrea consecuencias en otro sector y viceversa. En cambio, el forzamiento externo impone una influencia de un modo cíclico sobre otro, pero no la inversa. En este sentido, es más deseable, para la representación del proceso de acoplamiento entre los ciclos económicos, un modelo que produzca una interacción mutua entre osciladores.

- *Osciladores no lineales interdependientes:*

A diferencia de los osciladores forzados, los osciladores no lineales interdependientes incorporan dos o más osciladores no lineales relacionados entre sí, con lo que la evolución de uno de los osciladores influye en el otro y viceversa. De esta manera, el comportamiento conjunto será, en líneas generales, más rico e interdependiente que en el caso de los osciladores forzados. El planteamiento general para este caso es el mismo que para el caso 2.23, pero ahora no detallaremos el parámetro de perturbación. Así, un modelo general

de este tipo se presenta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.32}$$

con $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\forall i \in \{1, 2\}$, y donde f_1 y f_2 son dos funciones no lineales de clase C^∞ . En caso de que el sistema fuera desacoplado, obtendríamos dos osciladores correspondientes a las variables x_1 y x_2 , respectivamente, que estarían representados en un toro de dimensión dos. El estudio de las posibilidades del comportamiento de este sistema en caso no desacoplado ya ha sido estudiado previamente con el análisis de la función sobre el círculo.

Este tipo de modelización ha sido aplicado para explicar ciertos fenómenos de tipo físico, como el presentado por el emparejamiento de radiadores controlados termostáticamente (Togebly et al. 1988). También han encontrado en Economía ciertas aplicaciones, aún incipientes, aunque presente mayor idoneidad como representación de la interacción de los ciclos económicos que los osciladores forzados. Esto es debido, en parte, a su relativa novedad desde el punto de vista de la Matemática. Entre otros modelos, podemos destacar el de Lorenz (1989), que incorpora la interacción de varias economías debido a factores de comercio internacional, y en el cual se vislumbra la aparición de comportamiento caótico. No obstante, la aplicación al proceso de acoplamiento entre los ciclos económicos en una economía cerrada fue expuesta en los trabajos de Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994). Los autores presentan un modelo desagregado del modelo de onda larga (Sterman 1985) que ilustra la interacción entre dos sectores o empresas, de manera que sus modos cíclicos se acoplan. Se analizaron las regiones de acoplamiento $m : n$ del modelo, obteniéndose resultados comparables a otros trabajos sobre fenómenos no económicos que hemos mencionado previamente.

El análisis de este modelo y ampliaciones posteriores nos va a ocupar el resto de la memoria, para lo cual utilizaremos los resultados ya presentados en

este capítulo junto con otro tipo de técnicas, como el análisis de la sensibilidad. El objetivo de utilizar toda esta metodología es analizar el comportamiento de los modelos que vamos a introducir, y contrastar su idoneidad como representación del fenómeno de acoplamiento entre ciclos económicos.

Capítulo 3

Resultados (I): Estudio cualitativo de un modelo de acoplamiento entre ciclos económicos

Como fue ya ampliamente desarrollado en la sección 1.4, el acoplamiento entre osciladores puede ser una buena explicación de múltiples fenómenos que se manifiestan en la interacción entre ciclos económicos. La aparición de pocas estructuras cíclicas en una economía con una multitud de sectores y empresas pudiera ser debido a la aparición de acoplamientos del tipo $1 : 1$, llamado *sincronización*, entre los modos cíclicos de dos sectores o empresas muy interrelacionadas entre sí. A su vez, un acoplamiento del tipo $m : n$ se ajusta al comentario de Schumpeter acerca de la coincidencia en el descenso de tres modos cíclicos como una explicación de la Gran Depresión (Mosekilde et al. 1992). Todas estas y más evidencias han reclamado la creación de un modelo que incorpore acoplamientos entre osciladores económicos.

Sin embargo, debido, en parte, al incipiente desarrollo que ha tenido

este fenómeno en Matemáticas y otras Ciencias, no se ha intentado presentar un modelo de este tipo hasta hace relativamente pocos años. Existen varios modelos recientes que incorporan dos osciladores que representan formas cíclicas económicas, como Lorenz en 1987 (ver Lorenz 1993), pero su estudio no se centra en el descubrimiento de regiones de acoplamiento, sino más bien en la aparición de comportamientos caóticos. Podemos citar como los primeros modelos que estudian propiamente el acoplamiento entre ciclos económicos los presentes en el trabajo de Sterman y Mosekilde (1993) y Kampmann et al. (1994).

En este capítulo analizaremos, utilizando los métodos analíticos expuestos en el capítulo II, el modelo desagregado de onda larga desarrollado por Kampmann et al. (1994), también presente en el trabajo de Haxholdt et al. (1994). Los autores estudian el modelo basándose fundamentalmente en simulaciones sucesivas y análisis de la sensibilidad de los parámetros, con lo que alcanzan un conocimiento bastante amplio del mismo. El estudio que vamos a presentar supondrá no sólo una verificación analítica de los resultados obtenidos por simulación, sino que descubrirá aspectos dinámicos del modelo difícilmente extraíbles mediante simulación. Estos aspectos dinámicos se refieren a puntos de bifurcación, estabilidad estructural y otros comportamientos cualitativos que completarán el conocimiento del modelo. Una versión más escueta de los resultados de este capítulo pueden ser encontrados en Hernández-Guerra (1996), Hernández-Guerra y Fernández-Rodríguez (1997).

3.1 Desarrollo histórico

Como hemos detallado en el capítulo I, el modelo de acoplamiento entre los ciclos económicos que nosotros vamos a presentar surgió a raíz de un modelo

generador de onda larga desarrollado por Sterman (1985). Este modelo, simplificación de uno mayor desarrollado por el grupo de Dinámica de Sistemas del M.I.T., incorpora la estructura mínima generadora del comportamiento de onda larga en una economía agregada en la que consideramos dos sectores: un sector productor de capital y otro sector productor de bienes de consumo. La hipótesis filosófica en la que se fundamenta el modelo es que la onda larga se genera endógenamente por la interacción del proceso de auto-ordenamiento de capital ("capital self-ordering") con otro tipo de factores, como demoras de distribución del producto y no linealidades en la utilización de la capacidad productiva y los pedidos de capital. Para un desarrollo más extenso del mecanismo económico de generación de la onda larga, ver la sección 1.4 de este mismo trabajo.

Desde el punto de vista matemático, el modelo de onda larga de Sterman (1985) consiste en un sistema de tres ecuaciones diferenciales que manifiesta, para un rango de valores de los parámetros que podemos considerar aproximados a la realidad, un ciclo límite asintóticamente estable globalmente. Así, podemos considerar este sistema como un oscilador. El propio autor realiza un completo análisis de la sensibilidad para comprobar el efecto de ciertos parámetros relevantes en la evolución del modelo. En otros trabajos se lleva a cabo una pequeña simplificación del sistema para reducirlo a dos ecuaciones diferenciales y poder estudiarlo también desde el punto de vista analítico (Rasmussen et al. 1985, Brøns y Sturis 1991). En el trabajo de Rasmussen et al. (1985) se realiza una verificación de la existencia de ciclo límite utilizando el análisis de las isoclinas, que posteriormente definiremos. Por otro lado, Brøns y Sturis (1991) realizan un estudio exhaustivo de las bifurcaciones presentes frente a variaciones en dos parámetros del modelo. Se descubrió la existencia de bifurcaciones de punto de silla y de Hopf, además de un tipo de bifurcación global, llamada homoclínica, que nosotros no hemos expuesto en este trabajo. El estudio analítico aportó una comprensión más

global del comportamiento del modelo y fue útil como orientación de diversas políticas a seguir para controlar las fluctuaciones cíclicas. Estos resultados analíticos han servido como referencia al trabajo que desarrollamos en este capítulo.

Una primera aproximación del proceso de acoplamiento entre ciclos económicos se realizó en el trabajo de Sterman y Mosekilde (1993). El método consistió en introducir un forzamiento externo en el modelo de onda larga, al igual que se hizo en muchos modelos de tipo físico ya ampliamente estudiados, como la ecuación de Van der Pol o la de Duffing (Guckenheimer y Holmes 1983, Jordan y Smith 1991), u otros modelos posteriores (Jensen et al. 1984, Mosekilde et al. 1993b, Sturis et al. 1995). Para incorporar el forzamiento exógeno en el modelo de onda larga, la expresión de los pedidos de capital realizados por el sector productor de bienes de consumo (notémoslo O^c), inicialmente constante, es cambiada a una forma oscilatoria que represente otro modo cíclico de la economía. De esta manera se impone que estos pedidos varíen sinusoidalmente con una amplitud A y un periodo T alrededor de un valor de equilibrio $\overline{O^c}$. La expresión para los pedidos, ahora, es la siguiente:

$$O^c = \overline{O^c} \left(1 + A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) \quad (3.1)$$

Entonces, el modelo nuevo que obtenemos incorpora un oscilador, que sería la onda larga, junto con un forzamiento externo, representado por el carácter oscilatorio de los pedidos de capital por parte del sector productor de bienes de consumo. Este sistema se trata de un oscilador forzado.

Esta variación ya se había supuesto en el modelo presentado por Rasmussen et al. (1985), aunque este trabajo se centra en la búsqueda de comportamientos caóticos. En los resultados de la variación del modelo de onda larga presentados por Mosekilde et al. (1992, 1993a), Sterman y Mosekilde (1993), al igual que en otros trabajos sobre osciladores forzados (Mosekilde et

al. 1990), se buscaban regiones de acoplamiento $m : n$ para diferentes valores de los parámetros que gobiernan el modo cíclico exógeno, que son la amplitud A y el periodo T . Según la teoría desarrollada en la sección 2.7, las regiones donde se presentan los diversos tipos de acoplamientos han de exhibir una forma similar a la figura 2.14 para valores pequeños de los parámetros, las llamadas "lenguas de Arnol'd". De hecho, mediante simulaciones sucesivas, estas lenguas de Arnol'd fueron representadas en el diagrama formado por los parámetros ($A.T$) (ver figura 3.1).

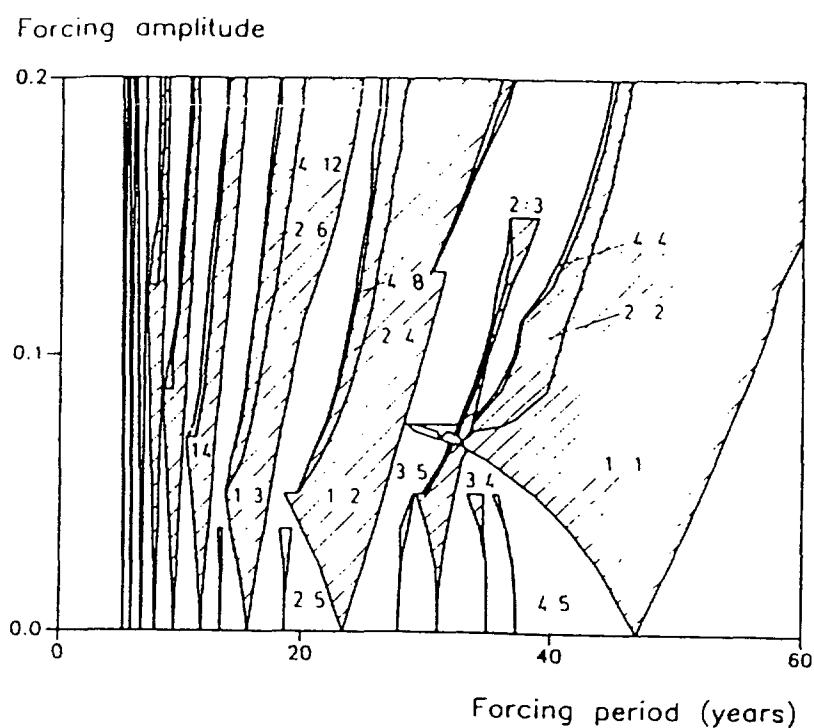


Figura 3.1: Lenguas de Arnol'd para el modelo de onda larga (Sterman 1985) con un forzamiento exógeno. Fuente: Sterman y Mosekilde (1993).

Como podemos observar, el comportamiento del sistema comprende una amplia gama de regiones de acoplamiento. Estas regiones de acoplamiento explican la aparición de pocos modos cíclicos en la economía, como notábamos en la sección 1.4. Por citar algún ejemplo, para valores de la amplitud en torno

al 10% ($A = 0.10$) y un periodo de oscilación de los pedidos de capital por parte del sector productor de bienes entre 45 y 50 años, se produce asintóticamente una sincronización entre los ciclos. O sea, el ciclo generado por los pedidos de capital del sector productor de bienes de consumo completa exactamente un ciclo cuando la onda larga también completa un ciclo. Este fenómeno indica que la dependencia que se produce entre el sector productor de capital y el sector productor de bienes hace que sus ciclos, inicialmente con periodos diferentes, se sincronicen de modo que aparezca una forma única.

Para otros valores de la amplitud y el periodo del ciclo correspondiente a la demanda de capital por parte del sector productor de bienes de consumo también se genera acoplamiento. Como una muestra de ello, para valores de la amplitud del 20% ($A = 0.20$) y un periodo en torno a un intervalo entre 20 y 24 años, se produce un acoplamiento del tipo 1 : 2. Es decir, asintóticamente por cada oscilación de la onda larga se producen exactamente dos oscilaciones del otro ciclo. Considerando la misma amplitud y un periodo menor, de forma que represente el ciclo comercial ($T = 4.6$), el acoplamiento es del tipo 1 : 10.

Como ya hemos indicado en la sección 2.7, el acoplamiento suele ir acompañado de otros comportamientos más complejos debido a que se pierde el atractor inscrito en el toro para valores no muy altos de los parámetros. Del mismo modo que modelos similares aplicados a otros campos de la Ciencia (Jensen et al. 1983/1984, Knudsen et al. 1991, Reick and Mosekilde 1995), se descubrieron en este modelo bifurcaciones de desdoblamiento de periodo, que es una de las vías de transición al caos en un sistema dinámico. Este hecho fue observado, por ejemplo, para una sucesión creciente del valor del periodo T en la frontera correspondiente a la región 1 : 2. A su vez, existen una multitud de pares (A, T) para los cuales el exponente de Lyapunov es positivo, que es una característica de los sistemas caóticos. También se localizaron estructuras fractales como cuenca de atracción del acoplamiento para valores de (A, T) en

la frontera de los comportamientos de acoplamiento con los comportamientos caóticos (Mosekilde et al. 1992, 1993a).

El modelo desarrollado por Sterman y Mosekilde (1993) utiliza un oscilador forzado para representar el proceso de acoplamiento entre los ciclos económicos. Ya hemos comentado en los anteriores capítulos que esta forma de representar los fenómenos económicos no es adecuada, debido a que el hecho económico está muy interrelacionado. La forma de incorporar el modo cíclico correspondiente al sector productor de bienes de consumo en el modelo es exógena, con lo que no explica el proceso de acoplamiento por la interacción de dos sectores, sino por la influencia de uno sobre otro.

En este sentido, un buen perfeccionamiento de este modelo sería la introducción del acoplamiento por medio de la interacción de modos cíclicos mutuamente independientes. La limitación que dispone el modelo anterior para desarrollar endógenamente el acoplamiento entre modos cíclicos es considerar la economía en el agregado. En la economía real aparecen una multitud de empresas y sectores productores de capital de muy diverso comportamiento. Surge entonces la necesidad de desagregar el modelo anterior, considerando más de un sector productor de capital. Cada sector manifestaría un comportamiento cíclico al tratarlo desligado del resto, de manera que los mecanismos de interacción de estos sectores entre sí emparejen sus ciclos a un mismo periodo, y en el agregado se observe un modo único, o que debido a sus diferencias estructurales, se produzca un acoplamiento $m : n$ no sincronizado entre los ciclos de cada uno de los sectores.

Como ya hemos comentado en los capítulos precedentes, un modelo que incorpora estas cuestiones fue desarrollado por Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994). En este modelo se desagrega el sector productor de capital del modelo de onda larga, con lo que disponemos entonces de

dos sectores productores de capital y un sector productor de bienes de consumo. La demanda de capital por parte del sector productor de bienes continúa siendo exógena y constante. Cada sector, aisladamente, manifiesta un comportamiento cíclico gobernado por las mismas hipótesis que el modelo de onda larga. El acoplamiento surgirá entre los comportamientos cíclicos de los dos sectores productores de capital debido a las relaciones no lineales que existen entre ellos.

En el resto del capítulo expondremos este modelo y lo estudiaremos utilizando las técnicas y resultados que hemos visto en el capítulo II. Con ello, ampliaremos el conocimiento de su comportamiento cualitativo iniciado en los propios trabajos de Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994) por medio de simulaciones.

3.2 El modelo de onda larga desagregado

El modelo desagregado de onda larga (Kampmann et al. 1994) consiste en un sistema de diez ecuaciones diferenciales con diez variables. El modelo es similar al descrito en Serman (1985), suponiendo en este caso que existen dos sectores productores de capital. Estos sectores productores de capital podrían representar, por ejemplo, el sector productor de maquinaria y el sector de la construcción. Es evidente la interdependencia que existe entre estos sectores, ya que tanto el sector productor de maquinaria como el sector de la construcción necesitan capital producido por su propio sector y por el producido por el otro sector para su propia producción. Este modelo incorpora esta circunstancia, lo que llevará a que sus modos cíclicos sean interdependientes. Los factores que vamos a resaltar, como determinantes del acoplamiento en el modo cíclico de ambos sectores, van a ser el grado de dependencia entre estos sectores y la diferencia en el tiempo de vida del capital

producido por cada uno de los sectores.

Por lo tanto, asignando el subíndice 1 para determinar uno de los sectores (e.g. el sector productor de maquinaria) y el subíndice 2 para el otro sector (e.g. el sector de construcción), el modelo incorpora las siguientes variables (ver Kampmann et al 1994 para detalles):

$K_{ij} \equiv$ capital producido por el sector j que se encuentra en el sector i .

$B_i \equiv$ atrasos totales del sector i .

$S_{ij} \equiv$ atrasos del sector j relativos al sector i .

donde $i, j \in \{1, 2\}$.

Entonces el sistema dinámico que define el modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ij} &= a_{ij} - \frac{K_{ij}}{\tau_j} \\ \dot{S}_{ij} &= O_{ij} - a_{ij} \\ \dot{B}_i &= (O_{ii} + O_{ji} + O_i^c) - x_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

con $i, j \in \{1, 2\}$.

Como podemos observar a partir de las ecuaciones, la variación instantánea del capital j que se dispone en el sector i , \dot{K}_{ij} , viene dada por las adquisiciones de nuevo capital j efectuadas por el sector i en ese instante, a_{ij} , menos la depreciación de ese capital, que se supone un porcentaje constante anual dado por el tiempo de vida medio de ese capital, τ_j .

Por otro lado, la variación de los pedidos aún no satisfechos de capital tipo j que tiene el sector i , \dot{S}_{ij} , viene, lógicamente, determinada por la diferencia entre los pedidos realizados por el sector i de capital proveniente del sector j ,

O_{ij} , y las adquisiciones de capital j del sector i en cada instante, a_{ij} .

Por último, la variación de los atrasos totales del sector i , \dot{B}_i , está determinada por la demanda excedente de capital tipo i . Esta demanda excedente es la diferencia entre el conjunto de pedidos de capital i realizados por los dos sectores productores de capital y por el sector productor de bienes de consumo, O_i^c , que se considera exógeno, menos la producción de capital del sector i , x_i .

A su vez, la producción de capital en cada sector j , x_j , se distribuye equitativamente entre los demandantes de ese capital. De esta manera, las adquisiciones de capital j por parte del sector i , a_{ij} , se asignan a partir de la producción del sector j , x_j , según la proporción de los atrasos totales, B_j , correspondientes a los atrasos relativos al sector i , S_{ij} . De esta manera, estas adquisiciones son de la forma:

$$a_{ij} = \frac{x_j S_{ij}}{B_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.3)$$

En la función de producción se incorpora la capacidad de los productores de influir en la producción si la producción deseada supera a la teórica. De esta manera, la producción total, x_i , depende de una producción deseada, x_p^* , y lo que llamaremos *capacidad productiva* del sector i , que es la función de producción teórica de ese sector. Supondremos que estas variables están ligadas por la siguiente relación:

$$x_i = f\left(\frac{x_p^*}{c_i}\right)c_i, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.4)$$

Suponemos que esta función no lineal $f(\cdot)$ sigue la gráfica que aparece en la figura 3.2. Como se puede observar en esta gráfica, la relación indica que si la producción deseada por el sector i es mayor que su capacidad productiva, entonces la producción del sector se verá incrementada, aunque no en mucho

tamaño. Una expresión formal de $f(\cdot)$ es la siguiente:

$$f(r) = \xi \left(1 - \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^r \right) \quad ; \quad \xi > 1 \quad (3.5)$$

El parámetro ξ indica el tope máximo de incremento de la producción que puede forzar el sector por encima de su capacidad productiva.

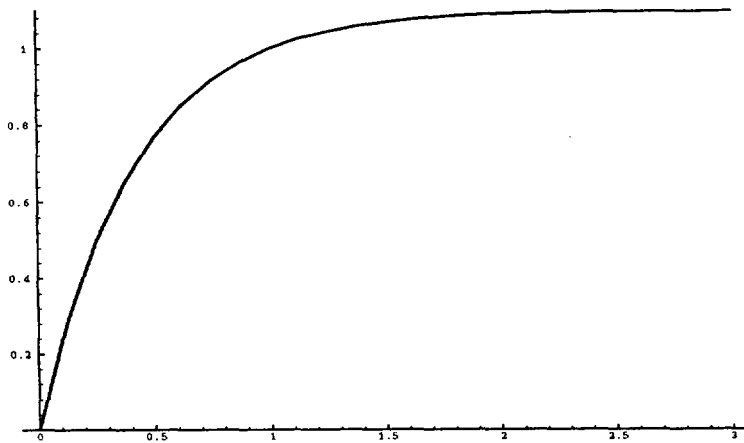


Figura 3.2: Función $f(r)$.

La capacidad productiva c_i , función de producción teórica del sector i , ha de incorporar necesariamente los dos factores productivos que intervienen en la producción de ese sector, que son los capitales de cada uno de los sectores en el sector i . Se supone que sigue una función de Cobb-Douglas con rendimientos a escala constantes:

$$c_i = \kappa_i^{-1} K_{ii}^{1-\alpha} K_{ij}^{\alpha}, \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.6)$$

El parámetro κ_i indica la tasa de capital-producto del sector i , y va a estar determinada por las tasas de capital-producto relativas al capital j en el sector i , como posteriormente veremos. El parámetro α , $0 \leq \alpha \leq 1$, es el factor de participación del capital procedente del sector j en el sector i , con $i \neq j$, que suponemos idéntico para ambos sectores. Cuanto mayor sea este valor,

la dependencia en cada sector del capital procedente del otro sector para la producción es también mayor, siendo así una medida de la interrelación entre los sectores. Este va a ser uno de los parámetros fundamentales en la búsqueda de regiones de acoplamiento.

Por último, la producción deseada se fija de acuerdo al nivel de atrasos que tenga el sector i y a la demora de distribución media del producto del sector i , δ_i , de manera que la producción satisfaga la demanda pendiente total de ese producto. De esta forma:

$$x_i^* = \frac{B_i}{\delta_i}, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.7)$$

La estructura de los pedidos tampoco es lineal. La tasa de pedidos de capital tipo j efectuada por el sector i , O_{ij} , está determinada por la depreciación del capital y un nivel de pedidos deseado, O_{ij}^* , relacionados por medio de una función no lineal. O sea:

$$O_{ij} = \frac{K_{ij}}{\tau_j} g\left(\frac{O_{ij}^*}{K_{ij}/\tau_j}\right), \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.8)$$

La función $g(r)$ adopta la forma de la gráfica expuesta en la figura 3.3. Una expresión que se ajusta bien a esta gráfica es la siguiente:

$$g(r) = \frac{\beta}{1 + \mu_1 e^{-\nu_1(r-1)} + \mu_2 e^{-\nu_2(r-1)}} \quad (3.9)$$

Los valores asignados a los parámetros que definen la ecuación para que manifieste la forma de la gráfica 3.3 son $\beta = 6$, $\mu_1 = \frac{27}{7}$, $\mu_2 = \frac{8}{7}$, $\nu_1 = \frac{2}{3}$, $\nu_2 = 3$ (ver Kampmann et al 1994).

Esta función fuerza a que los pedidos de capital nunca puedan ser negativos y que no puedan crecer más allá de un número de veces el nivel de depreciación del capital. Estas restricciones están explicadas en Sterman (1985).

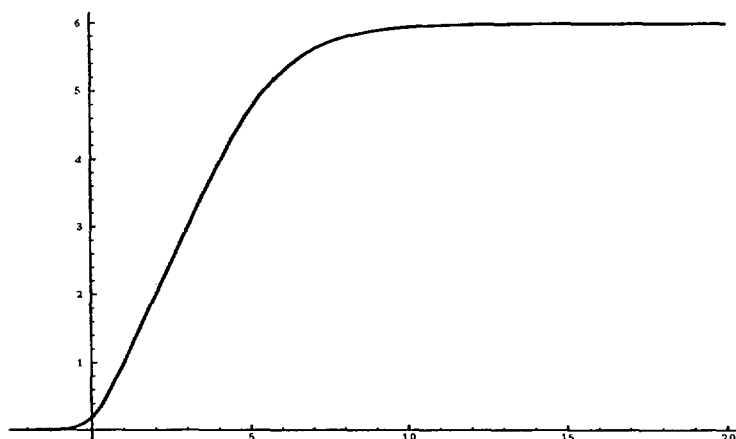


Figura 3.3: Función $g(r)$.

Las reglas de decisión por las cuales el sector i fija los pedidos deseados de capital proveniente de cada sector j , O_{ij}^* , se basan en principios de racionalidad acotada en el comportamiento de los agentes económicos. Esta teoría, hace ya tiempo ampliamente desarrollada en la literatura (Simon 1979) y ya comentada en la sección 1.3, argumenta que la decisión tomada por los agentes es racional, pero fundamentada en una información parcial, con lo que la decisión no va a ser la misma que la tomada si la información del agente fuera completa. La forma concreta de estas reglas de decisión en el modelo han sido contrastadas mediante experimentación (Sterman 1989a).

A partir de las hipótesis anteriores, el nivel de pedidos de capital deseado proveniente del sector j realizado por el sector i , O_{ij}^* , está determinado por el objetivo que tienen los productores de mantener unos niveles de capital y de pedidos aún no satisfechos deseados. Se supone que cada sector i fija su inversión bruta deseada en capital tipo j a partir de: la depreciación del capital existente, K_{ij}/τ_j ; la diferencia entre los niveles deseados de mantener en el sector i de capital tipo j , notémoslo K_{ij}^* , con los niveles actuales, K_{ij} ; y de la diferencia entre el nivel de pedidos aún no satisfechos de capital tipo j

deseados localizados en el sector i , notémoslo S_{ij}^* , con el nivel actual, S_{ij} . De esta manera:

$$O_{ij}^* = \frac{K_{ij}}{\tau_j} + \frac{K_{ij}^* - K_{ij}}{\tau_j^K} + \frac{S_{ij}^* - S_{ij}}{\tau_j^S}, \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.10)$$

Los parámetros τ_j^K y τ_j^S indican la rapidez con la que el sector i ajusta los niveles actuales a los deseados. Se han obtenido estimaciones de estos parámetros (Sterman 1989a).

Por un lado, los pedidos deseados de capital tipo j aún no satisfechos realizados por el sector i , S_{ij}^* , vienen determinados por la demora de distribución actual del producto j , que es el cociente entre los atrasos totales del sector j , B_j , con sus niveles actuales de producción, x_j . Cuanto mayor sea esta demora, los productores del sector i desearán tener unos niveles de pedidos no realizados mayores para poder mantener su capacidad productiva invariable. Consideramos que los productores tienen en cuenta también, para fijar sus niveles deseados de pedidos por recibir, la depreciación de capital existente, que es una medida fácilmente predecible. De esta forma:

$$S_{ij}^* = \frac{B_j}{x_j} \frac{K_{ij}}{\tau_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.11)$$

Por otro lado, el capital deseado, K_{ij}^* , se fija de acuerdo al nivel de producción deseado. Así:

$$K_{ij}^* = \kappa_{ij} x_i^*, \quad \forall i, j \in \{1, 2\} \quad (3.12)$$

El parámetro κ_{ij} es la tasa capital-producto del capital procedente del sector j en el sector i , y que consideramos constante. De esta forma no incorporamos sustituibilidad entre los factores productivos en la producción de cada sector.

Por coherencia con el modelo de onda larga, los parámetros que miden el tiempo de vida medio del capital y la tasa capital-producto en cada uno de

los sectores, así como otros parámetros de ajuste, se han construido a partir de aquellos fijados en el modelo agregado anterior. Estos han seguido las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \tau + \frac{\Delta\tau}{2} & \kappa_{ii} &= (1 - \alpha)\kappa \frac{\tau_i}{\tau} & \tau_i^K &= \tau^K \frac{\tau_i}{\tau} \\
 \tau_2 &= \tau - \frac{\Delta\tau}{2} & \kappa_{ij} &= \alpha\kappa \frac{\tau_j}{\tau} & \tau_i^S &= \tau^S \frac{\tau_i}{\tau} \\
 & & \kappa_i &= \kappa_{ii}^{1-\alpha} \kappa_{ij}^\alpha & \delta_i &= \delta \frac{\tau_i}{\tau}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Los parámetros τ , κ , δ , indican el tiempo de vida medio del capital agregado, la tasa de capital-producto agregada, y la demora media agregada de distribución del capital, respectivamente. Los parámetros τ^K y τ^S indican el tiempo agregado medio de reacción frente a discrepancias en el capital deseado y el actual, y entre el nivel de pedidos aún no satisfechos deseados y los actuales, respectivamente. Admiten los valores considerados en el modelo de onda larga y experimentos posteriores (Sterman 1985, Sterman 1989a), que rondan sobre los siguientes: $\tau = 20$, $\kappa = 3$, $\delta = 1.5$, $\tau^K = 2$, $\tau^S = 2.5$.

A partir de las últimas ecuaciones 3.13, y comparando este modelo con el de onda larga, se observa que los parámetros que influyen en el modelo desagregado son la diferencia de los tiempos de vida medio de los capitales producidos por los sectores, $\Delta\tau$, y el hecho que cada sector, para su propia producción, necesita capital de sí mismo y del otro sector, siendo la capacidad productiva dependiente de los dos capitales mediante una función de Cobb-Douglas con tasa de participación α . El modelo 3.2 podría admitir otros factores de enlace entre los sectores, pero esta ampliación la vamos a ver en el capítulo IV.

Estos parámetros gobiernan el modelo de la misma manera que los valores ε y Ω determinan el grado de perturbación y el valor del número de rotación para la función sobre el círculo 2.26. El parámetro α indica el grado de dependencia de cada sector con respecto al capital producido

por el otro sector. Así, si $\alpha = 0$, los dos sectores sólo necesitan de su propio capital para la producción, por lo que serían entre sí totalmente independientes. Necesariamente, por coherencia con el modelo de onda larga a partir del cual se ha construido este modelo, cada sector ha de manifestar un comportamiento cíclico con una amplitud y periodo independientes. Estamos, entonces, en presencia de dos osciladores desacoplados. A medida que el grado de dependencia entre los sectores va aumentando, o sea, el valor de α es cada vez mayor, estos osciladores, inicialmente desacoplados, están más interrelacionados. Cuando $\alpha = 1$, la producción de un sector depende exclusivamente del capital producido por el otro sector. En este caso, los sectores están totalmente interrelacionados. Se espera, por tanto, en estas situaciones, una sincronización en el comportamiento cíclico de los mismos.

El efecto de la diferencia en los tiempos de vida medios de los capitales producidos por cada uno de los sectores, $\Delta\tau$, es similar al efecto del cociente de frecuencias en 2.26. Si esta diferencia no es muy elevada, parece razonable pensar que, para ciertos valores medios de α , los ciclos generados por cada uno de los sectores sincronizan sus frecuencias de manera que se observe un modo único. Se produciría entonces un acoplamiento del tipo 1:1. En cambio, si la diferencia en los tiempos de vida medios es elevada, con esos mismos valores medios de α , es razonable pensar que el ciclo generado por el sector de menor tiempo de vida medio de su capital producido se complete varias veces antes que se complete un sólo ciclo generado por el sector con mayor tiempo de vida medio de su capital producido. Se produciría, entonces, un acoplamiento de la forma $m : n$, con m y n enteros.

Estas hipótesis, aunque intuitivas, no son fáciles de comprobar analíticamente. El modelo dispone, como ya se ha expresado, de diez ecuaciones diferenciales ordinarias (ver ecuaciones 3.2) que hacen esta labor realmente compleja. Por tanto, hasta ahora se han verificado estas hipótesis

(Kampmann et al. 1994, Haxholdt et al. 1994) fundamentalmente a partir de simulaciones realizadas con el modelo. Utilizando esta metodología, y en la búsqueda de las regiones de acoplamiento para los distintos valores de los parámetros α y $\Delta\tau$, se observó efectuando simulaciones que, para pequeños valores de $\Delta\tau$ y valores medios de α , se produce un comportamiento en sincronía 1:1 entre los ciclos producidos por cada uno de los sectores.

Para ilustrar los resultados, se representó en el plano definido por $\Delta\tau$ y α el conjunto de regiones donde se producían acoplamientos $m : n$, o sea, las llamadas lenguas de Arnol'd (figura 3.4). Obsérvese que, para valores altos de $\Delta\tau$ y bajos de α , se van produciendo, como era de esperar, acoplamientos del tipo $1 : n$, donde el sector productor de capital de menor tiempo de vida medio ejecuta n vueltas cuando el otro sector sólo ejecuta una. Nótese también que, a partir de una curva dada, el sistema dinámico correspondiente a un sector, considerado el otro como exógeno, admite un punto de equilibrio asintóticamente estable. Se dice entonces que el sector es estable. Considerar exógeno un sector significa que la demora de distribución y la demanda de ese sector es constante, por lo que se encuentra en equilibrio. Los autores proponen que esto es debido a la fuerte dependencia que se produce entre los sectores para valores altos de α . Posteriormente ahondaremos más en esta cuestión.

Las fronteras entre las sucesivas lenguas de Arnol'd no se han delimitado exactamente, aunque manifiestan bifurcaciones de periodo, como puede observarse a la derecha de la región $1 : 2$. Estas bifurcaciones se presentan para valores bastante bajos de la perturbación α , lo que indica que el atractor inscrito en el toro, formado por los movimientos cíclicos de cada uno de los sectores, se conserva sólo para valores extremadamente pequeños de α . Así, la estructura de las lenguas de la figura 3.4 es muy compleja y difícilmente estudiada desde el punto de vista analítico, como se ha podido comprobar en otros trabajos (Jensen et al. 1984, Knudsen et al. 1991, Gallas 1994). Es por

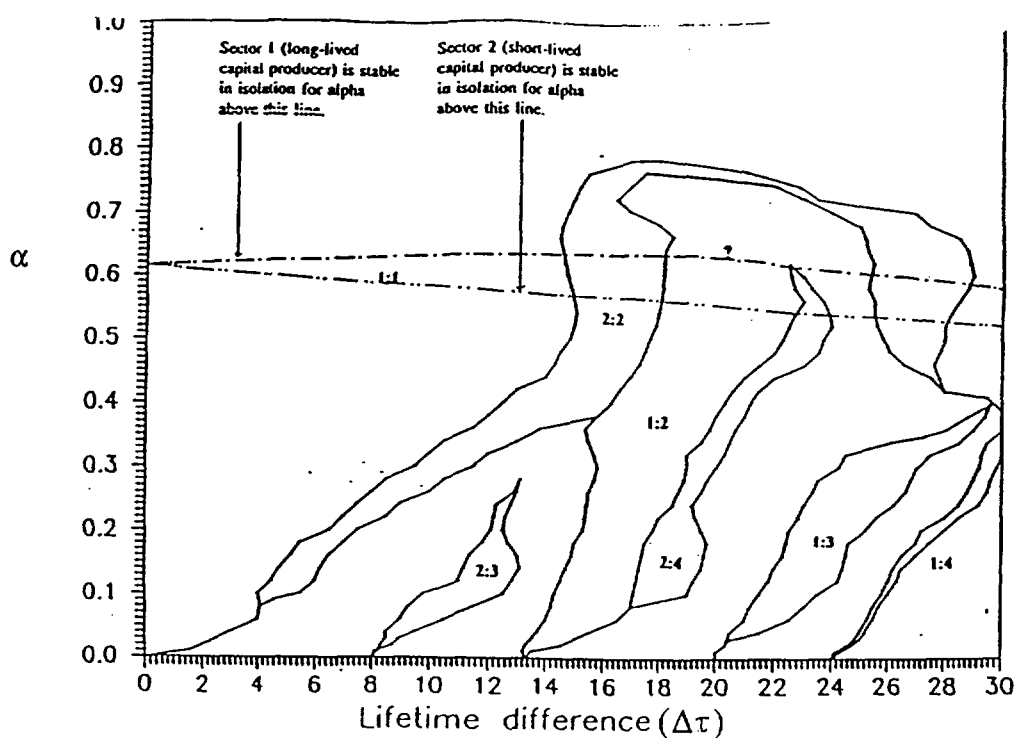


Figura 3.4: Lenguas de Arnol'd para el modelo desagregado de onda larga.
Fuente: Kampmann et al. (1994).

ello que los propios autores proponen seguir profundizando en las simulaciones como método de estudio más exhaustivo.

No obstante, a pesar de la dificultad intrínseca que plantea este modelo, es posible realizar un estudio analítico que aporte nuevos resultados. En este trabajo, al igual que en otros realizados con el modelo de onda larga (Rasmussen et al 1985, Brøns y Sturis 1991), enfocamos nuestro esfuerzo a este objetivo. Para ello hemos efectuado, primeramente, una reducción del número de ecuaciones iniciales, intratables analíticamente, utilizando argumentos de forma y analogía con el modelo de un sector (Sterman y Mosekilde 1993), y simplificaciones ya utilizadas en otros trabajos (Rasmussen et al. 1985). El método de análisis del sistema reducido es clásico en los estudios de sistemas

dinámicos. En Hirsch y Smale (1974) se pueden revisar varios ejemplos.

3.3 Estudio analítico del modelo

Para el estudio analítico del modelo 3.2, hemos escogido dos situaciones extremas de los valores del grado de dependencia: el caso $\alpha=0$ y $\alpha=1$. Analizar estas situaciones extremas aportan información no extraíble mediante simulación, debido a que los parámetros que gobiernan el modelo en estos casos toman valores no reales.

Desde el punto de vista de interpretación del modelo, analizar estos casos extremos también es importante. En primer lugar, para $\alpha = 0$, los sectores son completamente independientes entre sí, teniendo cada uno un comportamiento cíclico independiente del otro que se ajusta al modelo de onda larga de Sterman (1985). Para valores más altos de α , el sistema cambia a una dependencia entre los sectores. Es posible entonces que el valor $\alpha = 0$ sea un punto de bifurcación del sistema.

El caso $\alpha = 1$ es también interesante. En este caso, la producción de cada sector depende exclusivamente del capital producido en el otro sector. Las simulaciones del modelo (obsérvese figura 3.4) muestran que la sincronización (acoplamiento 1 : 1) rellena todo el plano formado por los parámetros $\Delta\tau$ y α cuando α es suficientemente grande. Los autores originales (Kampmann et al. 1994) afirman que la causa de esta situación estriba en el efecto altamente equilibrante que tienen los valores altos de α . Nosotros vamos a demostrar esta afirmación analíticamente.

Vamos a obtener también resultados sobre la estabilidad estructural del sistema en estos casos extremos. De esta manera comprobaremos si el

comportamiento cualitativo que obtenemos se mantiene o no frente a pequeños cambios en los parámetros del sistema.

3.3.1 Simplificación del modelo

Antes de comenzar el análisis, nótese que este modelo, al disponer de un número de ecuaciones excesivamente elevado, diez, resulta casi intratable de estudiar. Para evitar este inconveniente, vamos a realizar una reducción del número de ecuaciones que no va a mermar, en absoluto, el rigor del análisis.

Antes de iniciar la reducción en el número de ecuaciones, vamos a definir, al igual que se hizo en el caso del modelo de un sector (Sterman y Mosekilde 1993), el nivel de pedidos aún no satisfechos que tiene el sector productor de bienes de consumo con el sector i , S_i^c , $i \in \{1, 2\}$. La variación de este nivel de pedidos no satisfecho, como en los otros casos, está gobernada por la diferencia entre los pedidos efectuados en cada instante y las adquisiciones de este capital tipo i por parte del sector productor de bienes de consumo, a_i^c . Entonces:

$$\dot{S}_i^c = O_i^c - a_i^c, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.14)$$

Esto significaría añadir dos nuevas ecuaciones al modelo, pero en realidad no es así, ya que, necesariamente, el atraso total de cada sector i , B_i , $i \in \{1, 2\}$, se reparte entre todos los pedidos pendientes de los diferentes sectores que tiene que satisfacer, que son el otro sector productor de capital, el suyo propio y el sector productor de bienes de consumo. Entonces se verifica la ecuación:

$$B_i = S_{ji} + S_{ii} + S_i^c, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}, \quad i \neq j \quad (3.15)$$

Las adquisiciones de capital tipo i por parte del sector productor de bienes, a_i^c , se fijan a partir de estas ecuaciones y las del modelo 3.2.

Entonces, para reducir el número de ecuaciones que gobiernan el modelo, vamos a considerar que uno de los sectores productores de capital y el sector productor de bienes de consumo son exógenos. Esta restricción es la misma que se utilizó para la simplificación del modelo de onda larga, a partir de la cual se realizaron importantes estudios analíticos (Rasmussen et al. 1985, Brøns y Sturis 1991). También se utilizó en algunas de las simulaciones hechas por Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994). Considerar un sector como exógeno es suponer que la demanda de ese sector es exógena, hecho ya considerado en el sector productor de bienes de consumo, y que el sector no exógeno da prioridad a los pedidos realizados por los sectores externos, con lo que se mantiene un nivel de pedidos no satisfechos constante. Con estas hipótesis, el sector productor de capital considerado exógeno, el sector i , y el sector productor de bienes de consumo, se encuentran en equilibrio, debido a que su demanda está continuamente satisfecha y la producción deseada es igual a la actual.

Por tanto, incorporando esta restricción, las ecuaciones 3.15 se presentan de la siguiente manera:

(Conservando la notación anterior, nos referiremos con el subíndice i al sector productor de capital considerado exógeno, y con el subíndice j al sector no considerado exógeno)

$$B_i = S_{ji} + \underbrace{\overset{\text{exóg.}}{\uparrow} S_{ii} + \overset{\text{exóg.}}{\uparrow} S_i^c}_{\equiv S_i^e} = S_{ji} + S_i^e \quad (3.16)$$

$$B_j = S_{jj} + \underbrace{\overset{\text{exóg.}}{\uparrow} S_{ij} + \overset{\text{exóg.}}{\uparrow} S_j^c}_{\equiv S_j^e} = S_{jj} + S_j^e \quad (3.17)$$

donde S_i^e representa el nivel de pedidos no satisfechos de capital producido por el sector productor de capital considerado exógeno (sector i) realizado por los sectores exógenos, que son el propio sector i y el sector productor de bienes

de consumo. S_j^e es el nivel de pedidos no satisfechos mantenido por el sector j con los sectores exógenos.

La suposición de un sector productor de capital exógeno perturbará el comportamiento del modelo, pero no las propiedades que queremos resaltar para los dos casos extremos. En primer lugar, en el caso $\alpha = 0$, nuestro objetivo va a ser demostrar que el comportamiento de un sector es totalmente independiente del comportamiento del otro sector. Este hecho puede ser verificado tomando un sector como exógeno y demostrando que el otro sector describe un comportamiento dominado por sus propios parámetros. En relación con el caso $\alpha = 1$, nuestro objetivo va a ser demostrar, por métodos analíticos, que el comportamiento de sincronía que se observa en el diagrama $(\Delta\tau, \alpha)$ se debe al efecto fuertemente dependiente que existe entre los sectores cuando α es suficientemente grande. Cuando un sector se considera como exógeno, que las variables que lo gobiernan van a estar en equilibrio. Si demostramos que el otro sector también tiende al equilibrio, podremos afirmar que, efectivamente, el comportamiento de un sector arrastra el comportamiento del otro.

Haciendo uso de las ecuaciones 3.16, 3.17, propias de la consideración de exogeneidad de un sector con respecto a otro, en el modelo 3.2, obtenemos una reducción de las ecuaciones hasta un número de cuatro, considerando bajo estudio exclusivamente aquellas correspondientes a las variables que definen el sector no exógeno j , ya que el resto se mantienen en el equilibrio. Estas son:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ji} &= x_i - x_i^e - \frac{K_{ji}}{\tau_i} \\ \dot{K}_{jj} &= x_j - x_j^e - \frac{K_{jj}}{\tau_j} \\ \dot{B}_i &= O_{ji} - (x_i - x_i^e) \\ \dot{B}_j &= O_{jj} - (x_j - x_j^e) \end{aligned} \quad (3.18)$$

con $x_h^e \equiv \frac{S_h^e}{B_h/x_h}$ donde $h = i \text{ ó } j$; x_h^e es la parte proporcional de la producción

del sector h que se destina al sector exógeno, que es la unión del sector productor de capital considerado como exógeno y el sector productor de bienes. Este valor lo consideramos constante, y coincide con la suma del nivel de pedidos de capital tipo h efectuados por los sectores exógenos, o sea, la demanda de este tipo de capital.

Como ya lo hemos mencionado, esta simplificación ya se ha utilizado para el estudio analítico del modelo de onda larga (Rasmussen et al. 1985, Brøns y Sturis 1991). No obstante, estos autores imponen más restricciones sobre las funciones que gobiernan la producción y los pedidos que nosotros no vamos a incorporar. En este sentido, este modelo es más aproximado al modelo original que lo era la simplificación del modelo de onda larga.

Entonces, el modelo 3.18 ya es más fácilmente tratable. Vamos a enfocar con esta reducción el análisis de los casos extremos.

3.4 Caso de independencia entre los sectores

Imponer $\alpha = 0$ es suponer que para la producción de uno de los sectores no es necesario, en absoluto, el capital producido por el otro sector, con lo que los sectores se consideran independientes. El comportamiento analítico del modelo reducido habría de ajustarse a un comportamiento cíclico en las variables que definen el sector no exógeno, cuyo periodo y amplitud son independientes del otro sector.

Para comprobar esta afirmación, imponemos la condición $\alpha = 0$ en las ecuaciones del modelo 3.18. Obtenemos dos grupos de ecuaciones desacopladas, cuya expresión desarrollada es la siguiente:

$$\dot{B}_j = \frac{K_{jj}}{\tau_j} g \left(\frac{\frac{K_{jj}}{\tau_j} + \frac{\kappa_{jj} B_j / \delta_j - K_{jj}}{\tau_j^K} + \frac{B_j / x_j K_{jj} / \tau_j - (B_j - S_j^e)}{\tau_j^S}}{\frac{K_{jj}}{\tau_j}} \right) - f \left(\frac{B_j / \delta_j}{\kappa_{jj}^{-1} K_{jj}} \right) \kappa_{jj}^{-1} K_{jj} + x_j^e \quad (3.19)$$

$$\dot{K}_{jj} = f \left(\frac{B_j / \delta_j}{\kappa_{jj}^{-1} K_{jj}} \right) \kappa_{jj}^{-1} K_{jj} - x_j^e - \frac{K_{jj}}{\tau_j}$$

$$\dot{B}_i = \frac{K_{ji}}{\tau_i} g \left(\frac{\frac{K_{ji}}{\tau_i} - \frac{K_{ji}}{\tau_i^K} + \frac{B_i / x_i K_{ji} / \tau_i - (B_i - S_i^e)}{\tau_i^S}}{\frac{K_{ji}}{\tau_i}} \right) - f \left(\frac{B_i / \delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ii}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ii} + x_i^e \quad (3.20)$$

$$\dot{K}_{ji} = f \left(\frac{B_i / \delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ii}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ii} - x_i^e - \frac{K_{ji}}{\tau_i}$$

El sector i se encuentra en equilibrio, de manera que, como ya se ha expuesto antes, la producción del sector i , x_i , es idéntica a su producción deseada, que es la razón entre los atrasos totales y la demora media de distribución. O sea:

$$x_i = f \left(\frac{B_i / \delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ii}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ii} = \frac{B_i}{\delta_i} \quad (3.21)$$

Seguimos utilizando, sin embargo, la expresión anterior, ya que no supone dificultad en el estudio posterior.

Como son dos grupos de ecuaciones desacopladas, podemos estudiarlas separadamente:

- **Sistema 3.19:**

Este es, para las variables que definen el sector j , (B_j, K_{jj}) , una versión más sofisticada del modelo enunciado por Rasmussen et al. (1985),

simplificación del modelo de onda larga. En el sistema aquí expuesto la expresión de los pedidos deseados es más compleja, siendo más ajustada al modelo original.

Obviamos entonces el estudio analítico de este sistema dinámico, ya que es similar al modelo generador de onda larga expuesto en Sterman (1985). Así, el sistema manifiesta, para un amplio rango de parámetros, un comportamiento de ciclo límite de periodo variable (dependiente, entre otros factores, del tiempo de vida medio del capital producido por ese sector, τ_j).

Entonces, observando los parámetros que intervienen en el modelo, el sector j admite un comportamiento cíclico independiente de los parámetros que definen el sector i , exógeno. Basta entonces analizar cómo se comportan las variables K_{ji} (capital de tipo i existente en el sector j) y B_i (atrasos del sector i) para conocer cómo evoluciona el sistema en su totalidad.

• **Sistema 3.20:**

El sistema a estudiar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{B}_i &= \frac{K_{ji}}{\tau_i} g \left(\frac{\frac{K_{ji}}{\tau_i} + \frac{K_{ji}}{\tau_i^K} + \frac{B_i/x_i K_{ji}/\tau_i - (B_i - S_i^e)}{\tau_i^S}}{\frac{K_{ji}}{\tau_i}} \right) - f \left(\frac{B_i/\delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ii}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ii} + x_i^e \equiv \\ &\equiv h_1(B_i, K_{ji}) \\ \dot{K}_{ji} &= f \left(\frac{B_i/\delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ii}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ii} - x_i^e - \frac{K_{ji}}{\tau_i} \equiv h_2(B_i, K_{ji}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Estudiaremos el comportamiento de las soluciones de este sistema utilizando métodos clásicos dentro de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos, que ya desarrollamos en el capítulo II. Calcularemos, en

principio, sus puntos de equilibrio, y posteriormente observaremos el comportamiento local del sistema en esos puntos de equilibrio. Completaremos el análisis efectuando el estudio del comportamiento global del sistema. El hecho de ser un sistema de dimensión dos facilita el trabajo, ya que sólo pueden existir conjuntos ω -límites que sean puntos, órbitas cerradas o combinaciones de ellos, como viene asegurado por el Teorema de Poincaré-Bendixon (sección 2.5).

Puntos de Equilibrio:

Mediante un cálculo sencillo se comprueba que la única solución constante del sistema 3.20 es $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_i^e, 0)$. En el espacio de fases aparece, entonces, un punto de equilibrio situado en $(S_i^e, 0)$ (figura 3.5). Veamos el comportamiento local de este punto de equilibrio.

Comportamiento local en el punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$:

Vamos a calcular el signo de los valores propios de la matriz jacobiana de la función que define el sistema. Puesto que:

$$\begin{aligned} \dot{B}_i &= h_1(B_i, K_{ji}) \\ \dot{K}_{ji} &= h_2(B_i, K_{ji}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

llamando $h \equiv (h_1, h_2)$, se demuestra de una manera sencilla que el jacobiano de esta función en el punto de equilibrio es:

$$Jh(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial B_i}(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) & \frac{\partial h_1}{\partial K_{ji}}(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial B_i}(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) & \frac{\partial h_2}{\partial K_{ji}}(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{\delta_i} & \frac{1}{\tau_i} \\ \frac{1}{\delta_i} & -\frac{1}{\tau_i} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Los valores propios de este Jacobiano son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\delta_i}) < 0$. Entonces, el punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_i^e, 0)$ es no hiperbólico, por lo que no aseguramos su estabilidad asintótica local (sección 2.4).

Por tanto, necesitamos estudiar el comportamiento cualitativo global del sistema para conocer la estabilidad del punto de equilibrio y, en general, sus posibles conjuntos límites.

Comportamiento global del sistema:

Desarrollando esta sección obtendremos una visión completa de cómo se comporta cualitativamente el sistema en su conjunto. Como hemos visto en el capítulo anterior, no se trata de hallar exactamente el conjunto de soluciones particulares, sino conocer cuál es el comportamiento asintótico de las mismas, que es lo que realmente nos interesa.

Para ello, un método clásico en la teoría cualitativa, utilizado ya en otros trabajos relacionados con el tema (Rasmussen et al. 1985), es el cálculo de las isoclinas. Isoclina es el conjunto formado por los valores de las variables con las que obtengo la misma pendiente en una ecuación diferencial dada. Vamos a establecer una definición más rigurosa:

Definición 11 Sea $(*) : \dot{x}_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, una ecuación diferencial en x_i . Dado $c \in \mathbb{R}$, se define "isoclina en c de la ecuación $(*)$ " al conjunto:

$$Isoc_{x_i}(c) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \dot{x}_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}$$

Con un análisis en profundidad de las isoclinas en cero de nuestro modelo $(Isoc_{B_i}(0), Isoc_{K_{ji}}(0))$ tendremos completado el comportamiento

asintótico de las soluciones en el espacio de fases del sistema. Tras un desarrollo teórico, podemos asegurar que el espacio de fases adopta la forma de la figura 3.5.

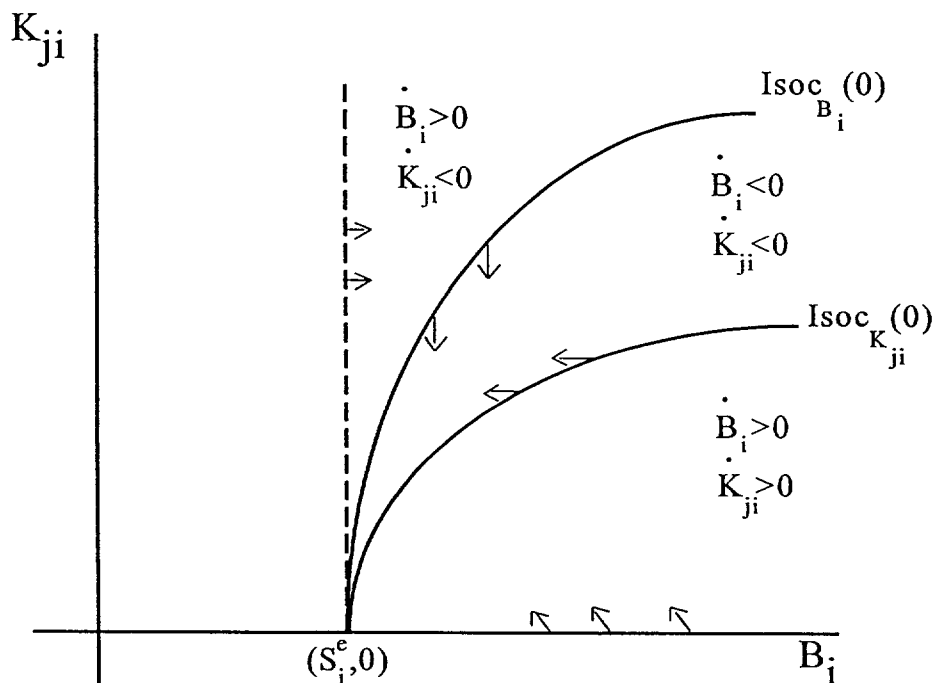


Figura 3.5: Caso $\alpha = 0$. Espacio de fases para las variables B_i y K_{ji} . Las flechas indican la dirección y sentido que han de seguir las trayectorias del sistema en los puntos indicados. Se demuestra que la isoclina de la ecuación correspondiente a B_i se sitúa siempre por encima de la isoclina correspondiente a K_{ji} .

A partir de la disposición del espacio de fases podemos resolver la cuestión principal de este apartado:

Teorema 12 *Dado el sistema 3.20, el punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_i^e, 0)$ es asintóticamente estable globalmente.*

Demostración: Sea $\phi_t : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ el flujo del sistema 3.20. Dada una condición inicial cualquiera (B_i^*, K_{ji}^*) , podemos construir un rectángulo a partir de las rectas $B_i = S_i^e$ y $K_{ji} = 0$, como en la figura 3.6, que incluya a esa condición inicial. Notemos por Γ al conjunto interior junto con la frontera del rectángulo así construido. Este conjunto Γ es cerrado, acotado, y positivamente invariante, luego, como consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixon (teorema 7), el conjunto límite de la solución $\phi_t(B_i^*, K_{ji}^*)$ ha de incluir un punto de equilibrio o un ciclo límite dentro de Γ . No admite ciclo límite, ya que habría de contener un punto de equilibrio en su dominio acotado asociado (teorema 8), que no existe porque el único punto de equilibrio se encuentra en la frontera del conjunto. Por lo tanto, el conjunto límite de $\phi_t(B_i^*, K_{ji}^*)$ ha de ser el punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$. O sea, $\phi_t(B_i^*, K_{ji}^*) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$.

Como (B_i^*, K_{ji}^*) es un punto arbitrario, cualquier solución del sistema admite el punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ como conjunto ω -límite, por lo que la cuenca de atracción de este punto de equilibrio es todo el dominio de definición. Entonces $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es asintóticamente estable globalmente.

†

Resumiendo, el modelo de dos sectores (3.2), considerando el grado de dependencia entre los sectores $\alpha=0$ y un sector i exógeno, se transforma en un modelo de dos grupos desacoplados de dos ecuaciones diferenciales cada uno. Uno es el formado por las variables B_j y K_{jj} (3.19), y el otro por las variables B_i y K_{ji} (3.20). El sistema formado por (B_j, K_{jj}) admite un ciclo límite de amplitud y periodo dependiente de los parámetros que gobiernan el sector j . Por otro lado, el sistema formado por las variables (B_i, K_{ji}) admite el punto $(S_i^e, 0)$ como punto de equilibrio asintóticamente estable globalmente.

Esto quiere decir que el sector no considerado exógeno, debido a la nula dependencia para su producción del capital procedente del otro sector, tiende

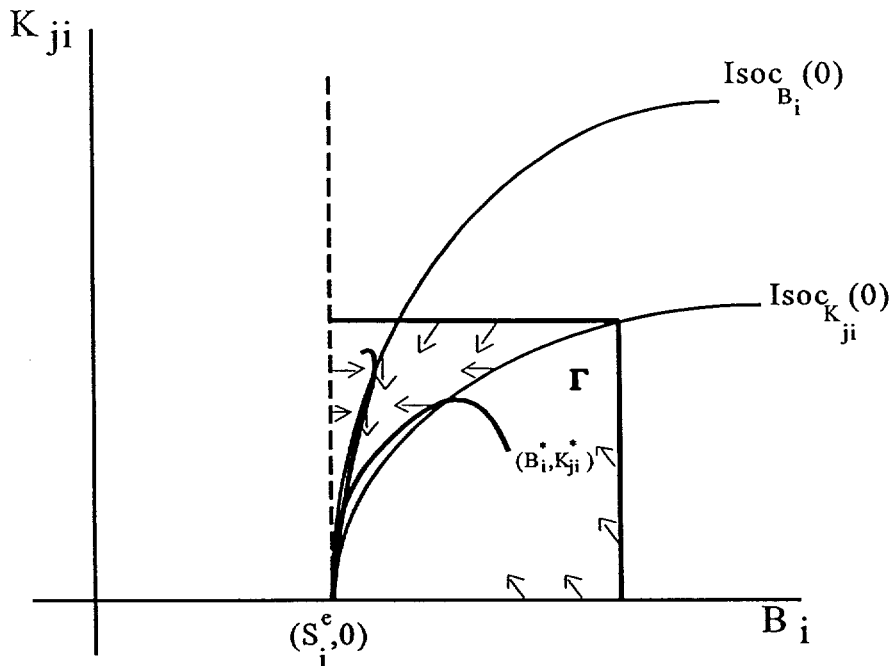


Figura 3.6: Caso $\alpha = 0$. Evolución de las trayectorias del sistema formado por las variables B_i y K_{ji} . El punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_i^e, 0)$ es asintóticamente estable globalmente.

a reducir a cero las existencias de capital que posee del otro sector, K_{ji} , que se realiza a través de la depreciación de este capital inutilizado. A su vez, los atrasos del sector exógeno, B_i , se van a reducir únicamente a los producidos por la demanda de su propio sector y el sector productor de bienes de consumo, ambos considerados como exógenos. El sector no considerado exógeno muestra asintóticamente un comportamiento cíclico cuya amplitud y periodo dependen, exclusivamente, de los parámetros que gobiernan su proceso de producción. Como se muestra, estos resultados están acordes con la idea intuitiva de independencia entre los sectores.

Además, para este caso ($\alpha = 0$), el punto de equilibrio no es hiperbólico, con lo que el sistema no es estructuralmente estable (sección 2.4). Esto quiere decir que, para pequeñas variaciones de los parámetros, por ejemplo

$\alpha > 0$, $\alpha \simeq 0$, el comportamiento del modelo puede cambiar drásticamente. De esta manera, podemos respaldar la idea que, para cualquier valor del grado de dependencia entre los sectores, por pequeño que sea, se produce acoplamiento.

3.5 Caso de dependencia total entre los sectores

Nos disponemos a realizar el estudio analítico del modelo cuando se supone una dependencia máxima del capital disponible del otro sector para la propia producción de un sector. Esto quiere decir que el factor de participación del capital procedente del sector ajeno es máximo ($\alpha=1$). Como puede observarse en la figura 3.4, Kampmann et al. (1994) efectuaron simulaciones para el caso de α muy elevado, estudiando el comportamiento en un sólo sector y considerando el otro como exógeno, al igual que lo hacemos nosotros. Los resultados indican que se produce un comportamiento estable del modelo, colapsando las variables en unos valores fijos, sin producir un comportamiento cíclico.

Vamos a demostrar analíticamente esta evidencia, de la que sacaremos nuevas interpretaciones. Para ello, partimos del modelo reducido 3.18. Ahora, imponiendo $\alpha=1$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{B}_j &= \frac{K_{jj}}{\tau_j} g \left(\frac{\frac{K_{ji}}{\tau_j} - \frac{K_{jj}}{\tau_j^k} + \frac{B_j/x_j K_{jj}/\tau_j - (B_j - S_j^e)}{\tau_j^s}}{\frac{K_{jj}}{\tau_j}} \right) - f \left(\frac{B_j/\delta_j}{\kappa_j^{-1} K_{ji}} \right) \kappa_j^{-1} K_{ji} + x_j^e \equiv \\ &\equiv h_1(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \end{aligned}$$

$$\dot{K}_{jj} = f \left(\frac{B_j/\delta_j}{\kappa_j^{-1} K_{ji}} \right) \kappa_j^{-1} K_{ji} - x_j^e - \frac{K_{jj}}{\tau_j} \equiv h_2(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji})$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_i &= \frac{K_{ji}}{\tau_i} g \left(\frac{\frac{K_{ji}}{\tau_i} + \frac{\kappa_{ji} B_j / \delta_j - K_{ji}}{\tau_i^K} + \frac{B_i / x_i K_{ji} / \tau_i - (B_i - S_i^e)}{\tau_i^S}}{\frac{K_{ji}}{\tau_i}} \right) - f \left(\frac{B_i / \delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ij}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ij} + x_i^e \equiv \\ &\equiv h_3(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\dot{K}_{ji} = f \left(\frac{B_i / \delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ij}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ij} - x_i^e - \frac{K_{ji}}{\tau_i} \equiv h_4(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji})$$

Como en el caso anterior, el sector exógeno se encuentra en equilibrio, lo que conduce a que su producción, x_i , se ajusta exactamente a la producción deseada, x_i^* , que es la razón entre sus atrasos y su demora de distribución media.

Esto es:

$$x_i^* = f \left(\frac{B_i / \delta_i}{\kappa_{ii}^{-1} K_{ij}} \right) \kappa_{ii}^{-1} K_{ij} = \frac{B_i}{\delta_i} \tag{3.26}$$

Obsérvese que, en este caso, a diferencia con el anterior, no disponemos de ecuaciones desacopladas, con lo que el análisis es más complejo. Empezamos, como anteriormente, hallando los puntos de equilibrio del sistema:

Puntos de Equilibrio:

Un sencillo cálculo lleva a comprobar que existe una única situación de equilibrio intertemporal en el sistema. Esta es la siguiente:

$$(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_j^e, 0, \delta_i(x_i^e + x_j^e \frac{\kappa}{\tau}), \frac{\kappa_{ji}}{\delta_j} S_j^e) \tag{3.27}$$

Nos disponemos a estudiar el comportamiento local del sistema dinámico en un entorno del punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$, del cual Kampmann et al (1994) ya anunciaron que poseía un comportamiento estable.

Comportamiento local en el punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$:

Para analizar el comportamiento local del sistema en un entorno del punto de equilibrio, he de analizar los valores propios de la matriz Jacobiana

del MIT y ejecutivos de diversos sectores del mundo empresarial, en el cual la estimación media de los dos parámetros era muy parecida ($\tau_j^K=100/55$, $\tau_j^S=100/40$). Por tanto, podemos considerar que se cumple:

$$\frac{\tau_j^K}{\tau_j^S} < 1 \ll \frac{\tau_h}{\delta_h} \quad h \in \{1, 2\} \quad (3.29)$$

No obstante, esta restricción indica que, en caso de no verificarse, el punto de equilibrio podría dejar de ser estable, modificando radicalmente su comportamiento cualitativo.

Aún no tenemos estudiado completamente el comportamiento de cualquier solución del sistema 3.25. En principio, sería posible que, a pesar de comportarse de forma estable en un entorno del punto de equilibrio, pueda existir un ciclo límite asintóticamente estable o cualquier otro conjunto para el cual algunas soluciones, que se encuentran fuera de la cuenca de atracción del punto de equilibrio, converjan hacia él. Los resultados de las simulaciones niegan este comportamiento. Con el siguiente estudio lo demostraremos.

Comportamiento global del sistema:

La dificultad intrínseca para el estudio global de este sistema es que su espacio de fases es de dimensión cuatro, con lo que a la complejidad que supone el aumento de dimensión con respecto al otro caso, se le añade que el sistema pierde muchas de las propiedades analíticas ciertas en dimensión dos, analizadas en la sección 2.5. El Teorema de Poincaré-Bendixon no se puede aplicar, y los conjuntos límites, que es el objeto de nuestro estudio, pueden adoptar estructuras muy diversas, incluso caóticas, como son los llamados atractores extraños. Para salvar este problema, vamos a intentar utilizar un método consistente en estudiar dos grupos de ecuaciones por separado, comprobando que su comportamiento cualitativo es el mismo para cualquier valor que tomen las variables no consideradas en este grupo. Este método

de la función que define el sistema. Notando $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, definido de la forma:

$$\begin{aligned} h(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) &\equiv \\ &\equiv (h_1(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}), h_2(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}), h_3(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}), h_4(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji})) \end{aligned}$$

Calculando las sucesivas derivadas parciales en el punto de equilibrio, la matriz jacobiana obtenida es la siguiente:

$$Jh(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_j^S} + \frac{\xi}{\delta_j}\right) \frac{1}{\tau_j} + \left(\frac{\delta_j}{\tau_j} - \frac{\tau_j^S}{\tau_j^K}\right) \frac{1}{\tau_j^S} & 0 & -\kappa_j^{-1}(1 - f'(1)) \\ \frac{1}{\delta_j} f'(1) & -\frac{1}{\tau_j} & \kappa_j^{-1}(1 - f'(1)) \\ \frac{\kappa_{ji}}{\delta_j \tau_j^K} & 0 & -\frac{1}{\tau_j^S} - \frac{1}{\delta_i} \frac{1}{\tau_i} - \left(\frac{1}{\tau_j^K} - \frac{\delta_i}{\tau_i \tau_j^S}\right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_i} \quad \quad \quad -\frac{1}{\tau_i} \end{pmatrix}$$

Un pequeño cálculo nos permite concluir que, dadas las condiciones siguientes sobre los parámetros:

$$\frac{\tau_j}{\delta_j} > \frac{\tau_j^K}{\tau_j^S} \quad ; \quad \frac{\tau_i}{\delta_i} > \frac{\tau_j^K}{\tau_j^S} \quad (3.28)$$

todos los valores propios de $Jh(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ tienen parte real menor estrictamente que cero. Por lo tanto, podemos asegurar que el punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji}) = (S_j^e, 0, \delta_i(x_i^e + x_j^e \frac{\kappa}{\tau}), \frac{\kappa_{ji}}{\delta_j} S_j^e)$, en virtud del Teorema 3, es asintóticamente estable localmente.

Las condiciones 3.28 impuestas sobre los parámetros son perfectamente aseguradas para valores reales de los mismos. Por un lado, el tiempo de vida del capital producido por cada sector es lógicamente varias veces superior a la demora de distribución media de ese sector ($\tau_h > \delta_h, \forall h \in \{1, 2\}$). Así se manifiesta en los parámetros tomados en varios trabajos previos, como por ejemplo $\tau=20, \delta=3$ (Rasmussen et al. 1985) ó $\tau=20, \delta=3/2$ (Sterman y Mosekilde 1993). Por otro lado, los coeficientes de ajuste τ_j^K, τ_j^S , suelen tomar valores más próximos entre sí, hecho mostrado empíricamente en Sterman (1989a) mediante un experimento realizado con un muestra de estudiantes

asegurará que el comportamiento global del sistema es el mismo que la unión de los dos comportamientos individuales.

Los dos grupos que vamos a estudiar son: las ecuaciones correspondientes a las variables B_j y K_{jj} por un lado, y las correspondientes a B_i y K_{ji} por otro.

- Ecuaciones correspondientes a B_j y K_{jj} :

Nos centramos en el estudio del sistema siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{B}_j &= \frac{K_{jj}}{\tau_j} g \left(\frac{\frac{K_{jj}}{\tau_j} - \frac{K_{jj}}{\tau_j} + \frac{B_j/x_j K_{jj}/\tau_j - (B_j - S_j^e)}{\tau_j^S}}{\frac{K_{jj}}{\tau_j}} \right) - f \left(\frac{B_j/\delta_j}{\kappa_j^{-1} K_{ji}} \right) \kappa_j^{-1} K_{ji} + x_j^e \equiv \\ &\equiv h_1(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\dot{K}_{jj} = f \left(\frac{B_j/\delta_j}{\kappa_j^{-1} K_{ji}} \right) \kappa_j^{-1} K_{ji} - x_j^e - \frac{K_{jj}}{\tau_j} \equiv h_2(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \quad (3.31)$$

La variable K_{ji} , que corresponde al otro grupo de variables, consideramos que puede tomar valores arbitrarios.

Entonces, se demuestra que el punto $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) = (S_j^e, 0)$ es el único punto de equilibrio del sistema 3.30 y 3.31 para cualquier valor de K_{ji} . Al encontrarnos en dimensión dos, resulta más sencillo analizar el comportamiento global del sistema. Como en el caso anterior, un método útil para estudiar este comportamiento es hallar las isoclinas en cero ($Isoc_{B_j}(0), Isoc_{K_{jj}}(0)$), y observar el comportamiento de las soluciones en las regiones del espacio de fases delimitadas por estas isoclinas.

El desarrollo analítico del cálculo de las isoclinas en cero se ha efectuado, junto con el estudio de otros elementos, utilizando las propiedades de las funciones que definen el modelo con respecto a la derivación implícita.

Entonces, el espacio de fases del sistema formado por las ecuaciones 3.30 y 3.31 adopta la forma de la figura 3.7.

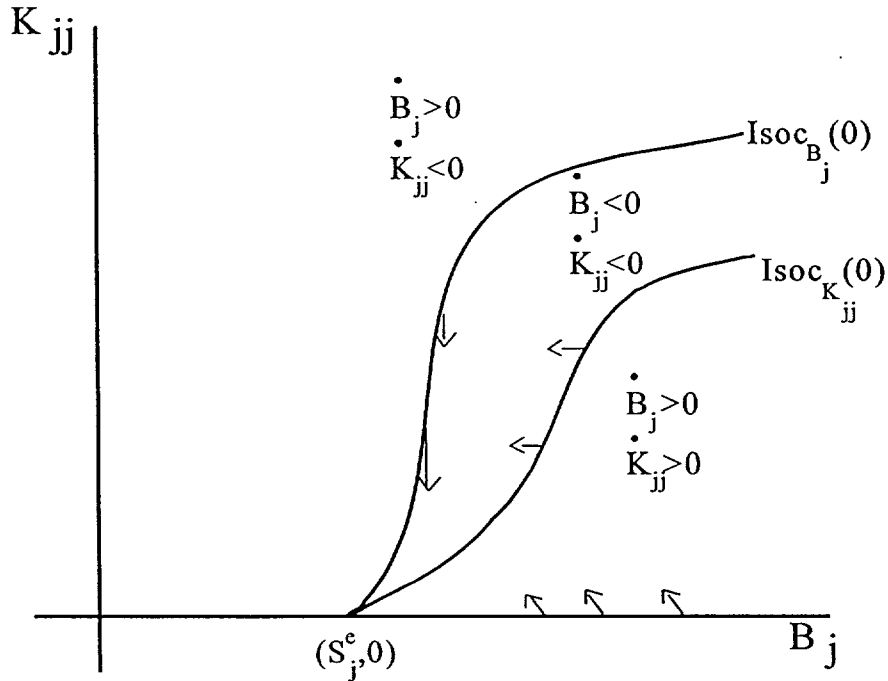


Figura 3.7: Caso $\alpha = 1$. Espacio de fases para el sistema formado por las variables B_j y K_{jj} . La representación es similar al caso $\alpha = 0$.

Se demuestra que esta representación es correcta siempre que $\tau_j > 1 + \delta_j/\tau_j^S$, que es trivialmente cierto para valores de los parámetros ajustados a la realidad, como ya hemos indicado en el apartado anterior. Este diagrama es cualitativamente el mismo sea cual sea el valor de la variable K_{ji} .

Estamos en disposición de enunciar el siguiente teorema:

Teorema 13 *Sea el sistema 3.30 y 3.31, con K_{ji} arbitraria pero fija. Entonces el punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) = (S_j^e, 0)$ es asintóticamente*

estable globalmente.

Demostración: Daremos una demostración intuitiva. Dada cualquier condición inicial (B_j^*, K_{jj}^*) , podemos construir un conjunto cerrado, acotado y positivamente invariante, Γ , que incluya este punto (ver figura 3.8). Como el flujo del sistema siempre apunta hacia adentro, la solución $\phi_t(B_j^*, K_{jj}^*)$ se va aproximando cada vez más hacia la intersección entre las isoclinas, que es el punto de equilibrio. Un poco más formalmente, es posible construir una sucesión $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos positivamente invariantes, con $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1}$, con el punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) \in \Gamma_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y tal que contengan a $\phi_t(B_j^*, K_{jj}^*)$, para cualquier $t \geq t_n$, de manera que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \{(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj})\}$. Por tanto, $\phi_t(B_j^*, K_{jj}^*) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (\bar{B}_j, \bar{K}_{jj})$. Como la condición inicial es arbitraria, concluimos que $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) = (S_j^e, 0)$ atrae las trayectorias iniciadas en cualquier punto de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. El punto $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) = (S_j^e, 0)$ es asintóticamente estable globalmente. (Ver figura 3.8)

†

Por tanto, cualquier trayectoria del sistema formado por las ecuaciones 3.30 y 3.31 es convergente a un punto de equilibrio, sea cual fuere la situación que presente el resto del sistema. Vamos a analizar entonces el comportamiento de las variables B_i y K_{ji} . Como el punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj})$ es asintóticamente estable globalmente, podemos considerar $B_j = \bar{B}_j$, $K_{jj} = \bar{K}_{jj}$, y analizar el sistema restante haciendo uso de las propiedades de los sistemas planos.

- Ecuaciones correspondientes a B_i y K_{ji} :

Nos centramos en el estudio cualitativo del sistema:

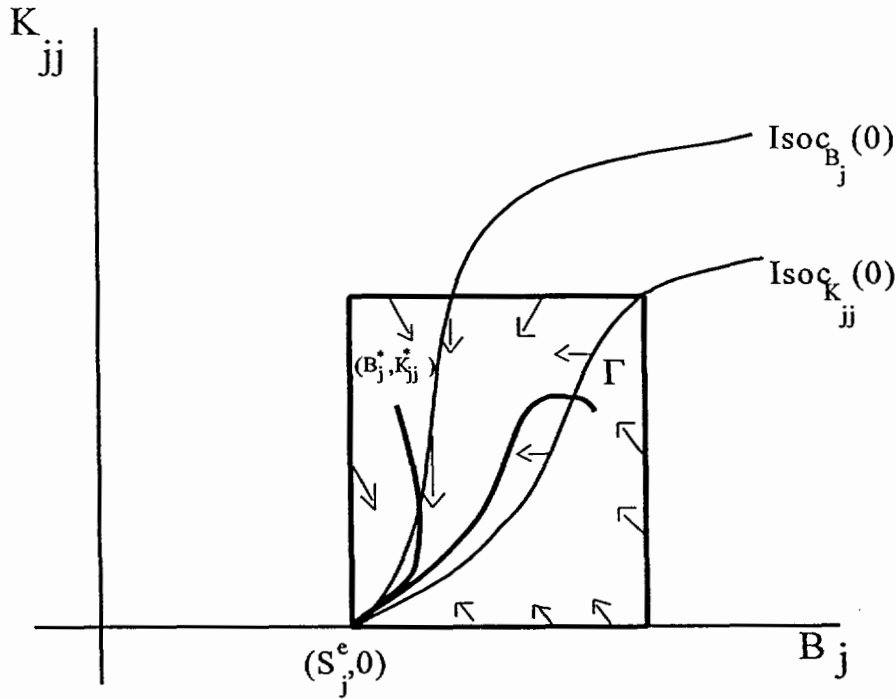


Figura 3.8: Caso $\alpha = 1$. Evolución de las trayectorias en el espacio de fases de las variables B_j y K_{jj} . El punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}) = (S_j^e, 0)$ es asintóticamente estable globalmente.

$$\dot{B}_i = \frac{K_{ji}}{\tau_i} g \left(\frac{\frac{K_{ji}}{\tau_i} + \frac{\kappa_{ji} B_j / \delta_j - K_{ji}}{\tau_i^K} + \frac{B_i / x_i K_{ji} / \tau_i - (B_i - S_i^e)}{\tau_i^S}}{\frac{K_{ji}}{\tau_i}} \right) - \frac{B_i}{\delta_i} + x_i^e \equiv h_3(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \quad (3.32)$$

$$\dot{K}_{ji} = \frac{B_i}{\delta_i} - x_i^e - \frac{K_{ji}}{\tau_i} \equiv h_4(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \quad (3.33)$$

Evidentemente, para $B_j = \bar{B}_j$, $K_{jj} = \bar{K}_{jj}$, el único punto de equilibrio del sistema 3.32 y 3.33 es $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$. Para efectuar el análisis, vamos a volver sobre el estudio de las isoclinas en cero $(Isoc_{B_i}(0)), Isoc_{K_{ji}}(0)$, siendo en este caso más complejo que el anterior. Esta complejidad se basa en la función $g(\cdot)$ que rige los pedidos. La otra función no lineal $f(\cdot)$ no influye cualitativamente en este estudio, debido a la naturaleza

exógena de uno de los sectores. Utilizamos para el cálculo de la estructura cualitativa de las isoclinas la derivación implícita y los cortes con las rectas $B_i = \bar{B}_i$ y $K_{ji} = \bar{K}_{ji}$. El resultado de este análisis, representado en el espacio de fases, se encuentra en la figura 3.9.

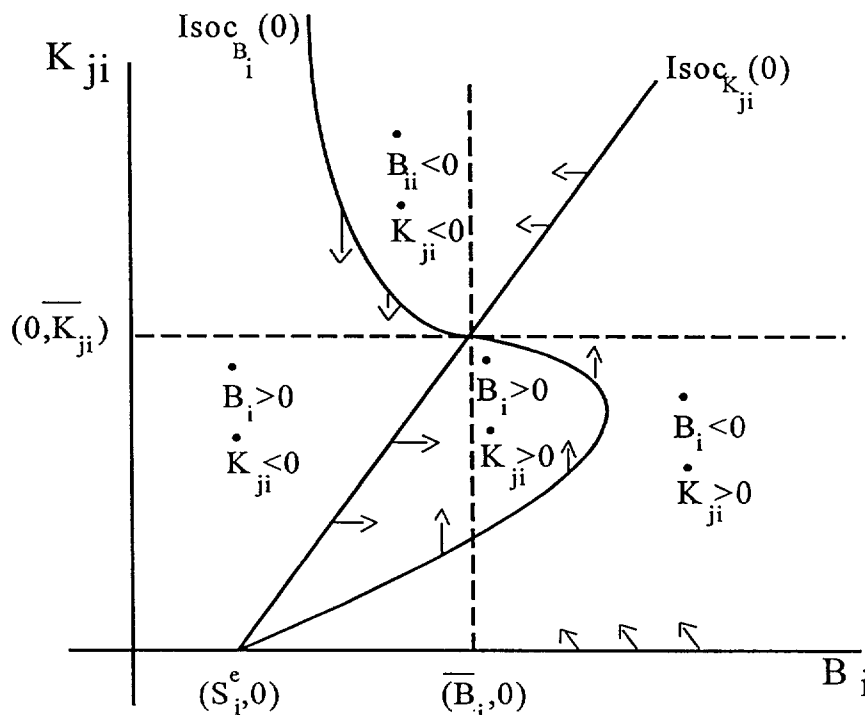


Figura 3.9: Caso $\alpha = 1$. Espacio de fases del sistema formado por las variables B_i y K_{ji} . La forma gráfica de las isoclinas ha sido contrastada mediante el uso del programa "Mathematica".

Vamos a demostrar que $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable globalmente. A partir de la gráfica 3.9, podemos construir el conjunto Γ definido como el cierre del poliedro de vértices (B_j^0, K_{ji}^0) , el corte entre la isoclina $Isoc_{K_{ji}}(0)$ y la recta $K_{ji} = K_{ji}^0$ [notémoslo por (B_i^1, K_{ji}^1)], entre la isoclina $Isoc_{K_{ji}}(0)$ y la recta $B_i = B_i^0$ [notémoslo por (B_i^2, K_{ji}^2)], y entre la isoclina $Isoc_{B_i}(0)$ y la recta $K_{ji} = K_{ji}^2$ [notémoslo por (B_i^3, K_{ji}^3)], que se demuestra que siempre existen. Este conjunto es compacto (cerrado y acotado), atrae todas las soluciones

del sistema, y es positivamente invariante.

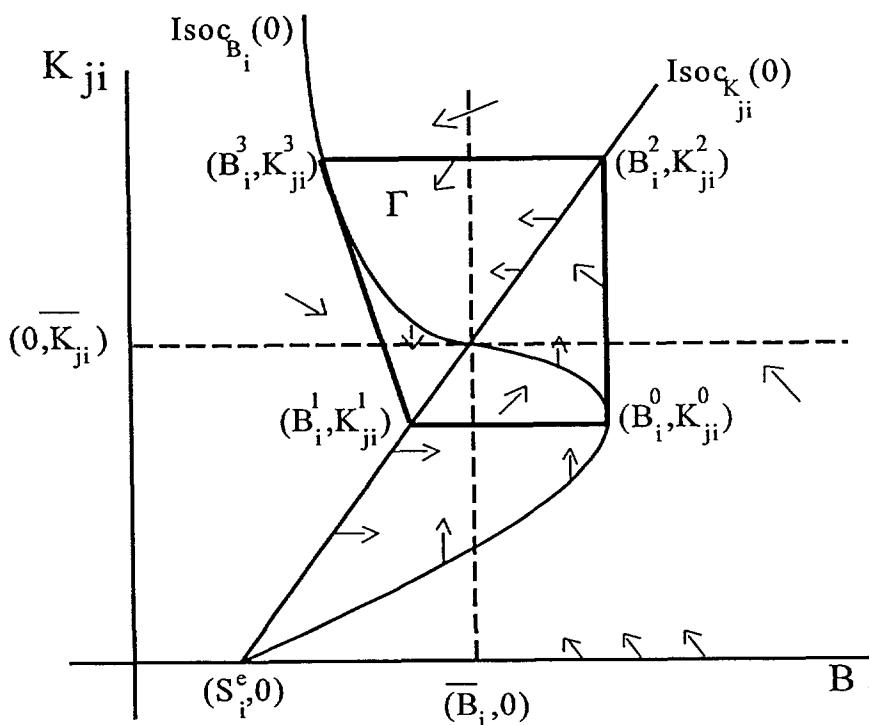


Figura 3.10: Caso $\alpha = 1$. Construcción del conjunto Γ . El cierre de este conjunto es positivamente invariante.

Por tanto, en virtud del teorema 7, en Γ ha de existir un conjunto ω -límite, que puede estar formado únicamente por el punto de equilibrio, o también junto alguna órbita cerrada alrededor de él. Por medio de la demostración del siguiente teorema, comprobaremos que este segundo caso no es posible.

Teorema 14 *Sea el sistema 3.32 y 3.33. Entonces, el punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es asintóticamente estable globalmente.*

Para demostrar este teorema haremos uso de otros resultados previos, ya expuestos en el capítulo II, y de un teorema clásico de la teoría de

sistemas dinámicos que vamos seguidamente a enunciar (ver Hirsch y Smale 1974).

Lema 1 (Fórmula de Liouville) Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$; $f : W \mapsto \mathbb{R}^n \in C^1$. Sea $\phi_t(x)$ el flujo del sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$. Sea γ una órbita cerrada de periodo λ de este sistema dinámico. Sea $p \in \gamma$. Entonces¹:

$$\det(D\phi_t(p)) = \exp \left\{ \int_0^\lambda \text{Tr } Df(\phi_t(p)) dt \right\} \quad (3.34)$$

Estamos en condiciones de demostrar el teorema 14.

Demostración: Dadas las ecuaciones 3.32 y 3.33:

$$\begin{aligned} \dot{B}_i &\equiv h_3(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \\ \dot{K}_{ji} &\equiv h_4(B_j, K_{jj}, B_i, K_{ji}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

LLamando $H_i \equiv (h_3, h_4)$, y $p \equiv (K_{ji}, B_i)$, las ecuaciones se nos transforman en:

$$\dot{p} = H_i(p) \quad (3.36)$$

Notemos $\phi_t(p)$ su flujo.

Supongamos que existe una órbita cerrada γ_1 en el sistema 3.36. Por lo razonado anteriormente, necesariamente γ_1 ha de encontrarse en el conjunto Γ . Por lo tanto, al ser una órbita cerrada, ha de rodear al único punto de equilibrio existente (teorema 8), con lo que, necesariamente, esta órbita cerrada ha de cortar a $Isoc_{B_i}(0)$, con $K_{ji} < \bar{K}_{ji}$ (figura 3.11). Sea $p^* = (K_{ji}^*, B_i^*)$ ese punto de corte. Calculamos la traza de la diferencial:

$$\text{Tr } DH_i(\phi_t(p^*)) = \frac{\partial h_1}{\partial K_{ji}} + \frac{\partial h_2}{\partial B_i} < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

¹La abreviatura $\text{Tr } A$ indica traza de la matriz A .

Esto es cierto para cualquier $p^* \in Isoc_{B_i}(0)$ con $K_{ji} < \bar{K}_{ji}$. Entonces, dado λ periodo de γ_1 :

$$\det(D\phi_t(p^*)) = \exp \left\{ \int_0^\lambda \text{Tr } DH_i(\phi_t(p^*)) dt \right\} < 1 \quad (3.37)$$

Como el sistema es de dimensión dos, $D\phi_t(p^*)$ admite dos valores propios μ_1, μ_2 . Necesariamente, uno de ellos ha de ser igual a uno ($\mu_1 = 1$). Como el determinante es menor que uno (3.37), $\mu_2 < 1$. Por el teorema 4, la órbita cerrada γ_1 es asintóticamente estable.

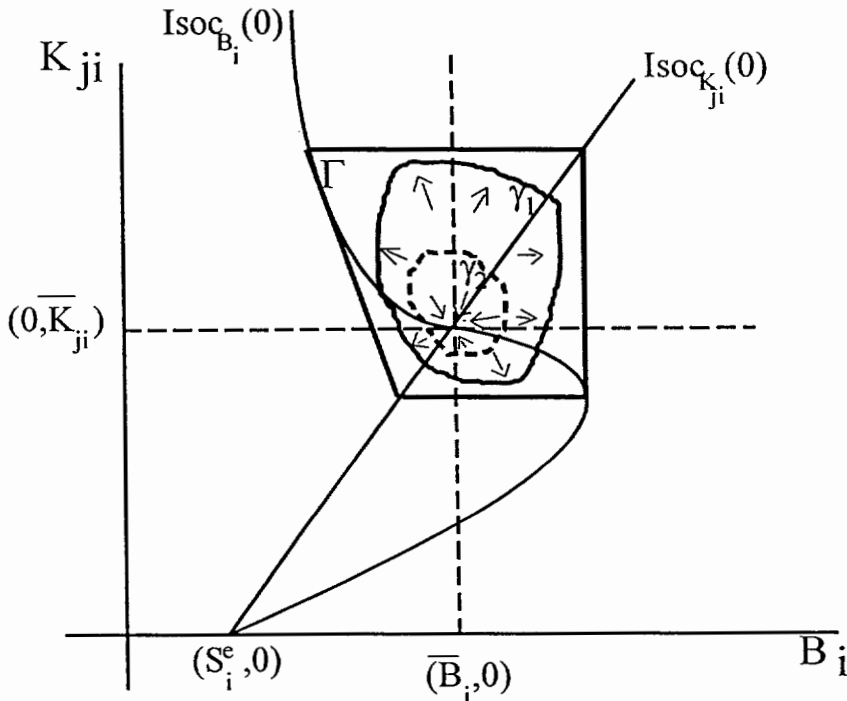


Figura 3.11: Caso $\alpha = 1$. Construcción del conjunto Ω_{γ_1} . Necesariamente debe existir una órbita cerrada γ_2 , inestable, en el interior de Ω_{γ_1} .

Definamos el conjunto Ω_{γ_1} como el dominio acotado asociado a γ_1 (figura 3.11). Como $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es asintóticamente estable localmente, existe un entorno $\mathcal{U}_{(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})}$ de ese punto cuyas soluciones que parten de él convergen al punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$. Por otro lado, como γ_1 es asintóticamente estable localmente, existe un entorno \mathcal{V}_{γ_1} alrededor de

la órbita cuyas soluciones que partan de ese entorno convergen a γ_1 . Obsérvese entonces que toda solución que se encuentre en Ω_{γ_1} ha de haber partido de Ω_{γ_1} . Esto quiere decir que Ω_{γ_1} es negativamente invariante.

Por el teorema 7, todo conjunto compacto negativamente invariante contiene un α -límite en su interior. Como el único punto de equilibrio en Ω_{γ_1} , $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$, es asintóticamente estable, no puede ser un α -límite, con lo que necesariamente existe una órbita cerrada γ_2 que es un ciclo α -límite en Ω_{γ_1} . Entonces γ_2 es inestable, al ser un ciclo α -límite. #

Esto es una contradicción, ya que hemos comprobado previamente que *toda* órbita cerrada que se encuentre en Γ ha de ser asintóticamente estable. Sin embargo, $\gamma_2 \in \Omega_{\gamma_1} \subseteq \Gamma$ y es inestable. La hipótesis de partida no es cierta, no existe ninguna órbita cerrada $\gamma_1 \subseteq \Gamma$. Como Γ es positivamente invariante y compacto, el conjunto ω -límite ha de ser el único punto de equilibrio existente en Γ , o sea, $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$. Entonces $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es un punto asintóticamente estable globalmente (figura 3.12).

†

Por lo tanto, podemos asegurar que el comportamiento global del sistema 3.25 es tal que el punto de equilibrio $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es asintóticamente estable globalmente.

¿Es robusto este comportamiento frente a pequeñas variaciones en las ecuaciones del modelo?. Como en este sistema existe un único punto de equilibrio hiperbólico asintóticamente estable, podemos asegurar, a la luz del teorema 5, que el sistema 3.25 es estructuralmente estable. Por lo tanto, el comportamiento del modelo es cualitativamente el mismo frente a pequeñas variaciones en las ecuaciones que lo definen. Así, al variar ligeramente el parámetro α ($\alpha < 1$, $\alpha \simeq 1$) y considerando un sector exógeno, también existe un único punto de equilibrio del nuevo modelo, cercano a $(\bar{B}_j, \bar{K}_{jj}, \bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ y

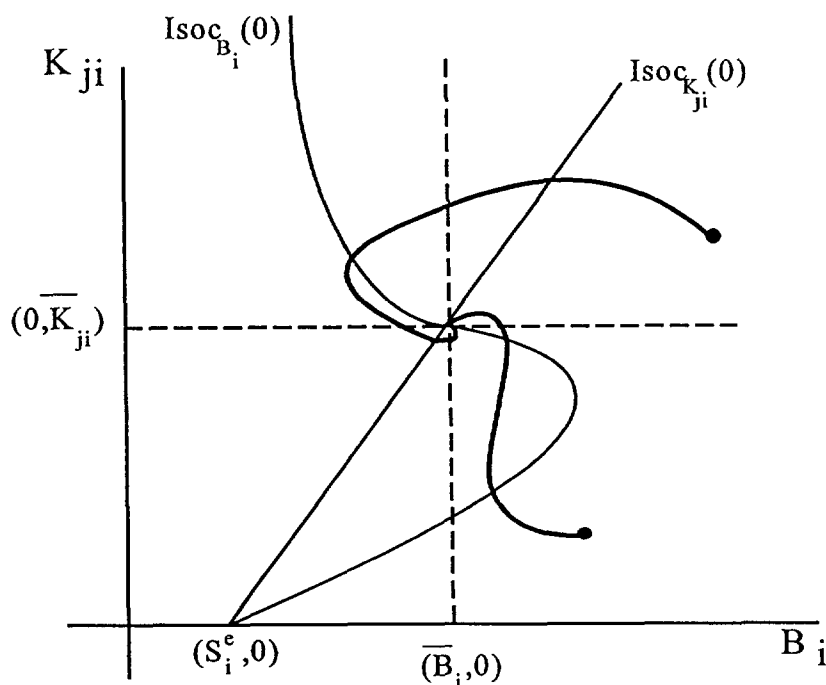


Figura 3.12: Caso $\alpha = 1$. Evolución de las trayectorias sobre el espacio de fases del sistema formado por las variables B_i y K_{ji} . El punto de equilibrio $(\bar{B}_i, \bar{K}_{ji})$ es asintóticamente estable globalmente.

asintóticamente estable globalmente.

Entonces, podemos concluir que, para valores cercanos a la unidad en el grado de dependencia de un sector con respecto a otro, y al considerar uno de ellos como exógeno, las variables relacionadas con el sector no exógeno colapsan hacia unos valores estables. Por tanto, podemos afirmar que el sector no exógeno tiende a un equilibrio, con lo que hemos mostrado que el comportamiento del sector exógeno, en equilibrio, arrastra al sector no exógeno a otro equilibrio. De esta manera, ilustramos la causa por la que la sincronización rellena todo el espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ para valores altos de α .

3.6 Discusión

Como ya lo hemos mencionado previamente, no se habían presentado, hasta hace relativamente pocos años, modelos que intentaran explicar el proceso de acoplamiento entre los ciclos económicos desde un enfoque no lineal. En este sentido, este modelo de dos sectores supone un avance con respecto a los anteriores al incorporar procesos endógenos en la sincronización y acoplamiento de ciclos. El estudio realizado por los autores originales Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994) se basa en la descripción, por medio de simulaciones sucesivas, de las lenguas de Arnol'd que se producen en el diagrama formado por los parámetros del modelo α y $\Delta\tau$. Los resultados dan respuesta satisfactoria al objetivo inicial de modelizar el fenómeno de acoplamiento entre ciclos económicos. Se observó, además, la presencia de rutas hacia al caos frecuentes en este tipo de modelos, como son las bifurcaciones sucesivas de desdoblamiento de periodo.

En este trabajo proponemos otra vía de estudio de este modelo complementaria a las simulaciones, que es el estudio analítico. Este estudio no sólo supone una contrastación de los resultados de las simulaciones, sino que descubre nuevos aspectos de la dinámica del modelo muy difíciles de resaltar mediante el uso de la simulación.

Hemos centrado este estudio analítico en dos casos especiales, caso de nula dependencia entre los sectores para la producción de cada sector, $\alpha = 0$, y el caso de exclusiva dependencia del otro sector para la propia producción, $\alpha = 1$. Estas situaciones son deseables de estudiar analíticamente, además de por ser casos degenerados y, por tanto, más fácilmente tratables, porque las funciones que gobiernan el modelo toman valores fuera del control numérico y las simulaciones no dan respuesta precisa del comportamiento del sistema. En cambio, el estudio analítico, por su naturaleza, no deja lugar a errores de

aproximación.

Existen muchos aspectos de la dinámica del modelo que este trabajo ha descubierto. Uno de ellos es la hiperbolicidad o no de los puntos de equilibrio. Así, debido a que el punto de equilibrio en el caso $\alpha = 0$ es no hiperbólico, hemos encontrado una condición necesaria de punto de bifurcación en esta situación. Entonces podemos apoyar la idea de que el acoplamiento surge para cualquier valor del grado de dependencia entre los sectores.

Por otro lado, hemos descubierto, en base a ciertos teoremas presentados en el capítulo II, que la situación $\alpha = 1$ es estructuralmente estable en nuestro modelo simplificado. Por tanto, podemos asegurar que la evolución del sistema para los casos $\alpha < 1$, $\alpha \simeq 1$ es cualitativamente la misma que para el caso $\alpha = 1$. Así, para esta situación $\alpha < 1$, $\alpha \simeq 1$, el comportamiento de un sector está fuertemente ligado al comportamiento del otro sector, idea que respalda la presencia de sincronización 1 : 1 para valores del grado de dependencia cerca del máximo. Además, hemos presentado una condición necesaria entre los parámetros (ecuación 3.28) para que se verifique el comportamiento anterior.

No obstante, los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser ampliados, tanto desde la vía de simulaciones, como desde la vía analítica. Como ya fue indicado por los propios autores originales del modelo, las lenguas de Arnol'd no han sido del todo desentrañadas. Nuevas simulaciones, así como la ayuda de trabajos similares utilizados en otros campos de la ciencia (Knudsen et al. 1991, Gallas 1994, Sturis et al. 1995), podrían ser de una gran ayuda.

El modelo es una fuerte simplificación de la realidad económica. Como ya propusieron los autores originales, podemos llevar a cabo múltiples ampliaciones que aproximen mejor el modelo a la realidad. Una de ellas es

la incorporación de más sectores en la economía. Tomando en consideración la discusión de la sección 2.6 y el teorema de Ruelle, Takens y Newhouse de 1978 (ver Lorenz 1993), esta ampliación daría lugar también a comportamientos mucho más complejos, incluso caóticos, ya que combinamos, al menos, tres osciladores interdependientes.

Existe otro elemento económico importante aún no considerado en el modelo y que puede modificar los resultados actuales. Este es el sistema de precios. Tomar en consideración este factor proporcionaría la posibilidad de sustituibilidad de los factores de producción. Este elemento ya fue presentado como importante en el modelo de onda larga de Sterman (1985), expresando la relación que existe entre la demanda de un tipo de capital y su precio. A este empeño se han dedicado los últimos esfuerzos elaborados por los autores, y del que han obtenido un nuevo sistema construido a partir del anterior (Kampmann 1996). Como ya fue indicado por los mismos autores, junto con la incorporación del sistema de precios, sería bueno introducir también otro tipo de indicadores macroeconómicos, como el dinero, tipos de interés o trabajo. Ello supondría añadir ciertos elementos manejables por la política económica, lo que enriquecería el análisis del acoplamiento entre ciclos económicos, al poder observar la respuesta del mismo frente a diferentes acciones que se tomen. Para ello se puede hacer uso de la relación entre este modelo con otros que incorporen estos factores, de manera que la combinación produzca uno nuevo más completo. A esta labor nos dedicaremos en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Resultados (II): Modelo desagregado monetario de acoplamiento entre ciclos económicos

4.1 Introducción

El modelo desagregado de onda larga desarrollado por Kampmann et al. (1994), del que hemos hecho un estudio analítico en el capítulo precedente, presenta una buena explicación endógena y no lineal del fenómeno de acoplamiento producido entre los ciclos económicos. No obstante, existen muchos factores y circunstancias reales que influyen en el desarrollo económico que no han sido considerados en este modelo. Esto es debido a que el propósito del modelo era obtener una estructura económica mínima que genere endógenamente dos comportamientos oscilatorios, y se den condiciones para la aparición de acoplamiento entre estos modos cíclicos. El modelo deja así abierta la posibilidad de ampliaciones con la incorporación de múltiples elementos, como un número mayor de sectores, el sistema de precios y salarios,

nuevos activos como el dinero u otros activos financieros, un mercado de trabajo no transparente, etc. Agregar muchos de estos elementos supondría ajustar las variables del modelo basándose en la teoría económica desarrollada hasta al momento (ver capítulo I).

Con el propósito de buscar un acercamiento mayor a la realidad, el modelo anterior fue ya ampliado por el mismo autor en Kampmann (1996). En este trabajo se introduce el sistema de precios en una economía con la estructura del mercado de bienes como la del modelo anterior, pero con más sectores productores de capital interviniendo en ella. La introducción del sistema de precios posibilita la sustituibilidad entre los factores de producción. Esta sustituibilidad viene expresada por la forma en que los sectores fijan su decisión de inversión, basada en la minimización del coste medio a largo plazo a precios actuales. Por otro lado, los precios de cada producto i se fijan instantáneamente según el cociente entre la producción deseada de ese bien y la capacidad productiva del sector por medio de la ecuación:

$$p_i = \left(\frac{x_i^*}{c_i} \right)^\varepsilon \quad (4.1)$$

De esta manera las variaciones del precio están reguladas por el parámetro ε que indica el grado de *respuesta del precio* a variaciones en la demanda (Kampmann 1996). Cuanto mayor sea este valor, mayor es el efecto de las variaciones de la demanda sobre el precio del bien.

La incorporación de sustituibilidad entre los factores de producción supone un nuevo nexo de unión entre los sectores. Esto es debido a que la demanda de cada capital depende de su precio, y éste está determinado por las fluctuaciones en la demanda de ese bien con respecto a los demás capitales. Es de esperar, por tanto, que las regiones de acoplamiento se ensanchen con respecto al caso anterior. De hecho, las simulaciones de este modelo que hemos efectuado confirman las previsiones. Hemos tomado en estas simulaciones el

caso de dos y tres sectores, para poder comparar los resultados con respecto al modelo anterior y con respecto a un número mayor de sectores. La región de sincronía, tomando dos sectores, aumenta con respecto al modelo desagregado de onda larga, siendo el nuevo parámetro ε un factor influyente, ya que las regiones de sincronía aumentan a medida que aumentamos el valor de este parámetro. Por otro lado, al tomar tres sectores, el comportamiento del modelo es más irregular. Esta situación era esperable en virtud de la discusión expuesta al final de la sección 2.6.

Este último modelo es una buena ampliación del modelo desagregado de onda larga que propone una explicación del efecto equilibrante que tiene el sistema de precios entre los sectores. No obstante, la forma con que los precios se ajustan es instantánea, con lo que no se tiene en cuenta ciertos retardos de tipo información que pudieren haber desde los cambios en la demanda hasta su efecto concreto en los precios. Por otro lado, el modelo no incorpora otros factores de tipo macroeconómico que pueden afectar al nivel de precios y su influencia en la demanda, como son la existencia del activo dinero en la economía, tasas de inflación, tipos de interés o expectativas. Introducir estos elementos en el modelo desarrollado en Kampmann et al. (1994) supondría considerar la influencia de factores monetarios en el desarrollo del acoplamiento entre los ciclos económicos. A priori, esta influencia es difusa, aunque en estudios previos, como en Sterman (1986), puede observarse un efecto favorable al sostenimiento de la onda larga en el caso agregado.

El objetivo de este capítulo es, concretamente, ampliar el modelo desagregado de onda larga, considerando, con las mismas relaciones en el mercado de bienes, el activo dinero en la economía con un número cualquiera de sectores. De esta manera, podemos comparar los nuevos resultados con respecto a los anteriores enfoques más ideales en los cuales no se considera costes de transacción y, por tanto, ninguna razón de mantener dinero. Así, esta

extensión del modelo supone la incorporación de la teoría monetaria dentro del modelo desagregado de onda larga y la posibilidad de contrastar, en base al acoplamiento entre los ciclos económicos y con las evidentes restricciones de simplificación de la realidad, diversas hipótesis sobre el efecto del dinero en la economía que han sido fuente de debate a lo largo de la historia.

Seguidamente, vamos a exponer someramente las diversas teorías que han surgido a lo largo de la historia sobre las consecuencias de la existencia de dinero en la economía, así como ciertos modelos que han incorporado el dinero en su desarrollo con el objeto de contrastar estas teorías. Vamos a utilizar uno de estos modelos para construir la ampliación del modelo desagregado de onda larga que propondremos.

4.1.1 El dinero en la teoría y modelización económica

La mayoría de los primeros modelos no lineales desarrollados en economía no incorporaban los factores monetarios como elementos integrantes del mismo. Sin embargo, el dinero juega un papel esencial en economía y su influencia en la evolución de las variables reales ha sido siempre fuente de debate entre los economistas. Uno de los puntos conflictivos es la neutralidad del dinero, esto es, si el cambio de variables de tipo monetario, como el crecimiento de la oferta de dinero, afectan al valor real de variables como la renta, producción, ahorro e inversión, o, por el contrario, se reflejan únicamente en una variación proporcional de los precios (ver Zhang 1990 para una revisión histórica de la evolución de las corrientes de pensamiento sobre la influencia del dinero en la economía).

Es comúnmente aceptado que el dinero no es neutral a corto plazo. Cambios en la oferta monetaria generan cambios en la producción y empleo durante un periodo más o menos corto de tiempo, como ha podido ser

empíricamente demostrado, por ejemplo, en la recesión de principios de la década de los 80 que sufrió EE.UU. como consecuencia de un recorte brusco en el crecimiento de la oferta monetaria. No obstante, a largo plazo no hay un acuerdo generalizado. Existen teorías como el Monetarismo, ya presentada en el capítulo I y basada en el precedente clásico de la teoría cuantitativa defendida por Fischer a principios de siglo, que propone que cambios de tipo monetario generan una desestabilización temporal de las variables reales pero que, a largo plazo, la economía se sitúa en la misma senda anterior, y la tasa de inflación de ajusta igual a la tasa de crecimiento monetario en ese instante.

En el proceso intermedio de ajuste de la inflación a la tasa de crecimiento monetario es importante tener en cuenta las *expectativas de inflación* que los agentes económicos forman a lo largo de sucesivos periodos, ya discutido en la sección 1.3. Estas expectativas influyen en la rapidez con la que las variables reales de la economía vuelven a su senda anterior tras un cambio monetario. Los monetaristas, en general, tomaban las *expectativas adaptativas*, que indican que el agente fija sus expectativas igual a la tasa de inflación que existe en el periodo anterior. La otra alternativa es la hipótesis de *expectativas racionales*, que propone que el agente no comete errores sistemáticos en la formación de sus previsiones, sino que utiliza toda la información disponible a su alcance, con lo que establecen predicciones correctas (Sheffrin 1996).

Bajo la hipótesis de expectativas racionales, el efecto de una modificación esperada del crecimiento en la oferta monetaria es inmediatamente incorporada en las previsiones, con lo que las variables reales no se ven afectadas por este cambio, produciéndose únicamente una variación en la inflación. Si los cambios no son esperados, las variables reales se ven afectadas a corto plazo hasta que los agentes corrigen sus errores y toman correctas previsiones. Sin embargo, bajo la hipótesis de expectativas adaptativas, los efectos de cambios monetarios pueden prolongarse más en el tiempo. Analizaremos estas discusiones en

nuestro modelo.

Basándose en las teorías que defienden la neutralidad del dinero, se desarrollaron una serie de modelos, en general de tipo lineal con la introducción de impulsos exógenos aleatorios, que proporcionan el sostenimiento de comportamientos irregulares de las variables. Podemos destacar, por ejemplo, los modelos de Lucas (1973), Laidler (1973) o Sargent y Wallace (1975). En particular, el modelo de Laidler (1973) intenta explicar la interacción que se produce entre la renta, los precios, y la oferta monetaria, por medio de un relación lineal. Los resultados no son muy satisfactorios, aunque proporcionan una interesante vía de aproximación. Lucas (1973) contrasta, mediante un modelo lineal que incorpora la hipótesis de expectativas racionales, la relación entre la inflación y la producción real, llegando, en caso de expectativas anticipadas, a resultados negativos. En la misma línea, Sargent y Wallace (1975) analizan el efecto de una política monetaria sobre la economía, asumiendo un modelo lineal autorregresivo o uno basado en expectativas racionales. Los resultados son diferentes en uno u otro caso, verificando neutralidad del dinero en caso de asumir expectativas racionales con previsión perfecta.

Sin embargo, otros economistas proponen la no neutralidad del dinero a largo plazo. Entre ellos, Tobin (1965) presenta un modelo basado en las mismas hipótesis neoclásicas del modelo de Solow con la incorporación de factores monetarios. Por simplicidad, el dinero se introduce como un activo más exclusivamente por motivos de déficit público. Se trata, entonces, de un modelo con estructuras no lineales, localizadas en la función de demanda de dinero, que está basada en principios keynesianos, y en la función de producción, de tipo neoclásico. Este modelo es similar al llamado modelo de Solow con dinero (Andréu y Calvo 1987), sólo que el de Tobin incluye la depreciación del capital y supone la economía sin sector público. Tobin analizó en su modelo

el comportamiento neutral del dinero, llegando a resultados negativos de la misma forma que los obtenidos con el modelo de Solow con dinero.

El modelo de Tobin dio lugar a numerosos trabajos posteriores que se basaban en las mismas hipótesis propuestas por Tobin con algunas variaciones (Hadjimichalakis 1971a, 1971b, Benahbib y Miyao 1981). Estos trabajos perfeccionaron las hipótesis de Tobin y presentaron un buen estudio analítico de los sistemas de ecuaciones diferenciales que el modelo incorporaba. Nosotros vamos a utilizar los fundamentos de estos sistemas para introducir el dinero en el modelo desagregado de onda larga. Es útil, por tanto, realizar un pequeño estudio de las ecuaciones que estructuraban estos modelos así como sus resultados más sobresalientes antes de presentar nuestro modelo.

4.1.2 **Modelo monetario de Tobin y posteriores**

En pocas palabras, el modelo de Tobin (1965) considera una economía agregada con el mercado de trabajo en equilibrio, donde la riqueza puede ser mantenida por medio de dos tipos de activos: bienes de capital y dinero. Por simplicidad, suponemos que el dinero es introducido por las autoridades monetarias sin coste y por motivos exclusivos de déficit público. Desde el lado de la producción, se basa en el modelo de crecimiento neoclásico (ver Andréu y Calvo 1987), donde la producción es una función homogénea del capital y trabajo y se destina a satisfacer la demanda de inversión o consumo. Sin embargo, a diferencia de los modelos neoclásicos, el dinero es otro activo más, de manera que el ahorro se reparte entre inversión o dinero.

Como la riqueza se reparte entre los dos activos, la renta disponible neta en cada instante, y , está definida como la suma de la producción neta en ese

instante más la variación del dinero real en la economía. De esta forma:

$$y = x - \frac{K}{\tau} + (\dot{M}/p) \quad (4.2)$$

donde x es la producción bruta de la economía, K es nivel de existencias de capital en ese instante con τ el tiempo de vida medio del capital. M indica la cantidad nominal de dinero en la economía y p el nivel de precios. El último sumando, (\dot{M}/p) , indica el crecimiento del dinero real existente en la economía. Suponiendo una propensión marginal al ahorro constante, s , Tobin propone que la inversión en capital en cada instante está determinada por:

$$\dot{K} = s\left(x - \frac{K}{\tau} + (\dot{M}/p)\right) - (\dot{M}/p) \quad (4.3)$$

El primer sumando, $s\left(x - \frac{K}{\tau} + (\dot{M}/p)\right)$, indica el ahorro privado de la economía, y la diferencia indica el ahorro social total de la economía, al sustraerle al ahorro privado el déficit presupuestario real por parte de las autoridades monetarias¹. A esta ecuación se le llama *ecuación fundamental de Tobin*. Otra forma de presentar esta ecuación es la siguiente:

$$\dot{K} = s\left(x - \frac{K}{\tau}\right) - (1 - s)(\dot{M}/p) \quad (4.4)$$

El modelo de Tobin considera también que el mercado de dinero se encuentra en equilibrio. De esta manera, la demanda de dinero real es satisfecha continuamente por la oferta monetaria. Por tanto:

$$m = g(\cdot) \quad (4.5)$$

¹El fondo filosófico que subyace en esta ecuación fue descrito con acierto por Hadjimichalakis (1971a), el cual expone que la suposición de introducción del dinero por motivos exclusivos de déficit público equipara totalmente lo que sería política monetaria con política fiscal. En este sentido, la política monetaria explícita en el modelo no explicaría el fenómeno monetario en sentido estricto, y la no neutralidad del dinero sería entonces una consecuencia de esta restricción. No obstante, el aspecto monetario de la política fiscal viene determinado en la ecuación 4.3 al observarse que el déficit del gobierno no es compensado por el ahorro social debido a que el gobierno está satisfaciendo la demanda del activo dinero.

donde m es la cantidad de dinero real por unidad de trabajo, o sea, $m = \frac{M}{pL}$, siendo L el trabajo disponible en ese instante. El valor de m representa, entonces, la oferta monetaria real existente en la economía, que se iguala a la demanda de dinero real $g(\cdot)$.

Siguiendo las hipótesis keynesianas, vamos a considerar que la demanda de dinero real por parte de los agentes económicos viene determinada fundamentalmente por dos motivos. Uno de ellos es el motivo transacción, que es aquel basado en la necesidad de cubrir los gastos de transacciones realizadas en la economía. Es, por tanto, directamente proporcional al volumen de producción de la economía por unidad de trabajo, x/L . Como la función de producción es de tipo neoclásico, podemos sustituir este cociente por la función de producción por unidad de trabajo, notémosla $f(k)$, con $k = K/L$. Este motivo era el único considerado por la teoría cuantitativa clásica. Baumol en 1952 y posteriormente Tobin en 1956 introdujeron el tipo de interés en la economía, r , como otro factor que determina esta motivación. El otro motivo a considerar es el motivo especulación, introducido inicialmente por Keynes, nosotros vamos a utilizar las hipótesis posteriores de Tobin en 1958. El deseo de poseer riqueza en forma de dinero por este motivo es inversamente proporcional al tipo de interés de la economía, r , que indica el coste de oportunidad de mantener riqueza en ese determinado bien (ver Laidler 1977 para una revisión de las diversas teorías sobre la demanda de dinero).

Para determinar el tipo de interés, r , vamos a seguir la aproximación neoclásica al respecto. La productividad marginal del capital por unidad de trabajo en una economía, notémoslo por $f'(k)$, está en equilibrio y es igual al coste de alquiler del capital, rc . No teniendo en cuenta la tasa de impuestos, el coste de alquiler del capital está determinado por la tasa de interés real esperada de la economía, que es la diferencia entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación esperada, más la tasa de depreciación por unidad de

capital, $\frac{1}{\tau}$. Por tanto, dadas estas hipótesis, podemos asegurar que:

$$r = f'(k) + \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e - \frac{1}{\tau} \quad (4.6)$$

siendo $\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e$ la *tasa de inflación esperada o expectativas de inflación* en la economía. Así, la ecuación 4.6 indica el coste de oportunidad de mantener la riqueza en forma de dinero en lugar de en forma de capital. La ecuación 4.5 la podemos enunciar indicando las variables que definen la demanda de dinero consideradas en este modelo:

$$m = g(f(k), r) = g\left(f(k), f'(k) + \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e - \frac{1}{\tau}\right) \quad (4.7)$$

Las derivadas parciales de esta función $g(\cdot)$ las consideramos de signo constante, con $g_{f(k)} > 0$ y $g_r < 0$. Podemos escribir esta función directamente dependiente de las variables k y r por medio de la composición de funciones. Arrastramos la misma notación para esta composición. De esta manera:

$$m = g(k, r) \quad (4.8)$$

con derivadas parciales $g_k > 0$, $g_r < 0$. También pudiéramos notar esta función con las variables k y $\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e$, por lo que:

$$m = g\left(k, \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e\right) \quad (4.9)$$

conservándose en este caso $g_k > 0$, $g_{\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e} < 0$.

Para determinar las expectativas de inflación, Tobin adopta la postura racional de previsión perfecta, de manera que la variación de las expectativas es igual a la variación de la tasa verdadera de inflación. Por tanto:

$$\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e = \frac{\dot{p}}{p} \quad (4.10)$$

Por último, la variación del dinero real per cápita, m , se determina derivando su expresión, con lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$\dot{m} = \left(z - l - \frac{\dot{p}}{p}\right) m \quad (4.11)$$

El parámetro $z = \frac{\dot{M}}{M}$ indica la tasa de crecimiento en la oferta monetaria². El siguiente parámetro, l , indica la tasa de crecimiento del trabajo, que suponemos constante, o sea, $\frac{\dot{L}}{L} = l$.

Por tanto, tomando una pequeña transformación de la ecuación 4.3 y la ecuación 4.11 y haciendo uso de las hipótesis de mercado monetario en equilibrio (ecuación 4.5) y expectativas racionales (ecuación 4.10), el modelo de Tobin consiste en un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s f(k) - \left(l + \frac{s}{\tau}\right) k - (1-s) \left(z + f'(k) - \frac{1}{\tau} - u(k, m)\right) m \\ \dot{m} &= \left(f'(k) + \left(z - l - \frac{1}{\tau}\right) - u(k, m)\right) m \end{aligned} \quad (4.12)$$

Este sistema incluye dos no linealidades. Una de ellas es la función de producción neoclásica de la economía $f(k)$ y otra es la función $r = u(k, m)$, que es la función implícita obtenida del equilibrio entre la función de oferta y demanda de dinero $m = g(k, r)$, que, por las condiciones de la función $g(\cdot)$, podemos asegurar que existe.

Este modelo admite, bajo determinadas circunstancias, un único punto de equilibrio. Los resultados de Tobin se centran en el valor de este punto de equilibrio en función de la existencia del dinero. Así, se comprueba que en una economía de este tipo el dinero es, en cierta manera, no neutral. Esto se realiza al considerar el modelo sin la existencia de dinero, ($m = 0$), obteniendo que la razón capital-trabajo k en el equilibrio sigue la senda natural de crecimiento indicada por el modelo neoclásico. En cambio, si incorporamos el dinero,

²De acuerdo con las hipótesis de Tobin, este es un parámetro controlado por la autoridad monetaria, exógeno y constante. Como se explica en Hadjimichalakis (1971a), ello podría dar lugar a la aparición de "ilusión monetaria" por parte del gobierno o autoridad monetaria, debido a que éste puede ajustar la tasa de crecimiento independientemente de la tasa de inflación. Este hecho no se supone en las hipótesis de Tobin.

($m \neq 0$), el valor en el equilibrio de la razón capital-trabajo es menor que en el caso de Solow. Además, la tasa de crecimiento monetario, z , afecta a este equilibrio de manera que, a mayores tasas de crecimiento, mayores valores de k en el equilibrio.

Sin embargo, Tobin no centra su análisis en la estabilidad del equilibrio. De hecho, Hadjimichalakis (1971a) demuestra que el punto de equilibrio del modelo 4.12 es, en el mejor de los casos, un punto de silla, con lo que es inestable. Resultan entonces espúreos los resultados sobre el comportamiento en el equilibrio de un modelo que nunca va a alcanzar este equilibrio. Sin embargo, el modelo de Tobin fue el primer intento de incorporar la teoría monetaria en la teoría del crecimiento económico (Zhang 1990), lo que supuso la aparición de otros modelos basados en Tobin (1965), pero con ciertas variaciones, algunas de las cuales han modificado los resultados del modelo original (Hadjimichalakis 1971a, 1971b)

Nosotros vamos a centrarnos en la aportación realizada por medio de estos trabajos de Hadjimichalakis (1971a, 1971b) y la ampliación posterior hecha por Benhabib y Miyao (1981). En estos trabajos se propone comprobar las mismas hipótesis de Tobin sobre la neutralidad del dinero, además de la estabilidad del equilibrio, en un sistema más general que el de Tobin, al considerar que el mercado de dinero puede estar en desequilibrio. Este desequilibrio en el mercado dinero afecta a los precios, de manera que una oferta excedente de dinero hace subir los precios y una demanda excedente de dinero hace bajar los precios. De esta manera, la evolución de los precios está gobernada por la ecuación:

$$\frac{\dot{p}}{p} = \xi \left[m - g(k, \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e) \right] \quad (4.13)$$

El parámetro ξ , considerado exógeno, representa la velocidad con que el precio se ajusta a las diferencias entre el dinero real existente y el

demandado. Cuanto mayor sea este parámetro, más rápido se produce este ajuste. Obsérvese que, cuando esta velocidad es muy grande ($\xi \mapsto \infty$), entonces el mercado de dinero permanece en el equilibrio, $m = g(\cdot)$.

Por otro lado, vamos a suponer que el proceso de formación de expectativas no es perfecto, sino adaptativo. Como ya hemos comentado en la anterior sección, esto implica que los agentes forman sus previsiones en base a la diferencia entre las expectativas actuales y el dato real. De esta forma la variación de las expectativas es de la siguiente manera:

$$\left[\left(\frac{\dot{p}}{p} \right)^e \right] = \beta \left(\frac{\dot{p}}{p} - \left(\frac{\dot{p}}{p} \right)^e \right) \quad (4.14)$$

Al parámetro β se le dice *coeficiente de expectativas*, también considerado exógeno, e indica la velocidad de ajuste de las expectativas a la inflación real. Esta ecuación está más de acuerdo con el pensamiento de Tobin en su artículo de 1965 y supone generalizar la hipótesis de previsión perfecta. Nótese que, en el caso que la velocidad de ajuste de las expectativas sea extremadamente grande ($\beta \mapsto \infty$), la ecuación 4.14 se transforma en la hipótesis de expectativas racionales con previsión perfecta o miopía:

$$\left(\frac{\dot{p}}{p} \right)^e = \frac{\dot{p}}{p} \quad (4.15)$$

De esta manera, la modificación del modelo 4.12 realizada por Hadjimichalakis (1971a, 1971b) presenta una economía menos restrictiva que en el caso de Tobin (1965). Es por ello que el autor lo haya bautizado como *modelo de Tobin generalizado*. Las ecuaciones del modelo son, por tanto, las siguientes³ (consideramos por simplicidad que la depreciación del capital es

³En el trabajo de Hadjimichalakis (1971b) y en el posterior trabajo de Benhabib y Miyao (1981) se considera que el precio varía no sólo de acuerdo a la oferta excedente de dinero, sino empujado por las expectativas de cambio. Esta hipótesis está de acuerdo con la influencia de las expectativas sobre la inflación real que ya hemos comentado en la anterior sección.

nula, $\frac{1}{\tau} \mapsto 0$):

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s f(k) - l k - (1 - s) (z - (\frac{\dot{p}}{p})^e) m \\ \dot{m} &= (z - l - \frac{\dot{p}}{p}) m \\ \frac{\dot{p}}{p} &= \xi \left[m - g(k, (\frac{\dot{p}}{p})^e) \right] \\ \left[(\frac{\dot{p}}{p})^e \right] &= \beta \left(\frac{\dot{p}}{p} - (\frac{\dot{p}}{p})^e \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Este sistema se puede transformar en un sistema de tres ecuaciones diferenciales, ya que podemos obtener la evolución de las variables $(k, m, (\frac{\dot{p}}{p})^e)$ independientemente de la evolución del precio. Hadjimichalakis (1971a, 1971b) comprueba que se mantiene en este modelo la hipótesis de no neutralidad del dinero presentada por Tobin. Hemos verificado también, por medio de simulaciones, que se mantiene el aumento en el punto de equilibrio estable del valor de la relación capital-trabajo, k , ante un incremento en el crecimiento de la oferta monetaria, junto con un lógico incremento de la inflación. El estudio realizado por los autores considera la economía a corto y largo plazo. Tomar la economía a corto plazo significa considerar que el capital no sufre variaciones y la población se mantiene fija, con lo que simplifican el número de ecuaciones. Sobre estas consideraciones, los autores dan condiciones suficientes sobre los parámetros para que el equilibrio fuera inestable, y condiciones suficientes y algunas también necesarias para la estabilidad local tanto en el caso a corto como a largo plazo.

Los resultados obtenidos por estos autores son posteriormente ampliados en los trabajos de Benhabib y Miyao (1981) y Zhang (1990). El primero de ellos halla una condición suficiente de estabilidad a largo plazo del modelo

De esta manera, la expresión 4.13 se transforma en la siguiente:

$$\frac{\dot{p}}{p} = \xi \left[m - g(k, (\frac{\dot{p}}{p})^e) \right] + (\frac{\dot{p}}{p})^e \quad (4.16)$$

Los resultados que vamos a presentar son similares tomando ambas formas de variar los precios, 4.13 o 4.16.

4.17 con la incorporación de la modificación 4.16. El teorema que define esta condición dice así:

Teorema 15 (Benhabib y Miyao) *El punto de equilibrio $(k^*, m^*, [(\dot{p}/p)^e]^*)$ del sistema 4.17 con 4.16 es localmente estable si se verifican las condiciones siguientes:*

$$\beta \left[\frac{-[(\dot{p}/p)^e]^* g_{(\dot{p}/p)^e}}{g(z-n)} + \frac{1}{\xi k^*} \right] + \frac{(1-s)n}{\xi k^*} \leq 1 \quad (4.18)$$

$$\frac{k^* g_k}{g} \geq 1 \quad (4.19)$$

Entonces, este resultado quiere decir que habrá más posibilidades de que el equilibrio sea estable cuanto mayor sea la velocidad de ajuste del precio, ξ , cuanto menor sea el coeficiente de expectativas, β , así como cuanto mayor sea la elasticidad de la demanda de dinero con respecto a k y menor con respecto a $(\dot{p}/p)^e$.

El resultado más interesante obtenido por estos autores es el descubrimiento de una bifurcación de Hopf en el sistema para valores del parámetro β . De esta manera, la pérdida de estabilidad del sistema en valores altos de β , para los cuales nos acercamos a la previsión perfecta, no implica necesariamente la divergencia de las soluciones sino pudiera presentarse un comportamiento cíclico sostenido (sección 2.6). Esto depende de si la bifurcación es subcrítica o supercrítica. En este sentido, el trabajo de Zhang (1990) expone unas condiciones sobre los parámetros para que la bifurcación sea en uno u otro sentido.

Los diversos resultados analíticos obtenidos por todos estos autores han sido contrastados por nosotros mediante simulaciones realizadas con el modelo de Tobin y sus ampliaciones. Estas simulaciones indican que, para valores usuales de los parámetros, la bifurcación de la que hablaba Benhabib y Miyao

(1981) se manifiesta como subcrítica, por lo que podemos considerar que el sistema diverge una vez atravesado ese punto de bifurcación. A su vez, hemos probado diversas funciones de demanda de dinero con elasticidades variadas, verificando comportamientos más estables para bajas elasticidades con respecto a las expectativas, observación acorde con el resultado del teorema 15. Elegir una función con estas características supondría considerar la influencia del motivo especulación como moderada en la economía. Cuando introduzcamos nuestro modelo ahondaremos más en esta cuestión.

4.2 Modelo con factores monetarios de acoplamiento entre ciclos económicos

4.2.1 Fundamentos del modelo

En esta sección llevaremos a cabo una ampliación del modelo desagregado de onda larga incorporando un número arbitrario de sectores e introduciendo el dinero en la economía. Así, los factores monetarios actúan como otro elemento influyente en el acoplamiento entre los ciclos económicos. Vamos a escoger, para la incorporación del dinero en la economía, las mismas suposiciones del modelo de Tobin y sus ampliaciones anteriormente descritas. Desde el lado productivo, vamos a considerar la misma situación que el modelo desagregado de onda larga con un número mayor de sectores productores de capital. Esta ampliación, motivada con el fin de acercar más el modelo a la realidad, descubre además nuevas posibilidades al comportamiento del mismo para variaciones en elementos antes no considerados. De esta manera, seguimos una de las líneas propuesta por Kampmann et al. (1994) y Haxholdt et al. (1994) como futuras investigaciones.

Modelizar una economía que incluya las hipótesis de los modelos de

Tobin y posteriores con el modelo desagregado de onda larga ha acarreado numerosos esfuerzos de adaptación. Quizás el más conflictivo de ellos fue la desagregación de los fundamentos de los modelos monetarios en una economía de más sectores. Los modelos de Tobin y sucesivos, como la mayoría de los modelos de tipo macroeconómico y más con la inclusión del dinero, consideran la economía a nivel agregado, donde existe un sólo producto que se destina como bien de inversión o de consumo, un nivel de precios agregado y una demanda de dinero agregada. Suponer una economía desagregada obliga a adaptar en ella las hipótesis sobre la forma de introducción y de difusión del dinero. De la misma manera, ha sido necesario modificar también algunos fundamentos del modelo desagregado de onda larga para poder construir, de una forma coherente, la relación entre el dinero y los sectores productores de capital, productores de bienes de consumo y consumidores.

Salvando estas dificultades, hemos obtenido un modelo no lineal desagregado de n sectores que, endógenamente, manifiestan un comportamiento irregular en la economía. Este comportamiento está basado en las mismas características del modelo que explica el acoplamiento entre los ciclos económicos, junto con la incorporación no lineal del dinero y el sistema de precios. Además, en esta economía incluimos un elemento que vamos a considerar exógeno (crecimiento de la oferta monetaria), y que influye en el desarrollo de la misma. Este modelo podría, entonces, ser considerado como una combinación de elementos endógenos generadores de un comportamiento complejo y sostenido en la economía con otros elementos de tipo exógeno. De esta manera, hemos intentado seguir la línea propuesta por Zarnowitz (1985) (ver sección 1.3) de construcción de modelos mixtos, que incluyan factores endógenos y exógenos, como los más adecuados para explicar la realidad económica.

Como ya hemos comentado, el objetivo de la construcción de este modelo

es dar respuesta a ciertas cuestiones que va a suponer una aportación, tanto desde el punto de vista de la teoría de acoplamiento entre ciclos económicos, como desde la teoría económica. Concretamente, podemos detallar las siguientes cuestiones, algunas ya presentadas en los objetivos y las secciones precedentes:

- Zonas de acoplamiento entre los ciclos económicos según los mismos parámetros utilizados en los trabajos anteriores.
- Efecto sobre el acoplamiento entre los ciclos y sobre las variables reales y monetarias de la economía de adoptar una política expansiva o contractiva en materia de oferta monetaria.
- Efecto sobre el acoplamiento entre los ciclos y sobre las variables reales y monetarias de la economía de tomar la hipótesis de expectativas adaptativas o racionales sobre la evolución de los precios.

El modelo se fundamenta mediante un sistema con un gran número de ecuaciones diferenciales no lineales casi imposibles de estudiar analíticamente como lo hemos hecho en el capítulo III. Sin embargo, gracias a la existencia de herramientas informáticas adecuadas, es posible simular múltiples soluciones de este sistema y conocer cuál es su comportamiento. Es por ello que hemos basado nuestro trabajo en un análisis exhaustivo de la sensibilidad del modelo frente a variaciones en los parámetros y funciones principales que lo gobiernan, con vistas a dar respuesta a las anteriores cuestiones.

4.2.2 Desarrollo del modelo

Por tanto, para la introducción del dinero en el modelo desagregado de onda larga, nos basamos en las hipótesis desarrolladas por Tobin (1965) y concretadas posteriormente en diversos modelos (Hadjimichalakis 1971a, 1971b, Benhabib and Miyao 1981). Recordamos que estas hipótesis consideran

una economía con el mercado de trabajo en equilibrio, donde la riqueza puede ser mantenida por medio de bienes de capital y/o dinero. Este dinero es introducido por las autoridades monetarias sin coste. De esta manera, el ahorro se reparte proporcionalmente entre los dos activos, producción y dinero, según la decisión del inversor. La producción es función de diversos factores productivos⁴ y se destina a satisfacer la demanda de inversión o consumo. En nuestro modelo consideramos que los bienes producidos por la economía pueden utilizarse tanto como bienes de capital o como bienes de consumo. Como ejemplo de bienes que presentan esta dicotomía, podemos citar la producción de ordenadores, construcción o servicios. Por otro lado, la economía demanda dinero por motivos de tipo costes de transacción y especulativos. A diferencia del modelo de Tobin (1965), supondremos que el crecimiento de la población es nulo ($l = 0$).

El modelo supone entonces, asumiendo la misma situación que en el modelo desarrollado por Kampmann (1996), una economía desagregada en n sectores. Cada sector está definido como el conjunto de empresas productoras de un determinado bien (que puede utilizarse con fines de inversión o consumo), junto con el conjunto de consumidores de ese determinado bien. Como consumidores de un bien nos referimos a los consumidores directos así como a aquellas empresas que utilizan el bien para elaborar bienes de consumo. La otra parte del sector es la productora de bienes de inversión. Así, por ejemplo, cuando se refiere el sector de equipos informáticos, se está incluyendo el conjunto de fabricantes de estos equipos informáticos junto con el conjunto de consumidores o empresas productoras de bienes de consumo que utilizan equipos informáticos. La parte productora dentro de cada sector necesita de capital producido por su propio sector y del producido por el resto de los

⁴La función de producción, a diferencia de los modelos neoclásicos sobre los que se fundamenta el modelo de Tobin, no la vamos a considerar homogénea de grado uno, sino utilizaremos la misma función de producción introducida en el modelo de onda larga (Sterman 1985). Posteriormente detallaremos su forma concreta.

sectores para su propia producción. Por otro lado, la parte consumidora de cada sector demanda también bienes producidos en cada uno de los sectores. Estas hipótesis están bien fundamentadas en la realidad. Como ejemplo ilustrativo, suponiendo una economía dividida en dos sectores, el sector de equipos informáticos y el sector de la construcción, las hipótesis anteriores quieren decir que la parte productora del sector de equipos informáticos necesita a su vez de construcción para su propia producción y viceversa. A su vez, los consumidores de equipos informáticos demandan también construcción para su propio consumo y viceversa⁵.

Siguiendo las hipótesis del modelo de Tobin (Tobin 1965, Hadjimichalakis 1971a, 1971b), vamos a considerar la existencia de una cantidad de dinero, M , en la economía, que va siendo incrementada periódicamente por las autoridades monetarias exclusivamente por motivos de déficit presupuestario. Ha de verificarse, por tanto, una variación del capital de la misma forma que la ecuación fundamental de Tobin (ecuación 4.3). Nuestro modelo supone la economía desagregada, por lo que hemos de traducir esta ecuación al caso multisectorial. Para ello, primeramente, vamos a presentar una aproximación de cómo se distribuiría esta cantidad inicial de dinero, M , inserto en la economía. Si suponemos x_h la producción de capital del sector h en cada instante, y p_h su precio, con $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, una buena forma de medir el nivel de precios agregado en la economía es mediante la ecuación:

$$p = \frac{\sum_{j=1}^n p_j x_j}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Por lo tanto, el dinero real agregado presente en la economía viene dado

⁵La concepción de los sectores en el modelo aquí presentado difiere, entonces, de la del modelo de Kampmann (1996), que considera la existencia de un sector productor de bienes de consumo que adquiere la producción de otros n sectores productores de bienes utilizados como capital o consumo. Es necesario introducir esta modificación por coherencia con las hipótesis del modelo original de Tobin, que supone la economía agregada donde existe un único sector que incluye al mismo tiempo consumidores y productores.

por:

$$\frac{M}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{M x_i}{\sum_{j=1}^n p_j x_j} \quad (4.20)$$

Esta ecuación induce a definir $(M/p)_h \equiv \frac{M x_h}{\sum_{j=1}^n p_j x_j}$, $\forall h \in \{1, 2, \dots, n\}$, como la porción de dinero real que interviene en las transacciones y especulaciones de dinero relacionados con el producto correspondiente al sector h . Esta variable está fijada de acuerdo al volumen de producción y precio del producto en ese sector con respecto a la economía en su conjunto. Este hecho es fácilmente reconocible reescribiendo esta ecuación de la siguiente forma:

$$\left(\frac{M}{p}\right)_h = \frac{M x_h}{\sum_{j=1}^n p_j x_j} = \frac{M}{p_h} \frac{x_h}{\sum_{j=1, j \neq h}^n \frac{p_j}{p_h} x_j + x_h} \quad (4.21)$$

Esta última ecuación deja claro el buen comportamiento que tiene esta forma de asignar el dinero a un sector de la economía, al no depender exclusivamente de la producción física, sino también de los precios relativos entre los productos. Obsérvese que, si se produjera un incremento en los precios de un sector cualquiera $i \neq h$ relativos a los precios del sector h , lógicamente el dinero real asignado al sector h tendería a descender. Por otro lado, el comportamiento de esta asignación con respecto a los precios del propio sector h son también coherentes. Debido a que $\frac{\partial (M/p)_h}{\partial p_h} < 0$, un incremento en los precios del propio sector h reducen el dinero real disponible en ese sector. Así, vamos a referirnos a esta asignación como la *proporción de dinero real correspondiente al sector h* .

Siguiendo con el proceso de desagregación del modelo de Tobin, vamos a desglosar la renta neta disponible agregada, y , en la suma de cada una de las rentas netas disponibles de cada uno de los sectores, y_j . De este modo:

$$y = \sum_{j=1}^n y_j \quad (4.22)$$

Cada una de las rentas y_j , $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, vamos a desagregarlas en las rentas correspondientes del bien producido en ese sector j que se encuentran

en el sector i , y_{ij} , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces:

$$y_j = \sum_{i=1}^n y_{ij} \quad (4.23)$$

Así, por ejemplo, si dispusiéramos de dos sectores, sector de la construcción (sector 1) y sector de equipos informáticos (sector 2), la renta y_{12} indicaría la cantidad de riqueza, representada en equipos informáticos, que se encuentra en el sector de la construcción. Esto, sumado a y_{22} , que es la cantidad de equipos informáticos en el propio sector de equipos informáticos, representa la renta neta disponible total del sector de equipos informáticos, y_2 (o sea, $y_2 = y_{12} + y_{22}$). La riqueza la suponemos repartida no sólo en unidades de producción sino también en forma de dinero, como posteriormente detallaremos.

La producción de cada sector j , notémosla x_j , se distribuye completamente entre todos los sectores. Entonces, notando como x_{ij} la porción de producción del sector j distribuida al sector i , podemos asegurar que la producción total del sector j puede escribirse como:

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.24)$$

Por otro lado, notemos K_{ij} las existencias de capital producido por el sector j localizado como factor productivo en las empresas del sector i , y por τ_j el tiempo de vida medio del bien producido por el sector j utilizado como bien de inversión, donde $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Desarrollando las mismas hipótesis de Tobin (ecuación 4.2) para el caso desagregado, podemos escribir la renta disponible desagregada, y_{ij} , de la siguiente manera:

$$y_{ij} = x_{ij} - \frac{K_{ij}}{\tau_j} + \gamma_{ij}(M/p)_i \quad (4.25)$$

con $\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = 1$, donde γ_{ij} indica la proporción del dinero real correspondiente

al sector i "asignado" a las relaciones comerciales con el sector j ⁶. Estamos entonces en disposición de introducir la siguiente ecuación:

$$\dot{K}_{ij} = s(x_{ij} - \frac{K_{ij}}{\tau_j} + \gamma_{ij}(\dot{M}/p)_i) - \gamma_{ij}(\dot{M}/p)_i, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.26)$$

Esta ecuación, que podemos definir como *ecuación fundamental de Tobin desagregada*, incorpora las mismas hipótesis originales de Tobin sobre la evolución de cada una de las existencias de capital procedente del sector j localizados en cada sector i , con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Cada sector i consume una proporción constante $1 - s_{ij}$ de la renta disponible desagregada y_{ij} . El resto se dedica completamente a inversión. Por simplicidad, consideramos que la propensión marginal al ahorro s_{ij} es idéntica para cada uno de los sectores y productos, o sea, $s_{ij} = s, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Entonces, del total de la producción del sector j distribuido al sector i , x_{ij} , vamos a distinguir dos sumandos: uno, la producción que va destinada a satisfacer la demanda con fines de inversión realizada por los agentes productivos de capital del sector i , notémoslo a_{ij} , y otro, la producción que va destinada a satisfacer la demanda de los consumidores incluidos en mismo sector i , notémoslo a_{ij}^c . De esta forma:

$$x_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^c, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.27)$$

Análogamente a los anteriores trabajos (Sterman 1985, Kampmann et al. 1994, Kampmann 1996), vamos a considerar que cada sector no satisface inmediatamente los pedidos realizados por los demás sectores, incluido el suyo propio, sino que existe un retardo en la distribución de esos pedidos. Vamos a

⁶Dado que cada sector i necesita, para su producción y consumo, de todos los demás sectores, el dinero real correspondiente al sector i también lo consideramos distribuido en relaciones comerciales con cada sector j . Es razonable suponer que esta proporción de dinero real correspondiente al sector i en sus relaciones con el sector j ha de ser acorde con la participación del sector j en la producción del sector i . Posteriormente describiremos de una manera precisa estos valores.

fijar el retardo medio de distribución de la producción del sector j como una constante, notada δ_j . Por tanto, la demanda total aún no satisfecha del bien producido, en términos reales, en cada sector j , se acumula en una variable que llamaremos atraso total de pedidos de producto tipo j , B_j . En el atraso total de pedidos a satisfacer por el sector j vamos a distinguir dos grupos: por un lado, los pedidos aún no satisfechos realizados por cada sector i de producto tipo j con fines de inversión, S_{ij} , y por otro lado, los pedidos de ese mismo producto j destinado al consumo dentro del sector i , S_{ij}^c . De esta forma:

$$B_j = \sum_{i=1}^n S_{ij} + \sum_{i=1}^n S_{ij}^c \quad (4.28)$$

Entonces, la proporción de la producción total del sector j que se desvía a satisfacer la demanda de capital proveniente del sector i está determinada por la proporción de pedidos de capital tipo j , aún no satisfechos, realizados por ese sector i , sobre los atrasos totales del sector j , que viene dado por el cociente S_{ij}/B_j . De esta forma, las adquisiciones de capital tipo j por parte del sector i , a_{ij} , vienen dadas por la siguiente ecuación:

$$a_{ij} = x_j \frac{S_{ij}}{B_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.29)$$

Aplicando el mismo criterio de asignación, ahora para fijar la proporción de la producción total del sector j destinada a satisfacer la demanda de ese producto con fines de consumo en el sector i , las adquisiciones del bien tipo j en el sector i destinada al consumo, a_{ij}^c , tienen la forma:

$$a_{ij}^c = x_j \frac{S_{ij}^c}{B_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.30)$$

Incorporando todas estas consideraciones en la ecuación fundamental de Tobin desagregada (ecuación 4.26), obtendríamos la expresión siguiente:

$$\dot{K}_{ij} = s \left(x_j \frac{S_{ij}}{B_j} + x_j \frac{S_{ij}^c}{B_j} - \frac{K_{ij}}{\tau_j} \right) - (1-s) \gamma_{ij} (\dot{M}/p)_i, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.31)$$

A diferencia de los modelos basados en las hipótesis de Tobin, el mercado global de bienes no está en equilibrio, de forma similar al modelo desagregado

de onda larga. La evolución de los pedidos aún no satisfechos de capital tipo j realizados por los productores de capital del sector i , S_{ij} , está determinada por la discrepancia en cada momento entre la demanda y la oferta de ese bien de inversión. Así, el sector i demanda un nivel de producto tipo j por medio de los pedidos que le efectúa a los productores del sector j , notémoslo O_{ij} , y, a su vez, el sector i recibe parte de la producción del sector j por medio de la asignación anterior, a_{ij} . De esta forma:

$$\dot{S}_{ij} = O_{ij} - a_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.32)$$

La variación de los pedidos no satisfechos de producto tipo j destinados al consumo del sector i se rigen por el mismo criterio anterior. A los pedidos de producto j destinados al consumo en el sector i , notémoslo O_{ij}^c , le sustraemos las adquisiciones de este tipo de producto destinado al consumo en ese sector, a_{ij}^c , para obtener la tasa de cambio de los pedidos aún no satisfechos de ese producto j destinado al consumo realizados por el sector i , \dot{S}_{ij}^c . Por tanto:

$$\dot{S}_{ij}^c = O_{ij}^c - a_{ij}^c, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.33)$$

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores, podemos describir, entonces, la expresión de la variación de los atrasos totales del sector j :

$$\dot{B}_j = \sum_{i=1}^n O_{ij} + \sum_{i=i}^n O_{ij}^c - x_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.34)$$

Los elementos que integran los procesos de decisión en los sectores para realizar los pedidos destinados tanto a inversión como a consumo se realizan de manera similar al modelo de onda larga con algunas modificaciones. Lo detallaremos en un apartado posterior.

Antes de presentar la estructura del proceso productivo y la formación de los pedidos en el modelo, así como otros detalles, vamos a continuar introduciendo la evolución de ciertas variables dinámicas que no aparecían en el modelo más avanzado de acoplamiento entre ciclos económicos, que

es el desarrollado por Kampmann (1996). Una de ellas es el dinero real correspondiente a cada sector i , $(M/p)_i$. Como en el modelo de Tobin, tras un pequeño desarrollo analítico, se puede asegurar que la tasa de crecimiento del dinero real correspondiente a cada sector i está determinada por la siguiente ecuación:

$$\frac{(\dot{M}/p)_i}{(M/p)_i} = z + \frac{\dot{x}_i}{x_i} - \frac{(\sum_{j=1}^n p_j \dot{x}_j)}{\sum_{j=1}^n p_j x_j}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.35)$$

El parámetro $z = \frac{\dot{M}}{M}$ es la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, que, de acuerdo a las hipótesis de Tobin (sección 4.1.2), es un parámetro controlado por la autoridad monetaria, exógeno y constante. El segundo sumando de la ecuación 4.35 indica la tasa de crecimiento de la producción del sector i , que influye positivamente, como es lógico suponer, en la tasa de crecimiento del dinero real correspondiente al sector i . El último sumando considera la tasa de crecimiento del valor de la producción de la economía en su conjunto. Este factor, que es el índice de precios al productor, actúa como freno en el crecimiento del dinero real correspondiente a cada sector i . Hace el mismo papel que la tasa de inflación en el modelo agregado de Tobin.

Los precios correspondientes al producto de cada sector i , p_i , se verán afectados por la existencia de desequilibrio en los mercados. En las hipótesis de los modelos de Hadjimichalakis (1971a, 1971b), que nosotros vamos a incorporar, el mercado de dinero está en desequilibrio. A esta situación hay que añadirle el desequilibrio del mercado de bienes que tenemos en nuestro modelo. Vamos a considerar, entonces, que tanto uno como otro desequilibrio influye en la evolución de los precios de los productos de cada uno de los sectores. De esta forma, una oferta excedente de dinero asignado a un sector será un factor de incremento en los precios, y una demanda excedente del bien producido por ese sector también supone un incremento en los precios. De esta manera, capturamos tanto el efecto del desequilibrio monetario como el efecto de desequilibrio en el mercado de bienes en los precios. Enunciamos,

por tanto, la siguiente relación:

$$\frac{\dot{p}_i}{p_i} = \xi \left[\left(\frac{M}{p} \right)_i - g_i(\cdot) \right] + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n O_{ji} + \sum_{j=1}^n O_{ji}^c - x_i \right) + \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i} \right)^e, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.36)$$

El primer sumando del segundo miembro indica el efecto inflacionario sobre los precios del producto del sector i de la oferta excedente de dinero asignado al sector i . El segundo sumando indica el mismo efecto inflacionario del desequilibrio en el mercado de bienes.

Tomando el primer sumando, la función $g_i(\cdot)$ representa una aproximación al dinero demandado por parte del sector i . Posteriormente, analizaremos en profundidad la forma y las variables que influyen en la determinación de esta función. Esta ecuación es una forma de desagregar el crecimiento de los precios para cada uno de los sectores. Así, si la oferta monetaria real correspondiente al sector i es mayor que su dinero demandado, el índice de los precios tiende a incrementarse. En caso contrario, tiende a descender. Como en el caso del modelo de Hadjimichalakis (sección 4.1.2), el parámetro ξ , considerado constante e idéntico para todos los sectores, representa la velocidad con que los precios se ajustan a las diferencias entre el dinero real existente y el demandado en cada sector. Cuanto mayor sea este parámetro, menor es el retardo del efecto de un desequilibrio en el mercado de dinero sobre los precios.

En el mercado de bienes ocurre algo similar. Si el conjunto de pedidos del bien i por parte de la parte productora de capital y la parte consumidora de todos los sectores de la economía, que representa la demanda de ese bien, es mayor que la producción en ese instante, los precios tenderán a subir. En caso contrario, los precios tienden a bajar. El parámetro ε indica la velocidad con que los precios ajustan los desequilibrios en el mercado de bienes. Lo consideramos constante e idéntico para todos los sectores.

Por último, a esta ecuación se le incluye un sumando adicional, $\left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right)^e$, que indica la tasa de inflación esperada o expectativas de inflación en el precio del producto de cada sector i . De esta forma, los precios de cada sector siempre variarán de acuerdo a las expectativas de inflación en el precio de ese producto, aunque los mercados estén en equilibrio.

Esta manera de presentar la evolución de los precios es más completa que la del modelo desarrollado por Kampmann (1996), ecuación 4.1, ya que los precios no se fijan automáticamente dado unos valores concretos de la oferta y demanda del bien, sino que manifiestan una tendencia según sea el signo del desequilibrio. Además, incluimos el factor dinero en la evolución de los precios, no considerado hasta ahora.

Como ya lo hemos visto en las secciones previas, para determinar la evolución de las expectativas de inflación en el precio del producto de cada sector, $\left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right)^e$, existen diversas alternativas. Una de ellas es la regida por las hipótesis de expectativas adaptativas. Expresado en forma de ecuación:

$$\left[\left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right)^e\right] = \beta \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i} - \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right)^e\right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.37)$$

donde el parámetro β es el coeficiente de expectativas. También podemos elegir como hipótesis alternativa a las expectativas adaptativas la de expectativas racionales con previsión perfecta:

$$\left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right)^e = \frac{\dot{p}_i}{p_i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.38)$$

Analizaremos el comportamiento del modelo incorporando las dos hipótesis enunciadas en la siguiente sección.

Entonces, las ecuaciones que gobiernan el modelo, incorporando la

hipótesis de expectativas adaptativas, son las siguientes:

$$\dot{K}_{ij} = s \left(x_j \frac{S_{ij}}{B_j} + x_j \frac{S_{ij}^c}{B_j} - \frac{K_{ij}}{\tau_j} \right) - (1-s) \gamma_{ij} (\dot{M}/p)_i$$

$$\dot{S}_{ij} = O_{ij} - a_{ij}$$

$$\dot{S}_{ij}^c = O_{ij}^c - a_{ij}^c$$

$$\dot{B}_i = \sum_{j=1}^n O_{ji} + \sum_{j=1}^n O_{ji}^c - x_i$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\frac{(\dot{M}/p)_i}{(M/p)_i} = z + \frac{\dot{x}_i}{x_i} - \frac{(\sum_{j=1}^n p_j \dot{x}_j)}{\sum_{j=1}^n p_j x_j}$$

$$\frac{\dot{p}_i}{p_i} = \xi \left[\left(\frac{M}{p} \right)_i - g_i(\cdot) \right] + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n O_{ji} + \sum_{j=1}^n O_{ji}^c - x_i \right) + \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i} \right)^e$$

$$\left[\left(\frac{\dot{p}_i}{p_i} \right)^e \right] = \beta \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i} - \left(\frac{\dot{p}_i}{p_i} \right)^e \right)$$

(4.39)

Seguidamente, completamos la descripción del modelo introduciendo la forma de la estructura de la producción, los pedidos, el dinero demandado por cada sector, y los parámetros.

• Estructura de la Producción

De la misma forma que en los modelos neoclásicos, vamos a suponer, inicialmente, que la producción está determinada por medio de una función de Cobb-Douglas homogénea de grado uno en los factores productivos. No obstante, vamos a incluir propiedades adicionales al proceso productivo, tal y como ya fue introducido en modelos previos (Sterman 1985, Sterman y Mosekilde 1993, Kampmann et al. 1994), y ya descrito en la sección 3.2.

Estas propiedades incorporan la capacidad de los productores de superar la producción dada por la función homogénea cuando la producción deseada es más elevada que la indicada por esa función.

Por tanto, notaremos c_i como la función de producción teórica del sector i , y que llamaremos *capacidad productiva del sector i* . Los factores productivos que influyen en esta función de Cobb-Douglas son los capitales provenientes de cada sector j , K_{ij} , $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La tasa de participación del capital K_{ij} en la producción del sector i la notaremos como α_{ij} , con $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1$. Entonces, la capacidad productiva del sector i sigue la expresión:

$$c_i = \kappa_i^{-1} \prod_{j=1}^n K_{ij}^{\alpha_{ij}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.40)$$

donde el parámetro κ_i indica la tasa de capital-producto del proceso productivo del sector i , que vamos a considerar constante. Posteriormente definiremos su valor junto con el de los demás parámetros que intervienen en el modelo.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, la producción del sector i está determinada por la capacidad productiva de ese sector, c_i , y la producción deseada de ese sector, que notaremos como x_i^* . La relación que liga estas variables es la siguiente:

$$x_i = c_i f\left(\frac{x_i^*}{c_i}\right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.41)$$

La función $f(\cdot)$ es una función creciente en su dominio y convergente en el infinito a un valor superior a uno, que indica que es posible superar en cierto porcentaje la capacidad productiva cuando la producción deseada es más elevada. La forma concreta de la función la vamos a tomar igual que en el caso presentado por Haxholdt et al. (1994), y ya expresado en la sección 3.2. Así:

$$f(r) = \gamma \left(1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^r\right) \quad (4.42)$$

Esta función tiene la misma gráfica que aparece en la figura 3.2 y cumple las siguiente propiedades:

$$f(0) = 0; f(1) = 1; \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \gamma = 1.1; f(r) > r \text{ si } 0 < r < 1 \quad (4.43)$$

También la producción deseada de cada sector i , x_i^* , viene determinada de tal manera que se cubra la demanda total de producto aún no satisfecha, teniendo en cuenta la demora media de distribución de ese producto, δ_i . No se consideran restricciones de inventario. Por tanto:

$$x_i^* = \frac{B_i}{\delta_i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.44)$$

• Estructura de los Pedidos

Los pedidos de capital proveniente de cada sector j que realiza el sector i , O_{ij} , van a estar determinados de la misma manera que en los trabajos previos (Sterman 1985, Sterman y Mosekilde 1993, Kampmann et al. 1994). Por tanto, consideramos que estos pedidos no van a ser los mismos que sus pedidos deseados, O_{ij}^* , sino que están relacionados entre sí por medio de una función no lineal que actúa como freno a la expansión desmesurada de capital. En esta función interviene la depreciación de ese capital. Así:

$$O_{ij} = \frac{K_{ij}}{\tau_j} g\left(\frac{O_{ij}^*}{K_{ij}/\tau_j}\right), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.45)$$

La función $g(\cdot)$ la vamos a tomar creciente en su dominio y similar a la identidad, salvo que manifiesta un límite máximo cuando el nivel de pedidos deseados es varias veces superior a las depreciaciones de capital, como en la figura 3.3. Adoptaremos, en este caso, la misma forma concreta para esta función que en Kampmann (1996). Por tanto:

$$g(r) = \phi + \frac{B - \phi}{1 + b_1 e^{-c_1(r-1)} + b_2 e^{-c_2(r-1)}} \quad (4.46)$$

$$g(1) = g'(1) = 1, \quad g''(1) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = B = 6, \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} g(r) = \phi = 0.05$$

El valor de $c_2 = 3$ y el resto de los parámetros se ajustan de manera que se cumplan las condiciones arriba descritas.

Los pedidos deseados del sector i de capital proveniente de cada sector j , O_{ij}^* , también se van a fundamentar en principios de racionalidad acotada en el comportamiento de los agentes económicos, como en el caso del modelo desagregado de onda larga (ver sección 3.2 y sección 1.3). Por tanto, este nivel deseado se fija a partir de la depreciación del capital existente, K_{ij}/τ_j , de la diferencia entre los niveles deseados de mantener en el sector i de capital tipo j , K_{ij}^* , con los niveles actuales, y de la diferencia entre el nivel deseado de pedidos aún no satisfechos de capital tipo j localizados en el sector i , S_{ij}^* , con el nivel actual. Por tanto, reproducimos la ecuación 3.10:

$$O_{ij}^* = \frac{K_{ij}}{\tau_j} + \frac{K_{ij}^* - K_{ij}}{\tau_j^K} + \frac{S_{ij}^* - S_{ij}}{\tau_j^S}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.47)$$

Los parámetros τ_j^K y τ_j^S indican la rapidez con que se ajustan los niveles actuales a los deseados.

Como en el caso del modelo desagregado de onda larga, el nivel deseado de pedidos de capital tipo j , aún no satisfechos, realizados por los productores del sector i , S_{ij}^* , es igual a la multiplicación entre la demora de distribución actual del producto j , que es el cociente entre los atrasos totales de los productores del sector j , B_j , con sus niveles actuales de producción, x_j , y la depreciación de capital existente. Por tanto:

$$S_{ij}^* = \frac{B_j K_{ij}}{x_j \tau_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.48)$$

A diferencia del modelo desagregado de onda larga, en la determinación, por parte de los productores de cada sector i , del capital deseado proveniente del sector j , K_{ij}^* , vamos a considerar que la producción admite una sustituibilidad entre los factores productivos de acuerdo al precio de los

mismos⁷. Para poder expresar, entonces, los pedidos de capital deseados, K_{ij}^* , en función del precio de los distintos capitales que intervienen en la producción, vamos a utilizar los mismos argumentos que en el modelo desarrollado por Kampmann (1996). Esto es suponer que las industrias ajustan sus niveles relativos de inputs con el objetivo de minimizar su coste medio a largo plazo, que es la situación de equilibrio competitivo. Este objetivo está sujeto a la restricción de que el nivel de producción deseado en cada sector es una función de Cobb-Douglas de los niveles de capital deseados provenientes de todos los sectores, tal como se indica en la ecuación 4.40⁸. En la búsqueda del óptimo, hemos de considerar el precio del capital tipo j , p_j , y el coste de alquiler de una unidad de ese capital, notémoslo como rc_j . Este coste de alquiler del capital tipo j está determinado por la existencia de un tipo de interés r en la economía, una tasa de expectativas de inflación agregada, $(\frac{\dot{p}}{p})^e$, y una tasa de depreciación de ese tipo de capital, $1/\tau_j$. De esta manera:

$$rc_j = r - \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e + \frac{1}{\tau_j}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.49)$$

Utilizando técnicas comunes en la búsqueda de óptimos, obtenemos la siguiente ecuación para el nivel de capital deseado:

$$K_{ij}^* = \kappa_{ij} x_i^* \frac{\tilde{P}_i}{p_j}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.50)$$

donde

$$\tilde{P}_i = \prod_{h=1}^n p_h^{\alpha_{ih}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.51)$$

Por otro lado, κ_{ij} es una variable obtenida al hallar el óptimo que depende de la relación capital-producto del proceso productivo del sector i , κ_i , de la

⁷Es perfectamente razonable pensar que la estructura de precios afecta a las decisiones de inversión de una industria.

⁸Esta afirmación se sostiene al considerar que los sectores fijan sus decisiones de inversión considerando que su producción se ajusta a su capacidad productiva o producción teórica, sin tener en cuenta posibles mejoras conseguidas forzando el proceso productivo.

participación del capital j en el proceso productivo del sector i , α_{ij} , y del coste de alquiler de una unidad de ese capital, rc_j . Además, verifica la ecuación:

$$\kappa_i = \prod_{j=1}^n \kappa_{ij}^{\alpha_{ij}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.52)$$

Por tanto, podemos interpretar este parámetro como la razón capital-producto del capital tipo j en la parte productora del sector i .

Estas ecuaciones aseguran la sustituibilidad entre los factores productivos. Por ejemplo, si en un instante determinado el precio del producto del sector j subiera, considerando fijos todos los restantes precios, inmediatamente el capital deseado de ese producto descendería en todos los sectores, con lo que los pedidos deseados de ese capital también descenderían. En cambio, si el precio de otro producto $h \neq j$ subiera, dejando fijos todos los demás, la demanda de capital K_{ij} se incrementaría, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ al descender el precio relativo del capital j .

Por último, los pedidos de bienes tipo j realizados por los consumidores del sector i , O_{ij}^c , están determinados por las hipótesis que rodean a la ecuación fundamental de Tobin desagregada (ecuación 4.26). Entre estas hipótesis, consideramos que cada sector i ahorra y, por tanto, consume, una proporción constante de la renta disponible correspondiente al bien producido en otro sector j , y_{ij} . Consecuentemente, vamos a considerar la demanda de bien tipo j destinado al consumo en el sector i fijada por el multiplicador keynesiano de la renta disponible, $c = 1 - s$. De esta forma:

$$O_{ij}^c = c \cdot y_{ij} \quad (4.53)$$

Esta ecuación tendrá un efecto multiplicador sobre la producción. Eliminando la tendencia creciente de la producción, observaremos el comportamiento cíclico subyacente en esta economía.

- **Dinero demandado por los sectores**

Según las hipótesis expuestas en el modelo de Tobin y que hemos comentado en la sección 4.1.2, el dinero demandado por los agentes económicos (en nuestro caso los diferentes sectores) dependería fundamentalmente de dos motivos: el motivo transacción y el motivo especulación. Los sucesivos modelos de Tobin, tomando las hipótesis de Baumol y del propio Tobin (Laidler 1977 para una revisión de estas hipótesis) incluyen estas dos motivaciones para la descripción de la demanda de dinero, que, en su caso, es agregada.

A diferencia de estos modelos precedentes (sección 4.1.2), vamos a suponer, por simplicidad, que los agentes económicos (en nuestro caso, los diferentes sectores productores de capital) desean mantener parte de su riqueza en forma de dinero fundamentalmente por el motivo transacción. Esto es debido a que la inclusión de una componente especulativa en la función de dinero demandado por cada sector genera una gran inestabilidad en el comportamiento del modelo, hecho comprobado al observar grandes dificultades numéricas al realizar las simulaciones. Creemos que esto es debido al crecimiento en la elasticidad con respecto al tipo de interés que supone incorporar el motivo especulativo. Hemos comprobado que, a mayor valor absoluto de esta elasticidad, peor comportamiento tiene el modelo. Estos resultados concuerdan con el teorema 15 expuesto en la sección precedente para el modelo de Tobin ampliado. Según este teorema, a menor elasticidad de la función con respecto a las expectativas de inflación, más posibilidades había de que el comportamiento sea estable. Al basarse este modelo en el de Tobin ampliado, y como las expectativas de inflación son directamente proporcionales al tipo de interés nominal (ecuación 4.6), es razonable pensar que mejor se va a comportar el modelo (aunque no necesariamente de una forma estable) cuanto menor sea la elasticidad del dinero demandado con respecto al tipo de interés.

Vamos a definir, entonces, una función de dinero demandado que representaría una desagregación de la función de demanda de dinero en el modelo de Tobin (1965). Incluimos como determinantes de este dinero demandado por cada sector i su volumen de producción, x_i , que influye positivamente en este dinero demandado, y el tipo de interés existente en la economía, r , que influye negativamente. Se pueden adoptar múltiples formas para esta función. Nosotros vamos a adoptar una parecida a la introducida por Baumol en 1952 (Goodhart 1989, Laidler 1977) para el caso agregado. Esta función de Baumol fue determinada al minimizar el coste de flujo de caja. La función introducida por nosotros tiene la forma:

$$g(x_i, v, r) = \sqrt{\frac{x_i}{v+r}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.54)$$

Por lo tanto, suponemos que el dinero demandado por el sector i es dependiente de la producción de ese sector, x_i . También es dependiente de la velocidad de circulación del dinero en la economía, v , considerado exógeno y constante, y, por supuesto, de la tasa de interés actual, r .

La función 4.54 incorpora las hipótesis fundamentales de dependencia entre una aproximación al dinero demandado y las variables que la definen. La elasticidad del dinero demandado con respecto a la producción de cada sector i , x_i , es constante y vale 0.5. Por otro lado, la elasticidad con respecto al tipo de interés r es la expresión $\mu_{g-r} = -\frac{r}{2(v+r)}$. Esta elasticidad es siempre menor en valor absoluto que 0.5 y, variando la velocidad de circulación del dinero, controlo el valor de esta elasticidad.

Para determinar el tipo de interés, r , al igual que en los modelos de Tobin y sucesivos, vamos a seguir la aproximación neoclásica al respecto. Así, el tipo de interés está determinado por la productividad marginal del capital en la economía agregada, $f'(k)$, las expectativas de inflación agregada, $\left(\frac{p}{p}\right)^e$,

y la tasa de depreciación agregada del capital, $\frac{1}{\tau}$, de la misma forma que la ecuación 4.6, que la volvemos a enunciar:

$$r = f'(k) + \left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e - \frac{1}{\tau} \quad (4.55)$$

Entonces, para determinar la tasa de interés r , hace falta determinar previamente los tres sumandos que la integran. Primeramente, las expectativas de inflación agregada están construidas a partir de las expectativas de inflación en el precio de cada sector j , $\left(\frac{\dot{p}_j}{p_j}\right)^e$, ponderándolas según el volumen de producción de cada sector. Así:

$$\left(\frac{\dot{p}}{p}\right)^e = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\dot{p}_j}{p_j}\right)^e x_j}{\sum_{j=1}^n x_j} \quad (4.56)$$

La productividad marginal agregada del capital la vamos a definir a partir de las productividades marginales de los diferentes capitales que se hallan en la parte productora de cada uno de los sectores. Lo realizaremos ponderando la participación de las mismas según las existencias de ese tipo de capital. Por tanto, la productividad marginal agregada la podemos definir de la siguiente manera:

$$f'(k) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{K_{ij}} c_i K_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}} \quad (4.57)$$

Hemos considerado que dicha productividad marginal viene determinada no por la producción del sector i , x_i , sino por la capacidad productiva de ese sector, c_i . Así, no hemos escogido exactamente la derivada parcial de x_i sobre el capital K_{ij} para calcular la productividad marginal de este capital K_{ij} en la producción de x_i , sino la derivada parcial de c_i sobre K_{ij} ⁹.

⁹Esto está fundamentado en la creencia de que la economía ajusta el coste de alquiler del capital según la productividad *esperada* del capital, y no la que de hecho se obtiene forzando el proceso productivo.

Por otro lado, la tasa de depreciación del capital agregado en la economía, $\frac{1}{\tau}$, la vamos a considerar fija en nuestro modelo, y construimos las diferentes tasas de depreciación del capital destinado a la inversión en cada uno de los sectores, $\frac{1}{\tau_j}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a partir de la agregada. La relación que verifican entre ellas es la siguiente:

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau_j \quad (4.58)$$

En el siguiente apartado describiremos con más detalle los fundamentos en la forma de fijar los parámetros que describen el modelo.

● Fijación de Parámetros

Por coherencia con el modelo agregado generador de onda larga (Sterman 1985) a partir del cual se han construido los modelos desagregados sucesivos, vamos a fijar los parámetros que definen el modelo a partir de parámetros agregados.

Por tanto, a partir de los valores fijados del tiempo de vida medio del capital agregado en la Economía, τ , y de la tasa de capital-producto agregada, notémosla κ , vamos a fijar, primeramente, la tasa de capital-producto en cada sector i , κ_i . El hecho de tener en cuenta el tipo de interés existente en la economía para fijar los capitales deseados en cada sector hace que no podamos definir el parámetro κ_i a partir de la situación de equilibrio competitivo, como se realizó en Kampmann (1996). Esto es debido a que este equilibrio depende del tipo de interés actual en la Economía, r , que es un factor variable, con lo que los parámetros no serían constantes, como se pretende por simplificación.

Entonces, como se realizó en Haxholdt et al. (1994), fijamos el valor de κ_i , a partir de la tasa de capital-producto agregada, κ , ponderada según la participación de cada capital j en el proceso productivo del sector i , α_{ij} , y según

la proporción del tiempo de vida de cada capital j con respecto al tiempo de vida del capital agregado, $\frac{\tau_j}{\tau}$. Consideramos, entonces, que la tasa de capital-producto del sector i está determinada por los elementos anteriores por medio de una función de Cobb-Douglas homogénea de grado uno, de manera que las ponderaciones correspondientes a cada sector j participan en la función con la misma tasa que el capital j en la producción del sector i . Por tanto:

$$\kappa_i = \prod_{j=1}^n \left(\kappa \alpha_{ij} \frac{\tau_j}{\tau} \right)^{\alpha_{ij}} = \frac{\kappa}{\tau} \prod_{j=1}^n \left(\alpha_{ij}^{\alpha_{ij}} \tau_j^{\alpha_{ij}} \right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.59)$$

Como ya lo hemos descrito anteriormente, el valor del tiempo de vida medio del capital procedente del sector i , τ_i , se fija de manera que la media de estos valores sea el tiempo de vida medio del capital agregado. De esta forma:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau_j = \tau \quad (4.60)$$

Por simplificación, suponemos que el coeficiente de participación de cada sector j en la producción del sector i , α_{ij} , guarda una simetría entre todos los sectores de capital. Por tanto, dado un valor fijo α , $0 \leq \alpha \leq 1$, se determinan todos los coeficientes de participación de la forma:

$$\alpha_{ii} = 1 - \alpha, \quad \alpha_{ij} = \frac{\alpha}{n-1}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.61)$$

Por otro lado, vamos a considerar que la proporción de dinero real correspondiente al sector i que se asigna a las relaciones comerciales con el sector j , γ_{ij} , está determinado por la participación del capital j en el proceso productivo del sector i . Por lo tanto, identificamos este parámetro $\gamma_{ij} = \alpha_{ij}$.

Por último, el resto de los parámetros que intervienen en este modelo se determinan de la misma forma que en el caso presentado por Haxholdt et al. (1994), o sea, a partir de valores agregados y del tiempo de vida medio del capital procedente de cada sector. De esta forma, dados unos valores de los

coeficientes δ , τ^K y τ^S :

$$\delta_i = \delta \frac{\tau_i}{\tau}; \quad \tau_i^K = \tau^K \frac{\tau_i}{\tau}; \quad \tau_i^S = \tau^S \frac{\tau_i}{\tau}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.62)$$

4.3 Simulación y resultados del modelo

El sistema 4.39 dispone de veinte ecuaciones diferenciales no lineales. Esto supone que un estudio analítico, como el realizado en el capítulo III para el modelo desagregado de onda larga, sea muy difícil de llevar a cabo para este modelo. El número de ecuaciones es extremadamente grande y hasta el descubrimiento de los posibles puntos de equilibrio llega a ser una ardua tarea, sin mencionar lo que supondría ejecutar un análisis local de estos puntos de equilibrio. De esta manera, los conceptos y resultados expuestos en el capítulo II nos van a servir como referencia de los posibles comportamientos que el modelo puede exhibir, desechando la utilización de las técnicas analíticas presentadas por su dificultad de aplicación.

Por las razones expresadas anteriormente, vamos a utilizar como método de estudio del comportamiento de nuestro modelo la realización de simulaciones numéricas sucesivas del mismo, para diversos valores de los parámetros y funciones que lo gobiernan. La utilización de sofisticadas herramientas informáticas han hecho que estos modelos, intratables no hace muchas décadas, puedan ser estudiados con cierta fiabilidad. Los métodos numéricos en el estudio de modelos han sido empleados en muchos de los trabajos previos en relación con el acoplamiento de ciclos económicos (Sterman 1985, Sterman y Mosekilde 1993, Kampmann et al. 1994), así como en otros trabajos de carácter más general (Jensen et al. 1984, Togeby et al. 1988, Knudsen et al. 1991, Sturis et al. 1995), todos ellos de sensiblemente menos ecuaciones diferenciales que el nuestro. No obstante, debido al carácter aproximado de los métodos numéricos, así como a la imposibilidad de recorrer todas las posibles soluciones del sistema 4.39, hemos de tomar los resultados de las simulaciones

con la cautela adecuada.

Para la realización de estas simulaciones hemos hecho uso del programa POWERSIM 2.01, preparado para la construcción y simulación de modelos en Dinámica de Sistemas. Como ya hemos comentado sucintamente en el capítulo I (sección 1.4), la Dinámica de Sistemas, iniciada por Forrester (1961), consiste en una metodología que, en pocas palabras, representa de una forma gráfica y sencilla los sistemas dinámicos. Los elementos básicos en la construcción de modelos en Dinámica de Sistemas son los bucles causales de realimentación positiva o negativa, que son formas de dependencia cíclica entre las variables que se presentan con mucha frecuencia en la naturaleza y que los modelizadores tratan de localizar. Desarrollar esta metodología supondría presentar una forma paralela de estudiar los sistemas dinámicos, que se nos alejaría de los objetivos del trabajo. Existe amplia literatura desarrollada al respecto (Roberts et al. 1983, Aracil 1992).

Hemos escogido esta metodología de representación y estudio de un sistema no sólo con fines de simular nuestro sistema dinámico, sino por analogía a los modelos previos al nuestro, que han sido contruidos basándose en este enfoque. Ello nos ha ayudado a la comprensión de las hipótesis en las que se basan sus modelos. Desde el punto de vista exclusivamente numérico, hemos utilizado, como método de aproximación de las soluciones, el Runge-Kutta de orden cuatro con un intervalo temporal fijo de longitud aproximadamente una décima. Estimamos que este método es suficiente para considerar los resultados numéricos como adecuadamente aproximados a los reales.

Vamos a considerar dos situaciones del modelo: la adopción de expectativas adaptativas y la adopción de expectativas racionales. En base a una y otra hipótesis, observaremos el comportamiento del modelo. El proceso de estudio es similar al realizado en Sterman (1985) y en los sucesivos trabajos

posteriores. Vamos a presentar, primeramente, una solución del sistema para ambas hipótesis de expectativas, fijados ciertos valores de los parámetros que pudiéramos considerar cercanos a la situación real, destacando cómo varían variables importantes, como son la capacidad productiva, los precios y el dinero real. Explicaremos el comportamiento obtenido y comprobaremos someramente la persistencia del mismo frente a cambios en las condiciones iniciales y en los parámetros, llevando a cabo así un análisis de la sensibilidad del modelo.

Por otro lado, también presentaremos la descripción de las regiones de acoplamiento en comparación a los modelos anteriores más sencillos. Contrastaremos, como fue hecho en los modelos de Tobin y sucesivos, las consecuencias de la existencia de dinero en la economía. Analizaremos además los efectos de una contracción o expansión monetaria sobre el crecimiento económico y sobre las regiones de acoplamiento. Todo ello considerando que los agentes adoptan o expectativas adaptativas o racionales en la formación de las expectativas de variación de los precios. Por último, analizaremos los efectos de tomar una política concreta de lucha contra la inflación sobre una economía de este tipo.

4.3.1 Comportamiento general. Regiones de acoplamiento

Vamos a suponer, por simplicidad, que disponemos de dos sectores en la economía, sector 1 y sector 2, y vamos a analizar el comportamiento de los mismos fijados unos valores de los parámetros que gobiernan el modelo.

Como en los modelos previos de acoplamiento, el tiempo lo vamos a medir a largo plazo, en años, tomando como horizonte temporal 200 años. También, para comparar mejor nuestros resultados, hemos tomado un valor similar de

los parámetros comunes de este modelo con los de los modelos presentados por Sterman (1985) y Kampmann et al. (1994). Así, los valores agregados de la relación capital-producto, κ , el tiempo agregado de demora medio de distribución del capital, δ , y el tiempo agregado de vida media del capital, τ , son $\kappa = 3$, $\delta = 1.5$, $\tau = 20$. Por simplicidad, el tiempo de respuesta de los pedidos deseados a diferencias entre el capital agregado deseado y el actual, τ^K , y entre los pedidos no realizados agregados y los actuales, τ^S , no van a ser los mismos que los calculados mediante el experimento expuesto en Sterman (1989a) y comentados en la sección 3.2, pero ello no va a influir significativamente en los resultados. Fijaremos $\tau^K = \tau^S = 1.5$.

Los parámetros que determinaron el acoplamiento entre los ciclos en el modelo desagregado de onda larga serán fijados, para este caso inicial, con valores medios. De esta manera, tomaremos el valor del grado de dependencia entre los sectores $\alpha = 0.5$ y, como ya fue hecho por Kampmann et al. (1994) (sección 3.2), tomaremos la diferencia entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos por cada uno de los sectores, $\Delta\tau$, como parámetro regularizador de las zonas de acoplamiento. Esta diferencia, junto con el valor del tiempo de vida medio del capital agregado, $\tau = 20$, determina el tiempo de vida medio del capital producido por cada uno de los sectores. Tomamos $\Delta\tau$ inicialmente como 10, por lo que, dados los dos sectores 1 y 2, $\tau_1 = 25$ y $\tau_2 = 15$.

El resto de los parámetros que intervienen en el modelo son propios de la incorporación de factores monetarios utilizando las hipótesis de los modelos de Tobin y sucesivos. Vamos a suponer una propensión marginal al consumo alta, con lo que el parámetro s va a tener un valor bajo, $s = 0.03$. La velocidad de circulación del dinero la tomamos, por simplicidad, exógena y constante, y con un valor de $v = 4$. Consideramos que desequilibrios en el mercado de dinero se ven reflejados en los precios más rápidamente que desajustes en

el mercado de bienes. De esta manera, el parámetro ξ va a ser, en general, mayor que el parámetro ε . Tomamos unos valores iniciales de estos parámetros bastante pequeños, que indican un efecto lento y gradual del desequilibrio de los mercados en la variación de los precios. Concretamente, consideramos $\xi = 0.1$ y $\varepsilon = 0.01$. La tasa de crecimiento del dinero en la economía la consideramos inicialmente baja, $z = 0.01$. Posteriormente veremos las consecuencias de suponer otros valores.

Por tanto, fijados estos valores de los parámetros, estudiaremos el comportamiento general del modelo suponiendo que los agentes siguen, por un lado, la hipótesis de expectativas adaptativas, y por otro lado, la hipótesis de expectativas racionales, en la formación de la estimación de precios. Con ello podemos, entre otras cosas, analizar el efecto que sobre el acoplamiento entre los ciclos económicos tiene la consideración de una u otra hipótesis, que era uno de los objetivos de esta memoria.

• Expectativas adaptativas

En este punto vamos a suponer, al igual que en los modelos de Hadjimichalakis (1971a, 1971b) y Benhabib y Miyao (1981), que las expectativas de inflación siguen la hipótesis de expectativas adaptativas. Esto proporciona, como veremos, un comportamiento más variado en el sistema. El coeficiente de expectativas lo tomamos como $\beta = 1$, que indica, en cierta manera, que las expectativas de inflación se van corrigiendo anualmente.

Los resultados de la simulación del modelo para los valores de los parámetros anteriores pueden observarse en la figura 4.1. Hemos efectuado la representación para las variables que hemos considerado más relevantes, que son la capacidad productiva, los precios, el dinero real y las expectativas de cada uno de los sectores. Hemos escogido, por simplicidad, unas condiciones

iniciales sobre las variables idénticas para los dos sectores. El comportamiento es sensible a las condiciones iniciales, aunque la tónica general de crecimiento y periodicidad de los ciclos se mantiene, salvo en los precios, que alternan su posición predominante.

Obsérvese en la figura que el comportamiento de la capacidad productiva es creciente, debido al efecto multiplicador de la propensión marginal al consumo sobre la demanda de bienes en cada uno de los sectores. Transcurridos los 200 años de horizonte temporal, la capacidad productiva para ambos sectores es seis veces mayor que la que había originalmente. Los precios evolucionan de manera diferente para un sector que para el otro. Mientras que uno llega a unas cotas veinte veces más que su valor inicial, el otro alcanza unos valores muy inferiores. No obstante, esta situación es dependiente de las condiciones iniciales. El dinero real y las expectativas oscilan alrededor de unos valores estables.

Hemos extraído la tendencia creciente en la capacidad productiva por medio de una estacionarización de la serie obtenida (`capacidad_prod_estac(1)` y `capacidad_prod_estac(2)`). De esta forma resaltamos las variaciones cíclicas que manifiestan los sectores en torno a esta tendencia. Obsérvese como, en esta situación, se produce un comportamiento sincrónico 1 : 1 muy ajustado entre las capacidades productivas de los sectores. Ambas capacidades, tras un pequeño estado transitorio, oscilan alrededor de la tendencia general con una amplitud irregular pero muy parecida entre ambos sectores, y con un periodo de aproximadamente 25 años. Estas oscilaciones en amplitud y periodo están también sincronizadas en el dinero real existente en la economía y en las expectativas. El comportamiento de los precios también verifica cierta sincronización si aislamos cada sector de su tendencia general.

Los resultados indican, por tanto, que este modelo sigue explicando

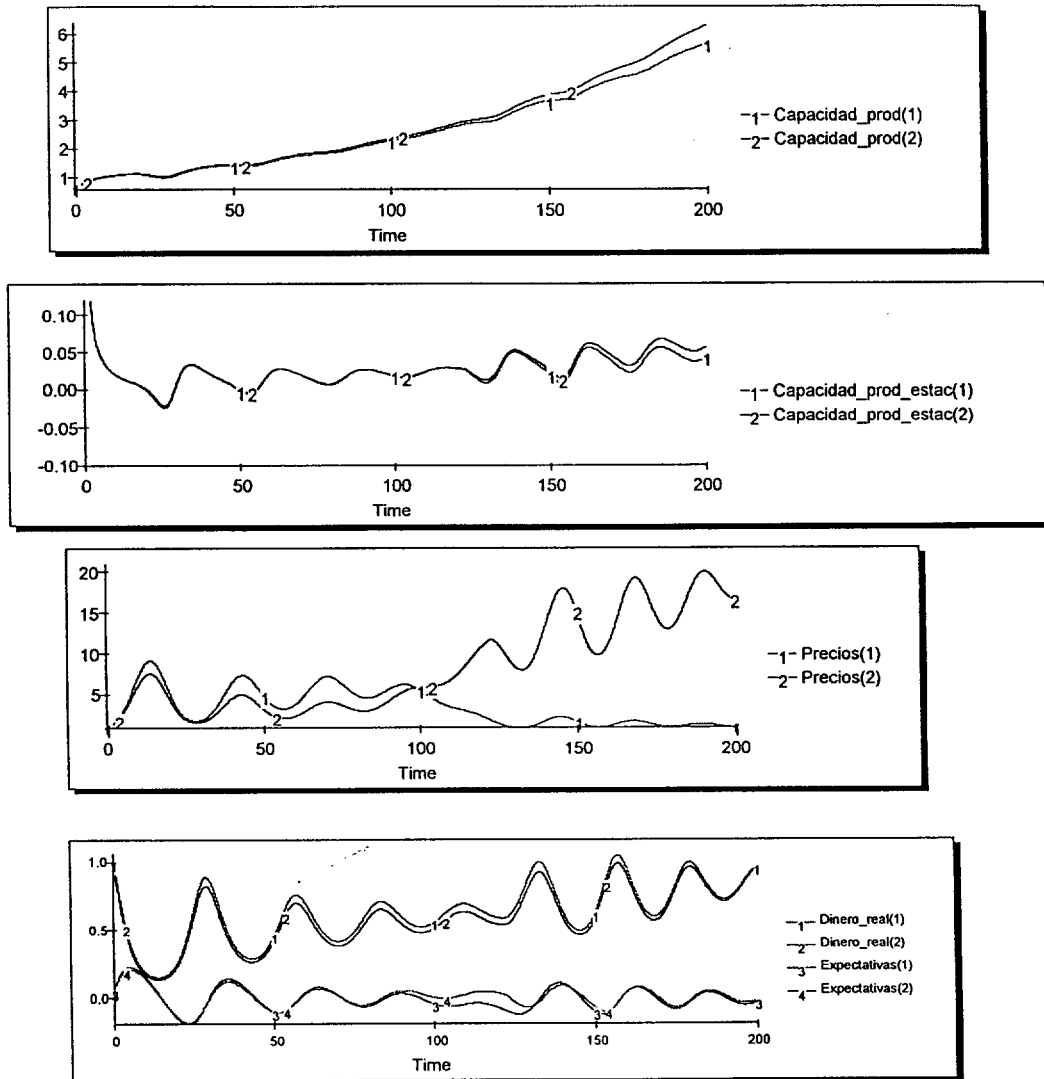


Figura 4.1: Expectativas adaptativas. Los valores de los parámetros son: $\kappa = 3$, $\delta = 1.5$, $\tau^K = \tau^S = 1.5$, $\tau = 20$, $\tau_1 = 25$, $\tau_2 = 15$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$, $\xi = 0.1$, $s = 0.03$, $\beta = 1$, $z = 0.01$. El sector 1 corresponde al sector de mayor tiempo de vida medio del capital que produce y el sector 2 el de menor tiempo de vida medio del capital que produce. La abreviatura "capacidad_prod_estac(i)", $i \in \{1, 2\}$, indica *capacidad productiva estacionarizada del sector i*.

el comportamiento sincrónico que se produce entre los ciclos económicos, ahora con la incorporación de un factor más en esta economía, el dinero. Los ciclos sincronizados manifiestan un desarrollo más irregular que en los anteriores modelos, con una amplitud y periodo variables y dependientes de las condiciones iniciales. No obstante, hemos observado que la sincronía se mantiene frente a cambios en estas condiciones iniciales. Podríamos considerar, entonces, que esta irregularidad de los ciclos supone una mayor aproximación a la realidad, superando las críticas realizadas sobre los modelos no lineales, comentadas en la sección 1.3, debido al carácter regular de sus resultados. Como ya lo habíamos comentado en el capítulo I, el estudio de sistemas dinámicos no lineales complejos abre la puerta a comportamientos deterministas de apariencia aleatoria, como puede ser este modelo.

Análisis de la sensibilidad

Al igual que se hizo en el trabajo de Sterman (1985), vamos a analizar los cambios que se producen en el comportamiento general del sistema 4.39 al variar los parámetros fundamentales que intervienen. Compararemos los resultados que obtengamos con respecto a los del modelo previo.

En general, el comportamiento de sincronía entre los ciclos se mantiene frente a cualquier cambio en los parámetros. Parece entonces que el emparejamiento no lineal entre los sectores en este modelo es lo suficientemente fuerte para que se produzca una tendencia a un modo cíclico único.

Los resultados sobre el análisis de sensibilidad para los parámetros κ , relación capital-producto, δ , demora media de distribución del producto, y τ^K , tiempos de reacción a desajustes en el capital deseado y el actual, y τ^S , tiempo de reacción a desajustes en los pedidos no satisfechos deseados y los actuales, son coherentes, en líneas generales, con los obtenidos por Sterman

(1985) en el estudio del análisis de la sensibilidad del modelo de onda larga.

Así, cuando la relación capital-producto aumenta, hace que cada sector necesite más capital para generar las mismas unidades de producción, por lo que la demanda de capital crece en ambos sectores. Esto origina un aumento de la inflación, debido a este aumento en la demanda, además de disminuir el crecimiento en la producción. De hecho, si el efecto del desequilibrio en el mercado de bienes sobre los precios fuera nulo ($\varepsilon = 0$), los precios no se verían afectados por un aumento en la relación capital-producto. Por otro lado, el comportamiento del modelo no es muy sensible a cambios en el parámetro de demora media de distribución, δ . Para los tiempos de reacción, a valores pequeños, el crecimiento de la capacidad productiva no sufre variaciones significativas y las oscilaciones alrededor de la tendencia van disminuyendo. Esto es debido a que los agentes, en este caso, corrigen sus actuaciones con más celeridad, por lo que los efectos desequilibrantes son amortiguados antes.

El primer factor de tipo monetario que vamos a analizar es la velocidad de circulación, v , que hemos considerado constante. Los resultados de la simulación indican que valores altos de esta velocidad de circulación suponen un factor de desequilibrio en la economía, que origina mayores sobresaltos, aunque crezcamos a una tendencia mayor.

Por otro lado, el modelo es muy sensible a cambios en la propensión marginal al ahorro, s . De hecho, para valores no muy elevados de este parámetro, que consideramos idéntico para todos los sectores, se produce una senda de crecimiento bastante incrementada, hasta llegar a un comportamiento explosivo en los precios y las capacidades productivas. La razón de este comportamiento se puede encontrar en la forma de aumentar las existencias de capital dada por la ecuación 4.26. De esta manera, la inversión de un cierto tipo de capital en cada sector está determinada por sus niveles de ahorro, por lo

que, aunque el consumo actúa como multiplicador de la renta en cada sector, se limita el crecimiento al disponer de menor capacidad de ahorro. Pero el equilibrio es frágil, un exceso de ahorro desestabiliza la economía, haciéndola fluctuar con amplitudes muy grandes.

Por medio del análisis de los parámetros que gobiernan la evolución de los precios, ξ y ϵ , descubriremos el efecto del mercado de bienes y el mercado de dinero sobre los precios, y éste sobre la evolución de la economía, hecho novedoso en modelos de acoplamiento entre ciclos económicos.

Valores altos de la velocidad de ajuste de los precios con respecto a desequilibrios en el mercado de dinero, ξ , tienen un efecto estabilizador en la economía. En cambio, si la velocidad de ajuste de los precios con respecto a cambios en el mercado de bienes, ϵ , es la elevada, entonces los precios fluctúan con mayor amplitud y periodo, originando un comportamiento similar en la capacidad productiva de ambos sectores. Podemos observar algunas muestras del efecto de estos parámetros en las gráficas 4.2, 4.3.

Estos resultados son coherentes con el modelo desagregado de onda larga y el teorema de Benhabib y Miyao (teorema 15). Según este teorema, cuanto mayor sea el valor del parámetro ξ , existen más posibilidades de obtener un comportamiento en equilibrio en el modelo ampliado de Tobin (Hadjimichalakis 1971b). Así, cuando el efecto sobre los precios del desequilibrio en el mercado de dinero es mucho más fuerte que el del mercado de bienes ($\xi \gg \epsilon$), se produce una tendencia a la senda de crecimiento en equilibrio de los precios y la capacidad productiva. No obstante, siempre que sea significativo el efecto del desequilibrio del mercado de bienes sobre los precios, se producirán ciertas fluctuaciones. En todos los casos se mantienen los mismos niveles generales en la tendencia del crecimiento de la capacidad productiva y el comportamiento en sincronía 1 : 1.

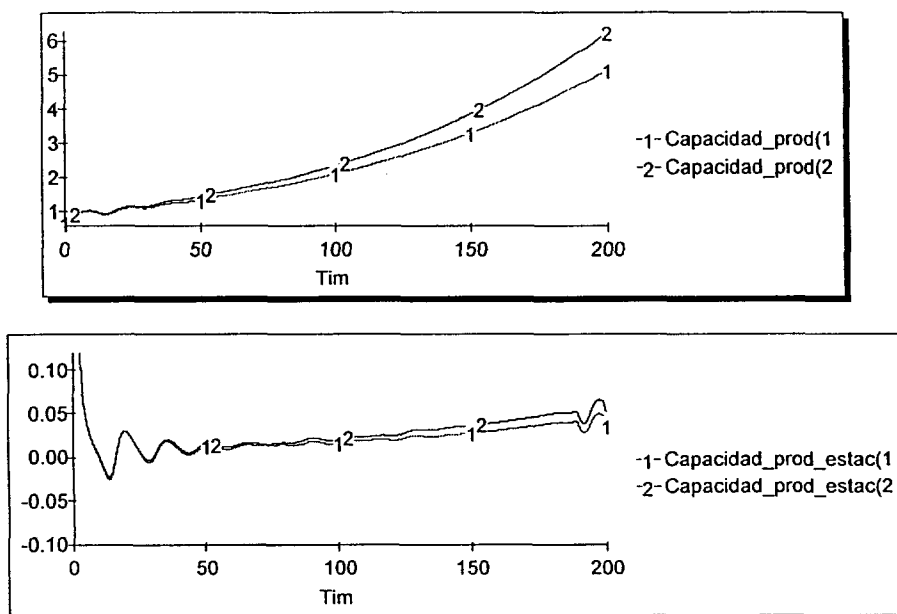


Figura 4.2: Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\xi = 0.3$.

Podemos decir que el parámetro más influyente sobre la amplitud y periodo de los ciclos sincronizados producidos por el modelo es el coeficiente de expectativas β . Cuanto más rápido corrijan los agentes sus expectativas, el comportamiento de las variables sobre la senda de crecimiento manifestará fluctuaciones con una mayor amplitud y un periodo más corto. Por tanto, la economía presentará muy frecuentes expansiones cortas, acompañadas de recesiones igualmente cortas, sobre una senda de crecimiento (figura 4.4). De la misma forma, el efecto de un coeficiente de expectativas bajo se traduce en periodos de los ciclos sensiblemente más largos, con lo que la economía exhibe amplios periodos de crecimiento a buen ritmo acompañados por otros de ralentización de este crecimiento (figura 4.5). La senda de crecimiento no se ve alterada. La velocidad en la toma de expectativas afecta, por tanto, a las fluctuaciones cíclicas, no al crecimiento a largo plazo.

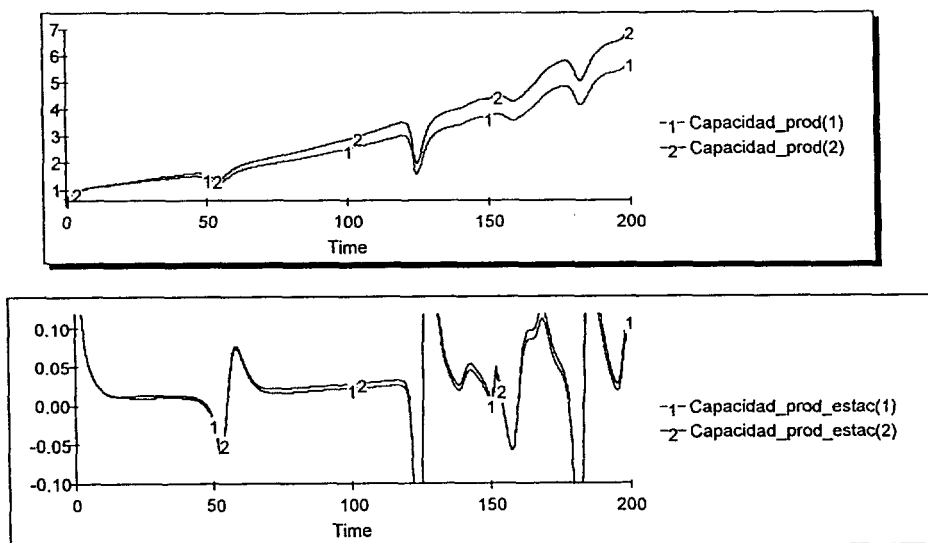


Figura 4.3: Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\varepsilon = 0.05$.

En todas las variaciones que hemos realizado el comportamiento en sincronía de los sectores se ha conservado. Parece, entonces, que este comportamiento es robusto frente a cambios en las circunstancias que rodean a la economía, como de hecho se observa en la realidad. Seguidamente estudiaremos, de la misma forma que en Kampmann et al. (1994), las variaciones en el modo de acoplamiento cuando se producen cambios en los parámetros α y $\Delta\tau$.

Zonas de acoplamiento

Hemos realizado una serie de simulaciones del modelo, variando los parámetros α y $\Delta\tau$ en un rango amplio, para observar cómo se modifican las regiones de acoplamiento con respecto a los modelos anteriores (Sternan y Mosekilde 1993, Kampmann et al. 1994). Los resultados, descritos en la figura 4.6, muestran que la sincronización entre los modos cíclicos de los dos sectores

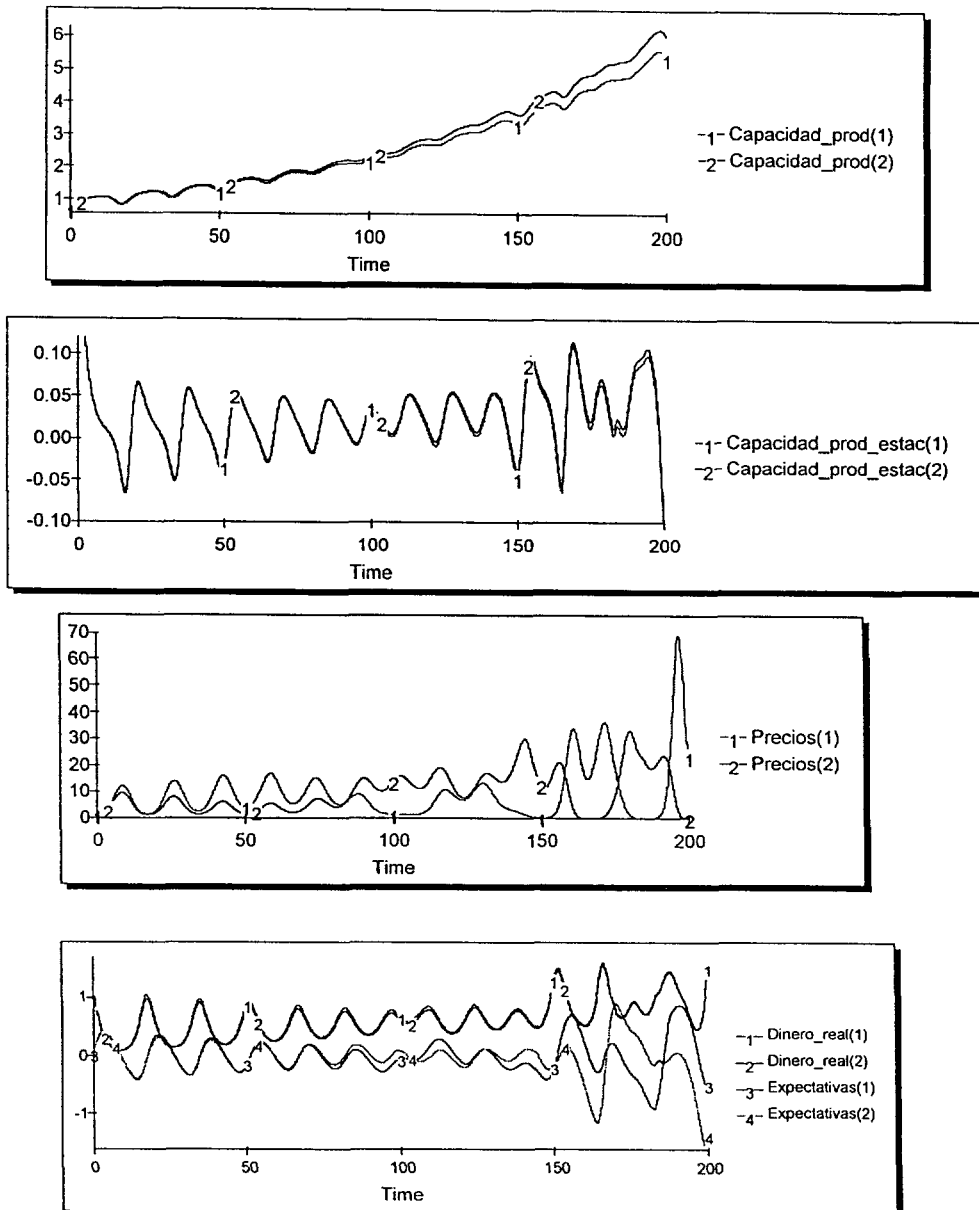


Figura 4.4: Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\beta = 3$.

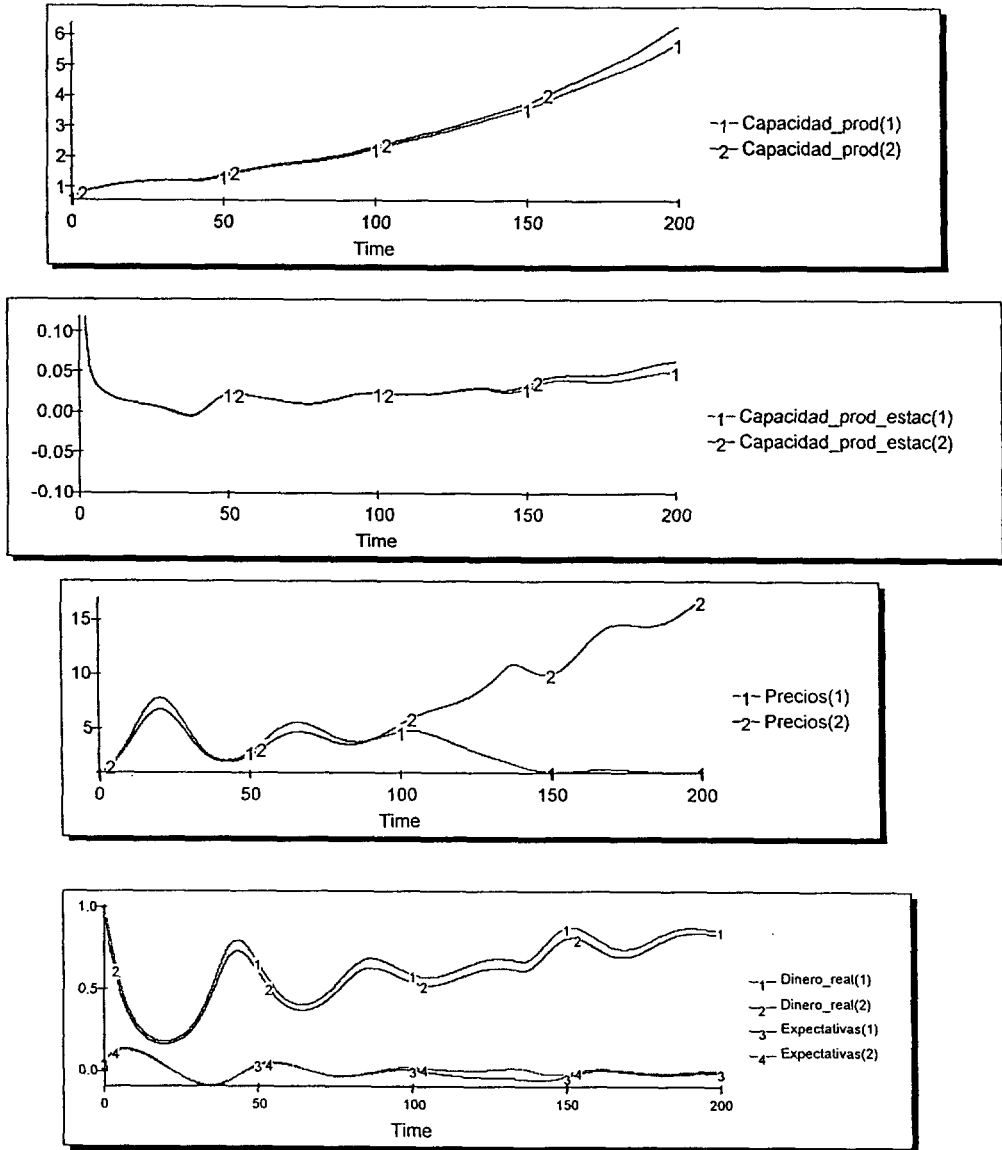


Figura 4.5: Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación $\beta = 0.4$.

rellena *todo* el espacio para valores usuales de los parámetros. La introducción del dinero supone, como ya hemos comentado anteriormente, un nuevo nexo de emparejamiento entre los sectores, que hace que la sincronización se extienda a regiones donde la diferencia entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos es muy grande y el grado de dependencia no muy elevado.

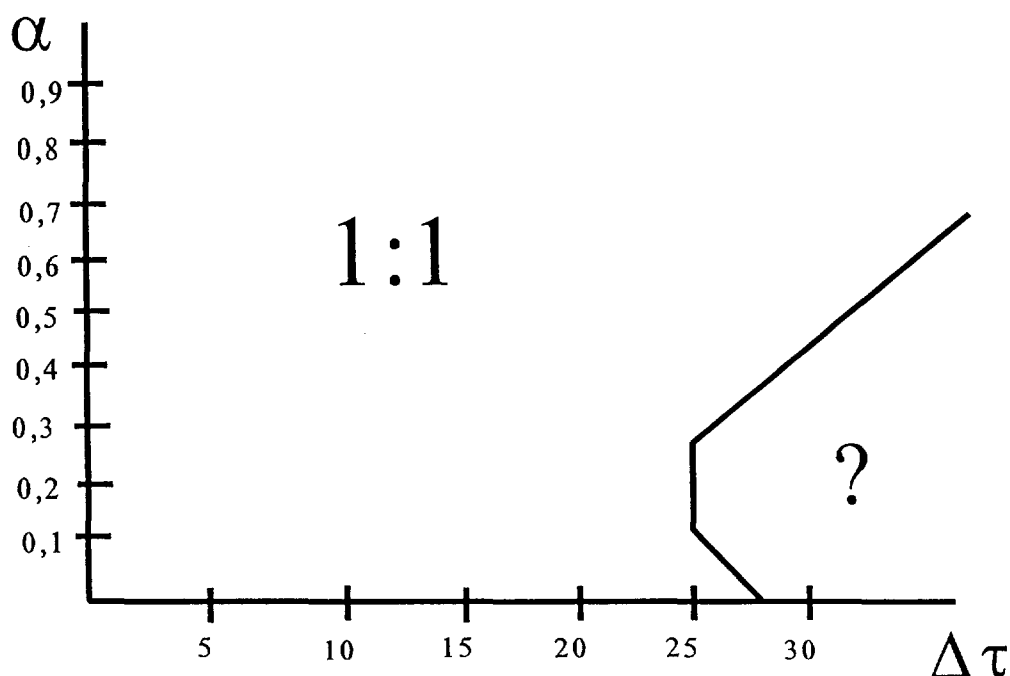


Figura 4.6: Expectativas adaptativas. Lenguas de Arnol'd para el modelo desagregado monetario de acoplamiento entre ciclos económicos. Obsérvese como la región de sincronización rellena todo el espacio paramétrico conocido.

Las simulaciones nos muestran que, cuando el grado de dependencia entre los sectores es suficientemente bajo, la capacidad productiva de los sectores manifiesta un comportamiento oscilatorio amortiguado. Esta situación lleva a inducir que el comportamiento oscilatorio viene determinado también por la

dependencia entre los sectores. En caso de poca dependencia, ambos sectores manifiestan un comportamiento creciente sin que le afecte las circunstancias en las que se encuentra el otro sector. El caso extremo ($\alpha = 0$) fue una de las conclusiones a las que llegamos en el desarrollo analítico del modelo desagregado de onda larga en el capítulo III, y que en este modelo se conserva.

Hemos observado además que, a medida que aumenta la diferencia en los tiempos de vida medios de los capitales producidos, la capacidad productiva llega a mayores niveles en el mismo horizonte temporal, sobre todo la del sector de menor tiempo de vida medio de su capital. A su vez, los precios de este capital también alcanzan cotas más altas. Esto es debido a que los sectores demandan gran cantidad de este tipo de capital, ya que su depreciación es alta. En caso de una elevada dependencia, las capacidades productivas se igualan y no aumentan tanto, ya que el sector con capital de menor tiempo de vida medio necesita gran cantidad de capital proveniente del otro sector, con lo que las demoras asignadas a este sector afectan a su producción. Por ejemplo, si el sector productor de ordenadores necesitara de mucho capital de tipo construcción para su producción, el crecimiento de este sector sería más lento que si no dependiera tanto del sector de la construcción, ya que los retrasos en la ejecución y puesta en funcionamiento de una obra ralentizan su producción y la equilibran con los otros sectores. Este hecho puede ser observado en las simulaciones expuestas en la figura 4.7.

Las simulaciones efectuadas también han constatado que el periodo de los ciclos sincronizados, que es aproximadamente de 25 años, no se ve sensiblemente afectado por cambios en las variables α y $\Delta\tau$. Esto nos indica la fortaleza del emparejamiento que proporciona el dinero, sincronizando la producción de sectores muy dispares. Por tanto, nuestro modelo induce a pensar, a diferencia del modelo desagregado de onda larga, que la diferencia entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos no es un factor

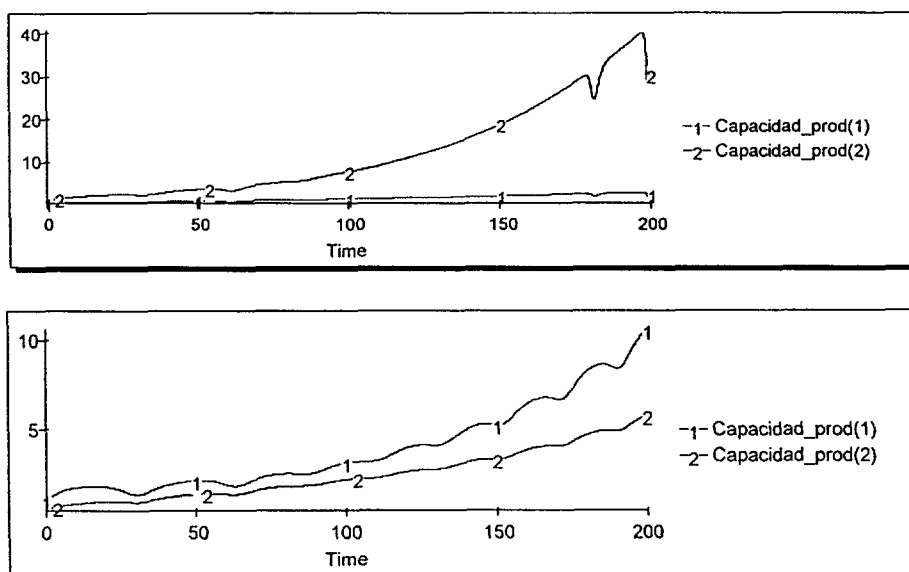


Figura 4.7: Expectativas adaptativas. Simulación realizada para el valor de los parámetros idéntico a la figura 4.1, con la variación: arriba, $\alpha = 0.2$, $\Delta\tau = 25$; abajo, $\alpha = 0.8$, $\Delta\tau = 25$.

determinante en la diversificación de los modos cíclicos.

• Expectativas racionales

Vamos a suponer ahora que los agentes siguen la hipótesis de expectativas racionales en la formación de sus estimaciones del precio. Consideraremos, como ya comentamos en la sección 4.2, la llamada previsión perfecta o miopía, que implica suponer que la variación en las expectativas es idéntica a la variación real de la inflación. De esta manera, la ecuación:

$$\left(\frac{\dot{p}_i}{p_i}\right)^e = \frac{\dot{p}_i}{p_i}, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.63)$$

sustituye en el modelo a la ecuación 4.37. Obsérvese que esta ecuación se puede considerar como un caso degenerado de la ecuación que representa la

hipótesis de expectativas adaptativas cuando el coeficiente de expectativas es muy alto. Podemos considerar, entonces, que la miopía se verifica cuando la corrección de las expectativas es instantánea.

La consideración de esta hipótesis supone que la forma de la ecuación 4.36, que gobierna la evolución de los precios, no sea la misma que anteriormente. Ahora no tiene sentido que las expectativas influyan en la evolución de la inflación, pues estas expectativas son exactamente iguales a la evolución real de la inflación. Los precios están gobernados exclusivamente por desequilibrios en los mercados de dinero y bienes. De esta manera, la ecuación 4.36 se transforma en la siguiente:

$$\frac{\dot{p}_i}{p_i} = \xi \left[\left(\frac{M}{p} \right)_i - g_i(\cdot) \right] + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^n O_{ji} + \sum_{j=1}^n O_{ji}^c - x_i \right), \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.64)$$

Vamos a iniciar el estudio presentando el comportamiento del modelo, con estas hipótesis, para la situación anterior de los parámetros. No tiene sentido fijar el valor de β ya que en este caso no influye en el modelo. El resultado de la simulación puede observarse en la figura 4.8.

Comparando la gráfica 4.8 con la gráfica 4.1, que representa la misma situación tomando la hipótesis de expectativas adaptativas, podemos decir que el comportamiento de los sectores es muy similar en variables como la capacidad productiva y los precios, sólo que, en el caso de expectativas racionales, las fluctuaciones han desaparecido completamente. Las variables manifiestan una senda de crecimiento estable sin presentar oscilaciones alrededor de la misma. La elección del modo de formación de expectativas es entonces fundamental para el comportamiento cíclico del modelo.

El comportamiento de la figura 4.8, es sensible también a las condiciones iniciales, aunque se manifiesta, de una forma general, una senda de crecimiento en la capacidad productiva sin presentar oscilaciones. Al igual que en el

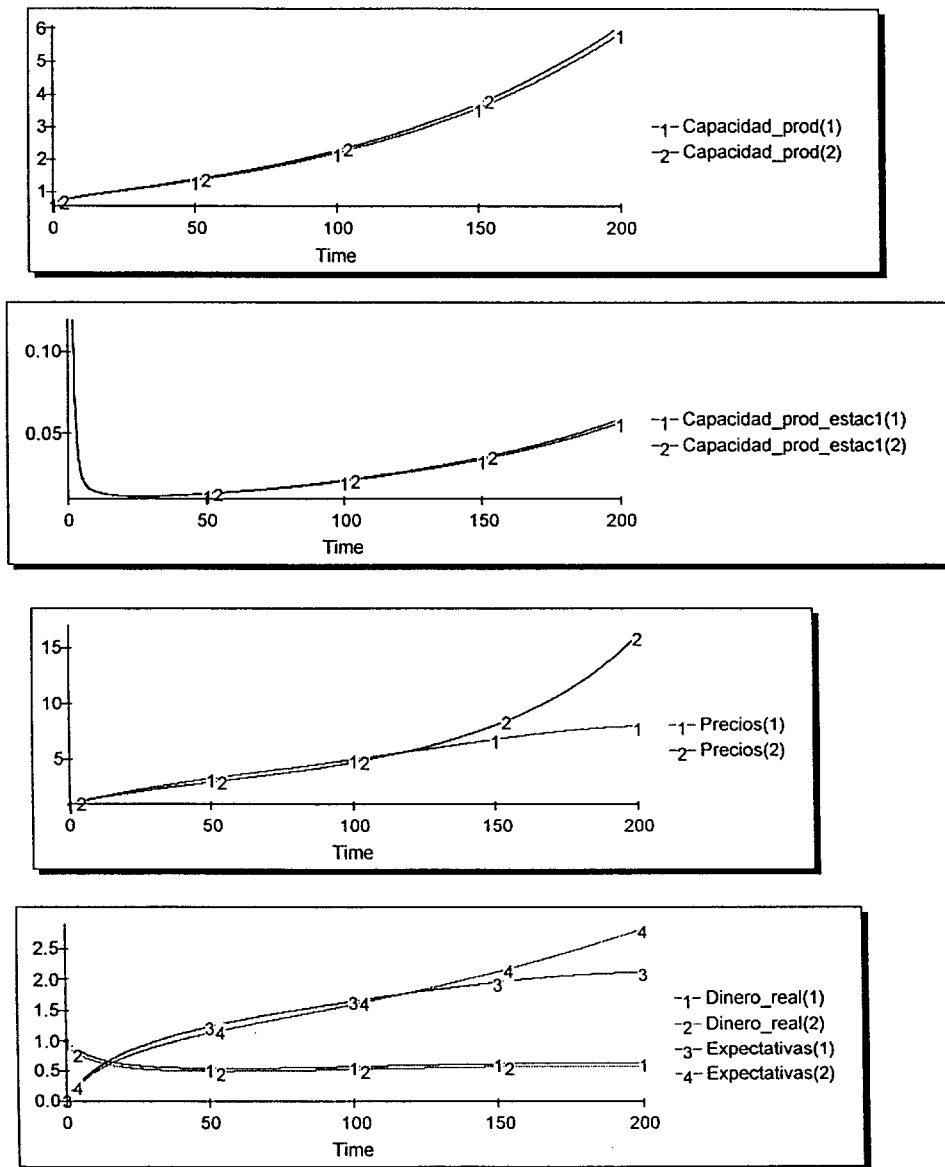


Figura 4.8: Expectativas racionales. Los valores de los parámetros son: $\kappa = 3$, $\delta = 1.5$, $\tau^K = \tau^S = 1.5$, $\tau = 20$, $\tau_1 = 25$, $\tau_2 = 15$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$, $\xi = 0.1$, $s = 0.03$, $z = 0.01$.

caso de expectativas adaptativas, hemos realizado también un análisis de la sensibilidad frente a cambios en todos los parámetros, salvo el de crecimiento en la oferta monetaria, z . Los resultados cualitativos son similares, en líneas generales, al caso anterior, pero sin fluctuaciones a lo largo de la tendencia. Existen, no obstante, algunos casos especiales que presentan oscilaciones muy irregulares ($s > 0.05$)¹⁰.

Por tanto, si los agentes se comportan de manera racional, la economía avanzará por la misma senda de crecimiento que en el caso adaptativo, pero sin presentar oscilaciones. Por tanto, no tiene sentido plantearse en este caso el acoplamiento entre los ciclos, porque éstos han desaparecido. Los agentes previenen exactamente las variaciones que van a sufrir los precios y eso origina una estabilización del comportamiento cíclico de la economía. Así, en esta ampliación del modelo desagregado de onda larga, la aparición del ciclo económico depende de la formación de expectativas, hecho que no estaba incluido en los modelos previos presentados por Kampmann et al. (1994) y sus ampliaciones incorporando el sistema de precios (Kampmann 1996). El dinero ha generado otra forma de describir endógenamente la aparición de los ciclos y la sincronización entre ellos, no contemplada hasta el momento.

4.3.2 Efecto de la existencia de dinero

En esta sección analizaremos las consecuencias sobre las variables reales y monetarias de la economía de la incorporación del dinero en el modelo de

¹⁰Hemos observado que, para valores de α y $\Delta\tau$ muy elevados, las capacidades productivas alcanzan valores inferiores en el caso de expectativas racionales que en el caso de expectativas adaptativas. La razón de esta situación puede estar en que el caso adaptativo produce unas fluctuaciones en el precio de gran amplitud, que originan desequilibrios en la demanda que terminan por incrementar la producción. En el caso de expectativas racionales, la inflación está controlada, pero a costa de un menor crecimiento en la producción.

acoplamiento entre los ciclos económicos. Contrastaremos una forma de hipótesis de neutralidad del dinero, propuesta por los modelos de Tobin y sucesivos (sección 4.1.2), basada en el análisis del efecto de la existencia o no de dinero en una economía como la presentada por el modelo. Esta contrastación será llevada a cabo según la región del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ en la que nos encontremos, o sea, según la situación de dependencia y diferencia entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos por los sectores en que esté situada la economía.

Como hemos vislumbrado en el análisis de la sensibilidad, la formación de las expectativas juega un papel determinante en la evolución de la economía en este modelo. Es de suponer que influirá también en las consecuencias de la existencia de dinero sobre las variables reales y monetarias. Es por ello que hemos realizado estos contrastes suponiendo que los agentes forman sus expectativas o adoptando expectativas adaptativas (ecuación 4.37), o adoptando expectativas racionales (ecuación 4.38). Los resultados van a ser sensiblemente diferentes y merecerán fructíferos comentarios. Llevemos a cabo, por tanto, el estudio del comportamiento del modelo para estas dos situaciones.

● Expectativas adaptativas

En la figura 4.9 se representa la evolución de las variables que gobiernan la economía para el caso que el dinero real existente en la economía sea nulo ($(M/p)_i = 0, \xi = 0, \forall i \in \{1, 2\}$), dada la misma situación de los parámetros que el caso inicial. Como puede ser observado en esta figura, la capacidad productiva crece a unas cotas más bajas que en la situación de existencia de dinero (figura 4.1). Esto es debido a que el hecho de la existencia del dinero y una evolución creciente del mismo genera cierto crecimiento en desequilibrio de los precios. Este crecimiento empuja la demanda en los dos sectores, generando así una tasa más elevada en el crecimiento de la producción, a costa de un

comportamiento irregular en los precios.

La ausencia de dinero elimina las fricciones existentes, con lo que el comportamiento de la economía manifiesta una evolución creciente sin presentar oscilaciones. En una economía como la presentada por este modelo, el dinero genera un aumento en la tasa de productividad a costa de mayor inestabilidad.

Esta situación descrita se verifica para el caso inicial de una dependencia media entre los sectores ($\alpha = 0.5$) y una diferencia de los tiempos de vida medios de los capitales producidos no muy elevada ($\Delta\tau = 10$). Hemos hecho múltiples simulaciones suponiendo otra situación entre los sectores, y las consecuencias sobre la capacidad productiva se presentan en el plano $(\Delta\tau, \alpha)$ (figura 4.10). Obsérvese que la mejoría en la senda de crecimiento de la capacidad productiva en presencia de dinero no se verifica para cualquier combinación de los parámetros. Cuando disponemos de valores de la dependencia entre los sectores bajos, la ausencia del dinero aumenta la capacidad productiva de los mismos, además de eliminar las fricciones existentes. Esto podría ser debido a que, en esta situación, un sector no necesita en demasía del capital producido por el otro sector, lo que lleva a que los sectores manifiesten un comportamiento independiente, no afectado por los desajustes en el mercado de dinero. La presencia de dinero supone así un factor distorsionador en su evolución.

A continuación, vamos a observar el efecto del dinero en este modelo cuando se asumen expectativas racionales. Los resultados se presentan sensiblemente diferentes al caso adaptativo.

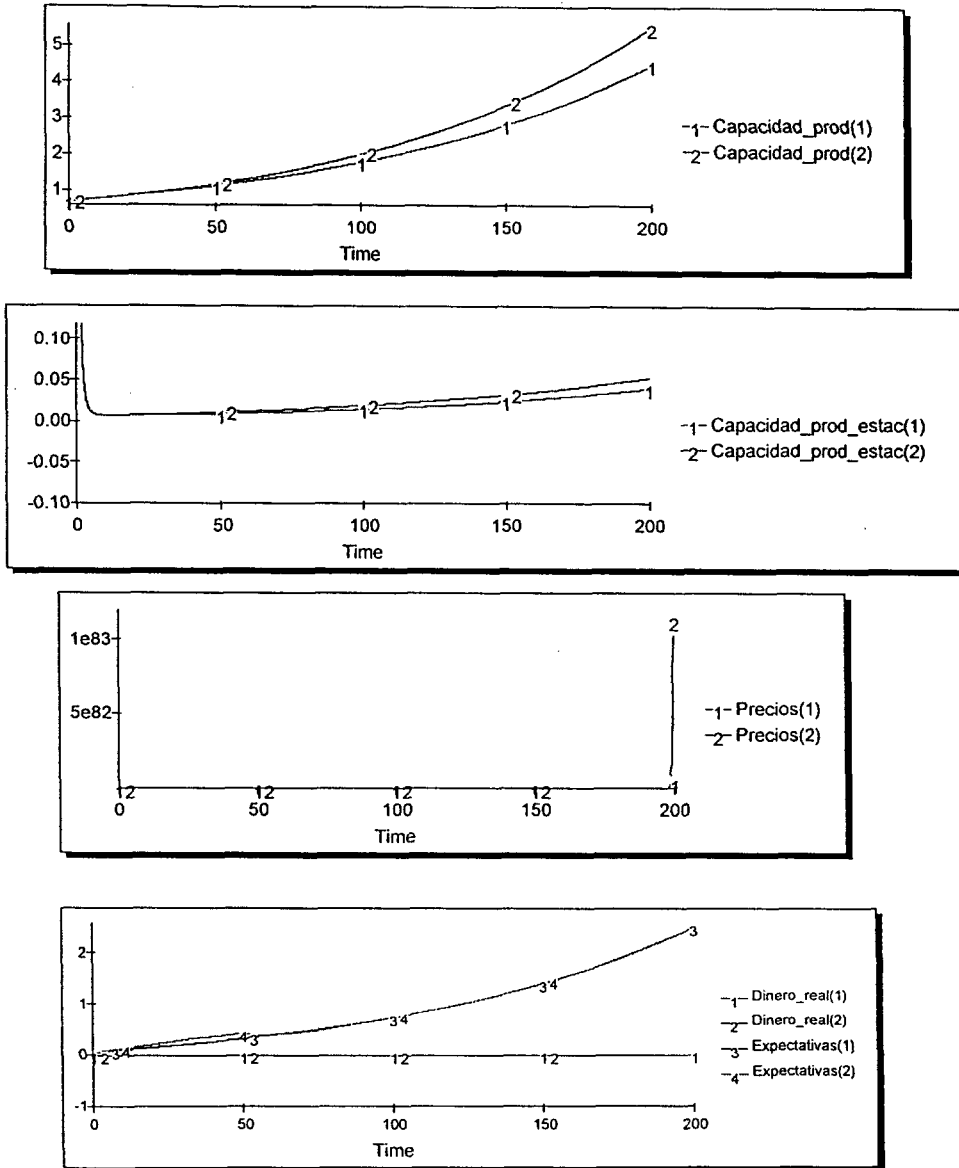


Figura 4.9: Expectativas adaptativas. Simulación para el caso similar a la figura 4.1 con $(M/p)_i = 0, \xi = 0, \forall i \in \{1, 2\}$.

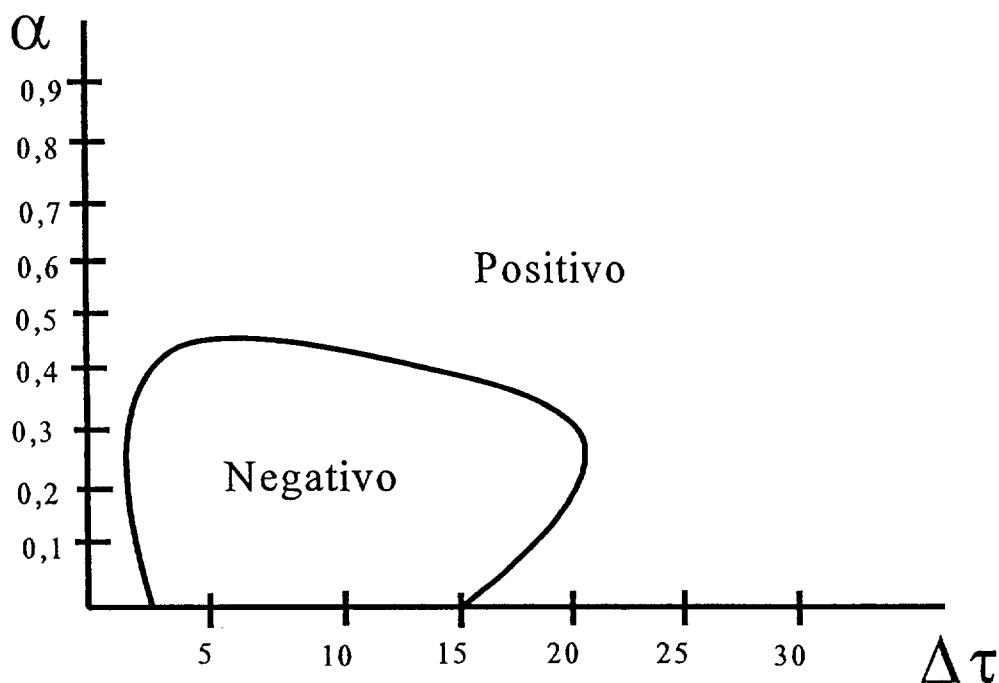


Figura 4.10: Expectativas adaptativas. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ para las cuales la existencia de dinero es positiva para la producción y regiones para las que no lo es.

- **Expectativas racionales**

En este apartado estudiaremos las consecuencias, sobre las variables del modelo con expectativas racionales, de una situación sin dinero ($(M/p)_i = 0$, $\xi = 0$, $\forall i \in \{1, 2\}$), y lo representaremos en el plano formado por los parámetros $(\Delta\tau, \alpha)$, de forma análoga al caso de expectativas adaptativas. No obstante, vamos a empezar presentando la evolución de la capacidad productiva en la situación inicial en caso de que el dinero no estuviera presente en la economía (figura 4.11). Obsérvese en esta gráfica que la capacidad productiva tiene una tasa de crecimiento menor que en el supuesto de la existencia de dinero (figura 4.8). Es, por tanto, positivo para la producción, la

existencia de cierta cantidad de dinero en la economía que agilice la demanda de bienes por su acción inflacionaria.

De la misma forma, hemos simulado los resultados del modelo con y sin dinero para múltiples situaciones en el plano $(\Delta\tau, \alpha)$, y los resultados los exponemos en el diagrama formado por estos parámetros (figura 4.12).

Obsérvese que, en este caso, existe una amplia región en el diagrama en la que el dinero es positivo, ya que aumenta la tasa de crecimiento de las capacidades productivas. Esto puede ser debido a que el cambio en los precios relativos que supone la existencia del dinero (siempre con crecimiento moderado) empuja la demanda en favor de uno u otro sector, con lo que el resultado final es una mayor tasa de crecimiento de la producción. El dinero sirve, entonces, como impulsor de la demanda. Existen casos en los que esta situación no se verifica. Cuando se presenta una alta dependencia entre los sectores y mucha diferencia en los tiempos de vida medios de los capitales ocurre el efecto contrario. En este caso, debido a que el capital de un sector tiene una depreciación muy elevada, la demanda es muy grande y, con la existencia de dinero, los precios crecen a un ritmo muy elevado. Esto trae consecuencias negativas debido a la sustituibilidad entre los factores productivos, con lo que el efecto conjunto es un crecimiento más lento que en el caso de ausencia de dinero.

La situación de expectativas adaptativas es diferente posiblemente porque, en ese caso, los precios se fijan de acuerdo a unas expectativas donde se cometen errores sistemáticos, con lo que las demandas no se ven afectadas tan indefectiblemente como en el caso de las expectativas racionales.

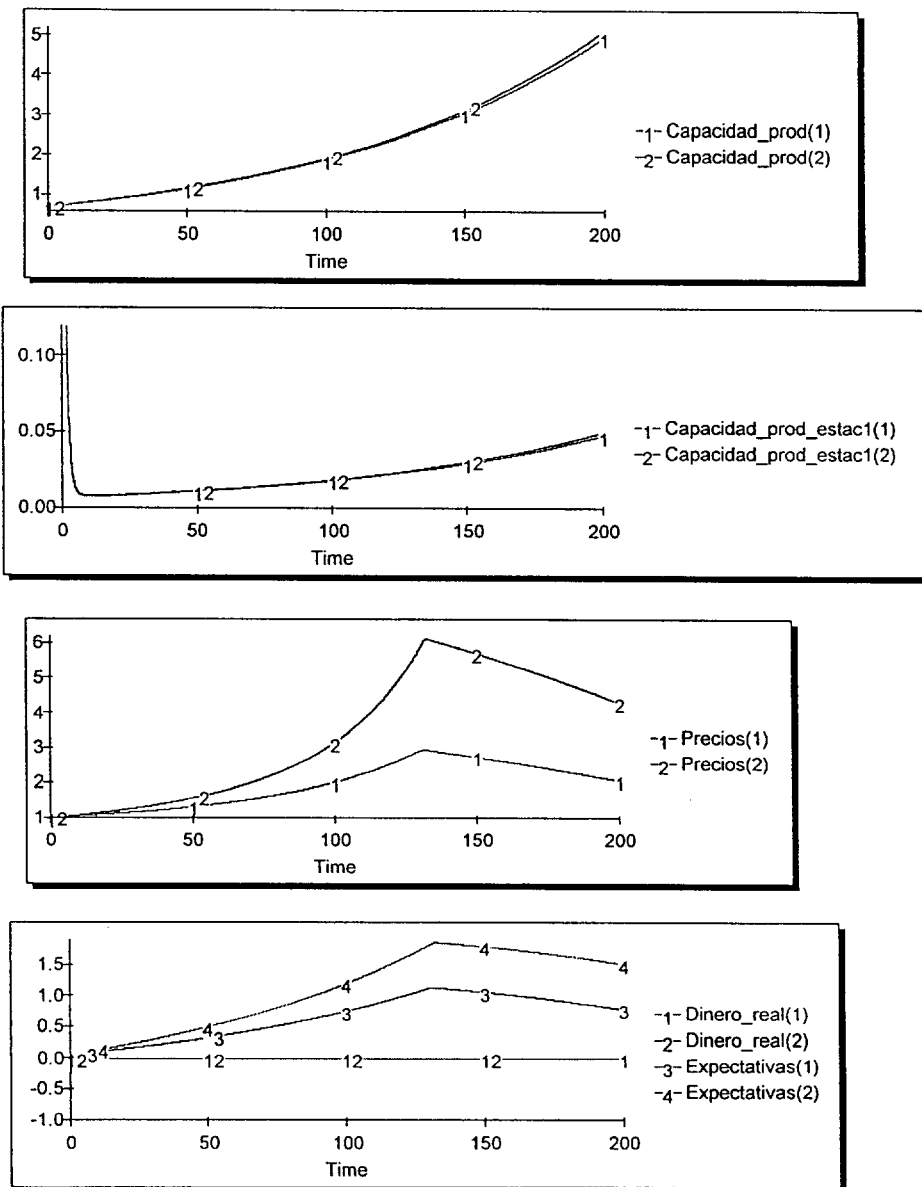


Figura 4.11: Expectativas racionales. Simulación para el caso similar a la figura 4.8 con $(M/p)_i = 0$, $\xi = 0$, $\forall i \in \{1, 2\}$.

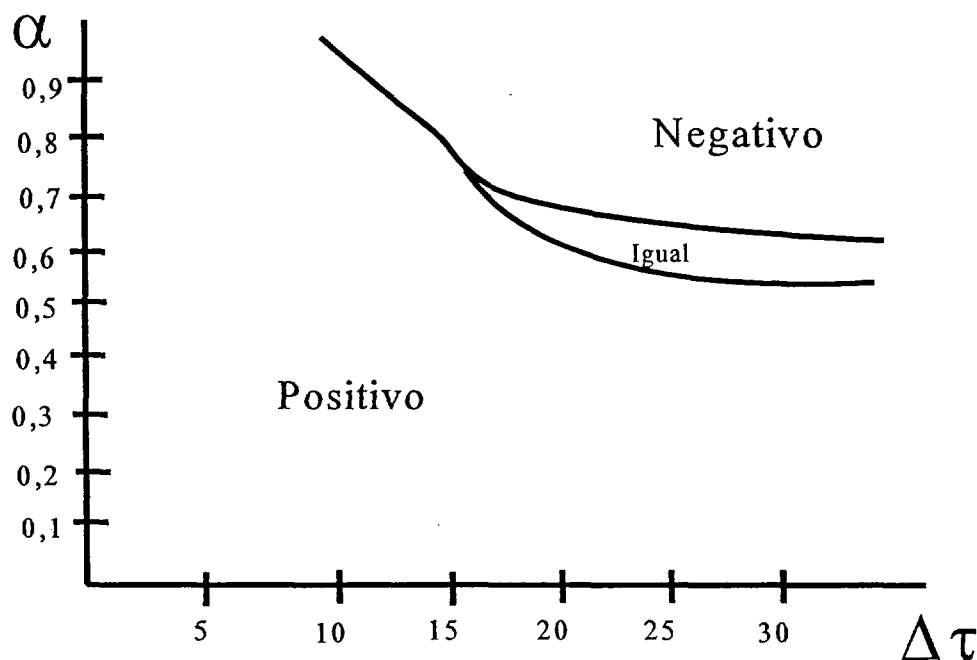


Figura 4.12: Expectativas Racionales. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ para las cuales la existencia de dinero es positiva para la producción y regiones para las que no lo es.

4.3.3 Hipótesis de neutralidad del dinero en el modelo

En esta sección vamos a simular las consecuencias sobre la capacidad productiva y los precios de aumentar o disminuir la tasa de crecimiento de la oferta monetaria. Con ello contrastamos la hipótesis de neutralidad del dinero en el modelo. La adopción de la hipótesis de expectativas desempeña un papel determinante.

- **Expectativas adaptativas**

Hemos realizado múltiples simulaciones para una amplia muestra de

valores de los parámetros $(\Delta\tau, \alpha)$. No se verifican consecuencias sobre el acoplamiento del tipo 1 : 1, con lo que comprobamos la fortaleza de la sincronización frente a variaciones en la oferta monetaria. No obstante, es interesante también señalar las consecuencias que tienen estas expansiones o contracciones monetarias sobre variables como la capacidad productiva o los precios. Los resultados los presentamos en la gráfica 4.13.

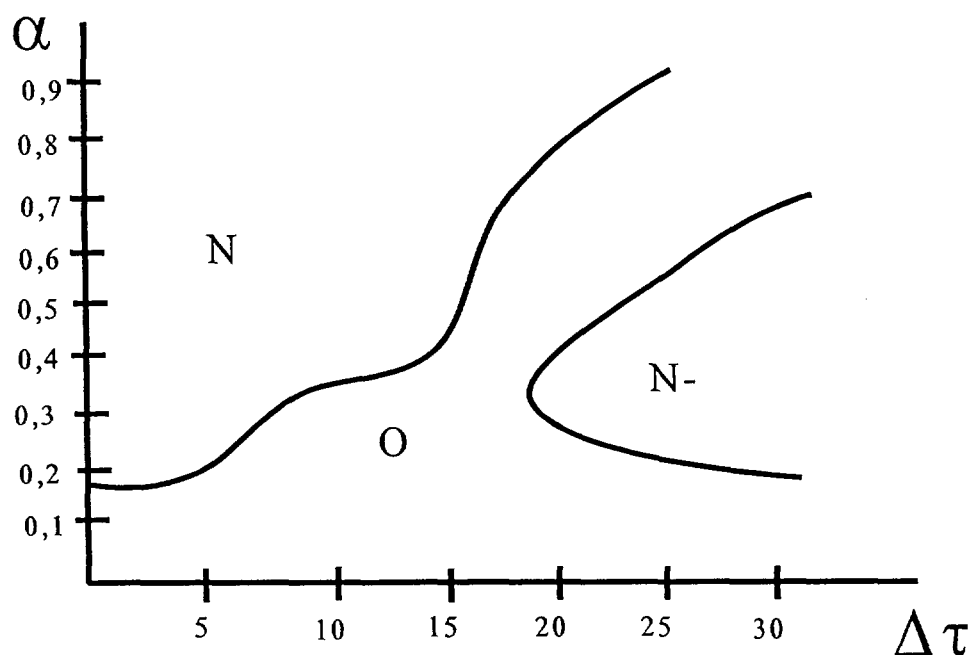


Figura 4.13: Expectativas adaptativas. Regiones del espacio paramétrico donde se producen los mismos efectos ante un cambio en z . $N \equiv$ neutralidad del dinero. Cambios en el crecimiento monetario sólo se traducen en cambios proporcionales en el nivel de precios. $O \equiv$ existencia de una tasa óptima de crecimiento monetario. $N- \equiv$ Cambios en el crecimiento monetario sólo se traducen en cambios en los precios, pero en la dirección opuesta.

Como puede observarse en esta gráfica, para ciertas regiones del espacio paramétrico, entre las que incluimos valores bajos y medios en la diferencia de los tiempos de vida de los capitales, las variaciones en la tasa de crecimiento

monetario sólo tienen efectos inflacionarios. Estos resultados son acordes con las tesis monetaristas y clásicas.

No obstante, existen otras regiones en el espacio paramétrico para las cuales variaciones en la tasa de crecimiento monetario tienen efectos diversos. Por ejemplo, hemos descubierto que para situaciones de mayor diferencia en los tiempos de vida medios de los capitales producidos, un aumento suficientemente elevado del crecimiento de la oferta monetaria llega a ser nocivo, produciendo una tasa de crecimiento de la producción a largo plazo por debajo de sus niveles iniciales, junto con un mayor incremento en los precios. En cambio, si en estas mismas circunstancias, reducimos fuertemente la tasa de crecimiento monetaria, la capacidad productiva también frena su crecimiento y los precios llegan incluso a subir.

Una de las razones de este comportamiento aparentemente contradictorio puede estar en que, por ejemplo, debido a una alta dependencia y diferencia en los tiempos de vida medios de los capitales producidos, los sectores tienen unas relaciones capital-producto κ_i , $\forall i \in \{1, 2\}$, muy diferentes en tamaño, siendo mucho más elevada en el sector con menor tiempo de vida medio del capital producido. Esta situación genera que cambios ligeros en los precios relativos, producidos por el desequilibrio que genera una pequeña inyección monetaria, aumenten la demanda en favor de los capitales más productivos, con lo que las capacidades productivas llegan a unos niveles más altos que en otras situaciones más estáticas. Si la inyección monetaria es muy elevada, la subida de los precios genera un descenso en la demanda, reduciendo su producción con respecto a la situación anterior.

Por tanto, para las situaciones anteriores, existe una tasa de crecimiento en la oferta monetaria que podemos considerar óptima, ya que descender de esa tasa puede acarrear menor crecimiento en la capacidad productiva e

incrementarla origina también una tasa de crecimiento menor con incremento de precios.

Este modelo, por tanto, genera situaciones que respaldan las tesis clásicas sobre el comportamiento de los factores monetarios junto con otras situaciones que no las apoyan. Estas situaciones dependen del grado de dependencia entre los sectores y de la diferencia en las tasas de depreciación del capital producido por cada uno de ellos. Existen otro tipo de situaciones en las que los precios van incluso en dirección contraria al crecimiento de z , debido al efecto desequilibrante, en el modelo, de grandes diferencias en los tiempos de vida medios de los capitales.

Así, en una economía como la del modelo, no es aconsejable la expansión monetaria indiscriminada, ya que, para diversas situaciones, tiene consecuencias negativas en el crecimiento en los precios e incluso en la capacidad productiva. No obstante, en la mayoría de los casos, la existencia de cierta cantidad de dinero es positiva para la producción.

Estos comportamientos tan variados pueden ser debidos al supuesto de que los agentes toman sus expectativas de forma adaptativa. Existe un permanente mal ajuste del crecimiento de los precios que pudiera generar estas diferencias. Es posible que, si los agentes utilizaran toda la información disponible en la toma de sus expectativas, o sea, siguiéramos la hipótesis de expectativas racionales, estos comportamientos en desequilibrio se modificaran. Esta situación es la que vamos a analizar en el próximo punto.

- **Expectativas racionales**

El efecto de variaciones en la tasa de crecimiento monetario sigue las tesis de comportamiento en equilibrio para una economía regida por las hipótesis

de previsión perfecta. Así, el efecto de una expansión o contracción monetaria sobre el modelo no varía según el conjunto de situaciones de dependencia y diferencia en los tiempos de vida medios de los capitales. Estas variaciones en el crecimiento monetario se ven reflejadas en variaciones proporcionales en el nivel de precios (figura 4.14). Los aumentos en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria son altamente nocivos para la economía, dado cualquier valor de los parámetros $(\Delta\tau, \alpha)$. El efecto de grandes incrementos en z produce un incremento generalizado en los precios y, en la mayoría de las situaciones, también con un descenso en la tasa de crecimiento de la capacidad productiva.

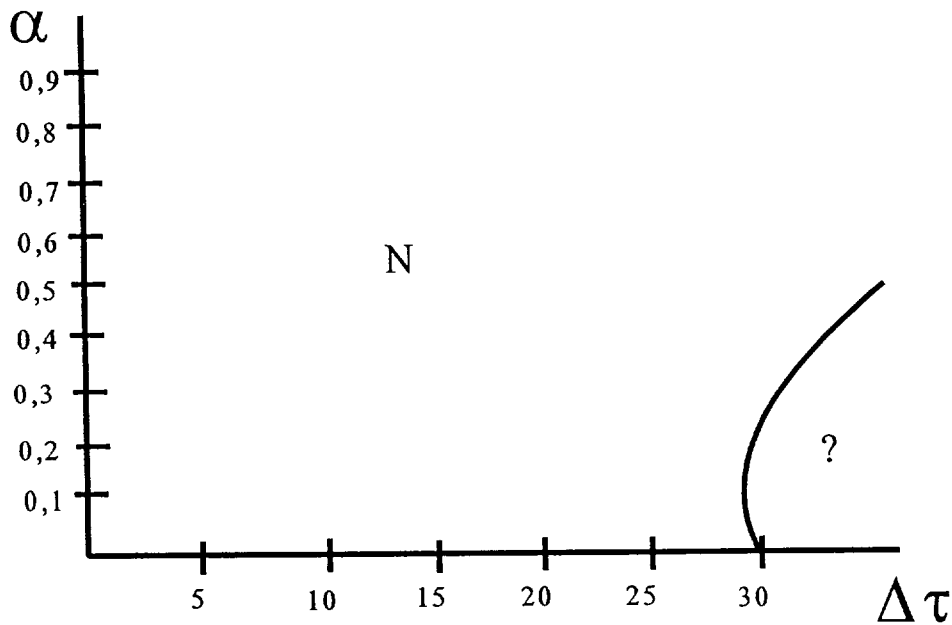


Figura 4.14: Expectativas racionales. Regiones del espacio paramétrico donde se producen los mismos efectos ante un cambio en z . En cualquier situación de los valores de $(\Delta\tau, \alpha)$, se producen cambios proporcionales en los precios.

La razón por la que se producen estos comportamientos tan nocivos con respecto a aumentos en el crecimiento de la oferta monetaria puede estar en que los precios se ajustan instantáneamente a cambios en la oferta monetaria, con

lo que la inflación se ajusta inmediatamente al nuevo tipo de crecimiento. Este incremento consiguiente en la inflación genera perturbaciones en la demanda de capital que origina, en la mayor parte de los casos, un crecimiento más lento de la producción. En el caso de expectativas adaptativas, debido a que los precios manifiestan oscilaciones por falta de previsiones exactas, la demanda no se ve tan afectada negativamente. Esto se produce a cambio, eso sí, de un incremento más elevado e irregular en los precios.

Por tanto, haciendo un balance de los resultados obtenidos, la formación de expectativas se ha erigido como una pieza fundamental no sólo en el acoplamiento entre los ciclos económicos, sino incluso en la existencia de los mismos. Así, en caso de asumir la formación de expectativas del modo adaptativo, se originan comportamientos cíclicos. Estos comportamientos cíclicos se encuentran sincronizados por muy diferentes características que presenten los sectores. En cambio, si las expectativas son racionales, la economía crece a la misma tasa pero las fluctuaciones desaparecen.

El efecto de la existencia del dinero y de una variación en el crecimiento de la oferta monetaria sobre la economía es también diferente según las expectativas que consideremos. Estos resultados son similares, en este sentido, a los obtenidos por Sargent y Wallace (1975), que estudia, en un modelo econométrico, el efecto de políticas monetarias sobre las variables reales, utilizando una u otra hipótesis de expectativas. Se ha verificado, además, que estos efectos son también diferentes según el grado de dependencia entre los sectores y la diferencia en el tiempo de vida medio del capital producido por cada uno de ellos. Por tanto, los resultados presentan una economía con un comportamiento muy rico según sean los hipótesis que tomemos y según también las relaciones entre los sectores. Este modelo, entonces, aporta unos resultados relacionados con las consecuencias de la adopción de diversas políticas en economías generales, siempre tomándolos con gran cautela, ya que

se refieren, por necesidad, a situaciones ideales.

4.3.4 Una política monetaria de control de inflación sobre el modelo

Para terminar con el estudio del comportamiento del modelo frente a los factores monetarios introducidos, vamos a analizar los efectos a largo plazo de aplicar una determinada política monetaria de control del nivel de inflación. Haremos hincapié en las consecuencias de esta política sobre variables como la producción y los precios, y las compararemos con la situación de no intervención. Supondremos el caso de disponer de una formación de expectativas del tipo adaptativo o racional, y analizaremos las diferencias que se producen al escoger una u otra hipótesis.

Concretando, supongamos que, en una economía como la introducida por el modelo, el gobierno o la autoridad monetaria competente tiene como objetivo prioritario mantener una tasa de inflación constante. Para ello, va a hacer uso de la única herramienta que puede controlar para tal efecto, la tasa de crecimiento en la oferta monetaria. Por tanto, el gobierno fija esta tasa de acuerdo al comportamiento de las expectativas de inflación con respecto al nivel de inflación deseado. Si las expectativas de inflación son mayores que el nivel deseado, el gobierno reduce la tasa de crecimiento monetaria, en caso contrario, la aumenta sin sobrepasar un tope máximo constante. Por medio del modelo, observaremos si esta política tiene éxito y qué consecuencias acarrea.

Para fijar ideas, supongamos que el objetivo de inflación se encuentra en un 2% anual, y que partimos de un crecimiento en la oferta monetaria como el caso inicial de la sección 4.3.2, o sea, $z = 1\%$ anual. Suponemos entonces, por simplicidad, que el gobierno fija periódicamente la tasa de crecimiento en

la oferta monetaria, z , en función de las expectativas de inflación agregadas, de acuerdo a la siguiente ley:

$$z = \text{Min} \left[\text{Max} \left(0.01 - \left(\frac{\dot{p}}{p} \right)^e - 0.02, 0 \right), 0.05 \right] \quad (4.65)$$

La gráfica de esta función se encuentra en la figura 4.15. Como puede observarse, a medida que las expectativas agregadas de inflación aumentan, la tasa de crecimiento en la oferta monetaria disminuye, sin descender, lógicamente, de los niveles nulos. Se supone, también, que no se quiere sobrepasar, por motivos preventivos, el crecimiento monetario del 5%.

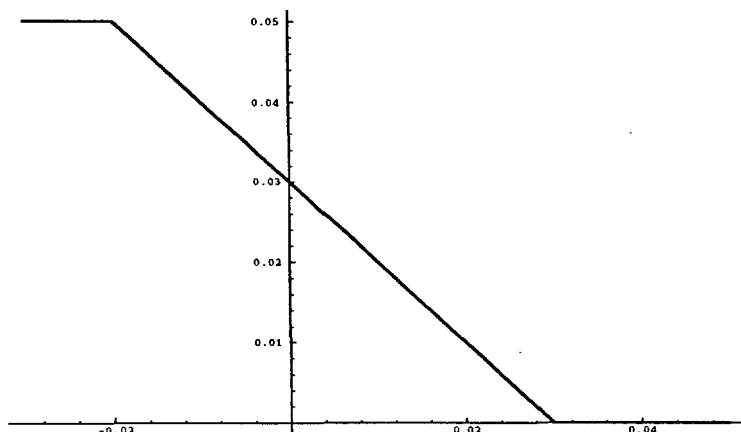


Figura 4.15: Tasa de crecimiento monetario en función del nivel de expectativas de inflación conjunta.

Para evitar la distorsión con los comportamientos transitorios, vamos a suponer que esta política se lleva a efecto desde el año 50 hasta el año 200. Entonces, de la misma forma que lo hicimos en las secciones previas, vamos a estudiar el efecto de esta política concreta en caso de adoptar la hipótesis de expectativas adaptativas o la hipótesis de expectativas racionales. Los resultados, como puede intuirse, van a ser radicalmente diferentes.

- **Expectativas adaptativas**

Primeramente simulamos esta política para el caso inicial representado en la figura 4.1. Los resultados pueden observarse en la figura 4.16. Como puede comprobarse, la adopción de esta política no tiene efectos negativos ni positivos sobre la capacidad productiva de los sectores en el plazo considerado, pero, sin embargo, no logra el objetivo de fijar la inflación (representada por medio de la evolución de las expectativas conjuntas) en los niveles deseados. Los precios, a su vez, alcanzan unas cotas más altas debido, fundamentalmente, al impulso monetario que se generó en épocas de deflación de los precios. Los ciclos no han sido eliminados en el plazo expuesto y han reducido su periodo.

No obstante, este resultado no es general para cualquier circunstancia en la que se encuentren los sectores. Hemos adoptado esta política para una amplia muestra de situaciones en el diagrama paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$, y los comportamientos de las variables son muy diversos. Como puede observarse en la figura 4.17, existen regiones de este espacio para las cuales se alcanza el objetivo inflacionario en el plazo previsto y otras en las que no se alcanza. En ningún caso la adopción de esta política tiene consecuencias sobre la tasa de crecimiento en la producción para ambos sectores. En todas ellas se produce una reducción paulatina en el periodo de las oscilaciones que pueden, en caso de alcanzarse los objetivos de inflación previstos, desembocar en una convergencia hacia una senda estable de crecimiento tanto en los precios como en la producción.

Las razones de este comportamiento variado pueden fundamentarse utilizando los mismos argumentos seguidos en la sección 4.3.2, basados en la existencia de capitales con altas depreciaciones o depreciaciones medias, junto con altas o bajas dependencias entre los sectores, y sus consecuencias en la demanda y los precios.

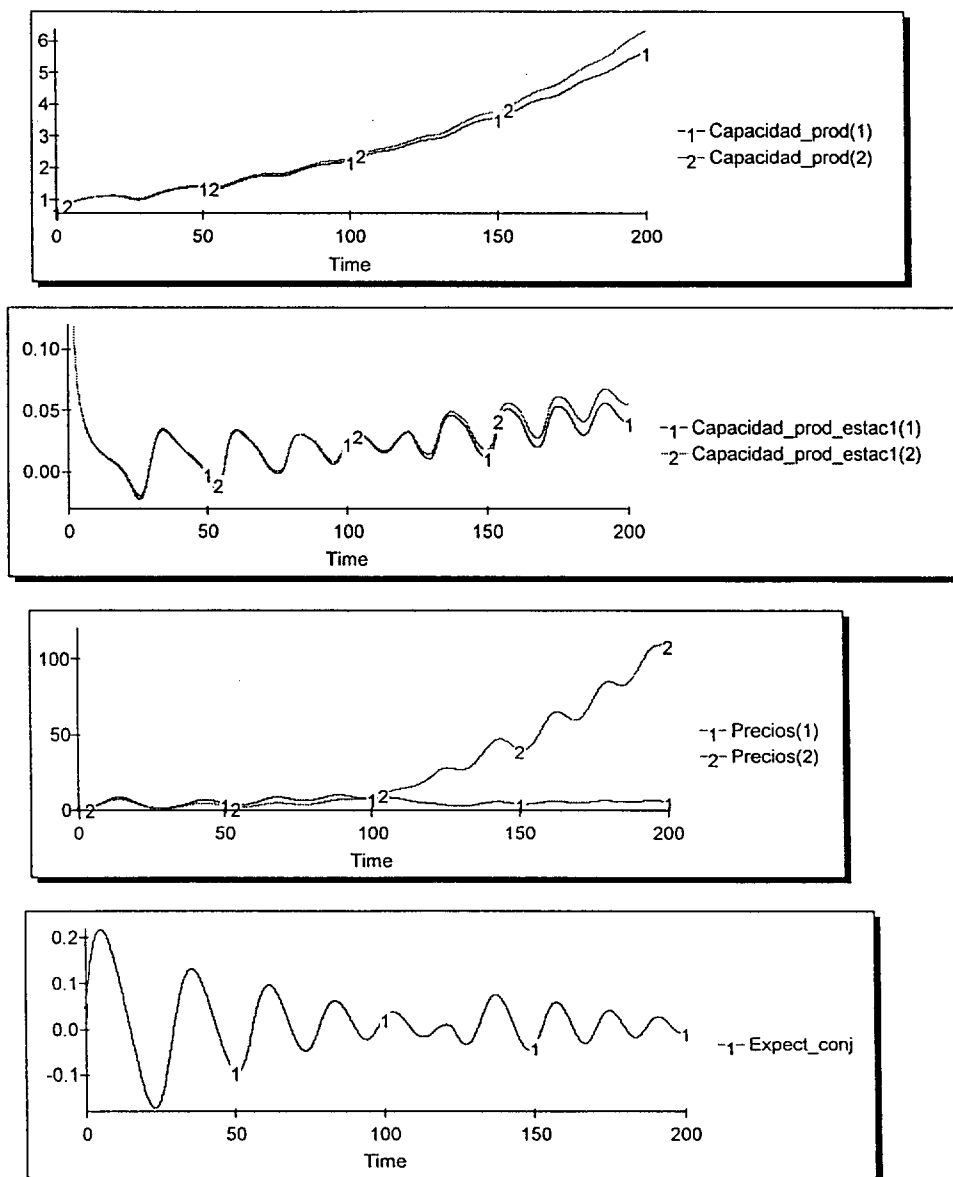


Figura 4.16: Expectativas adaptativas. Efecto de la política antiinflacionaria sobre una economía con unos indicadores como en la figura 4.1. La abreviatura "expect_conj" indica *expectativas de inflación conjunta*.

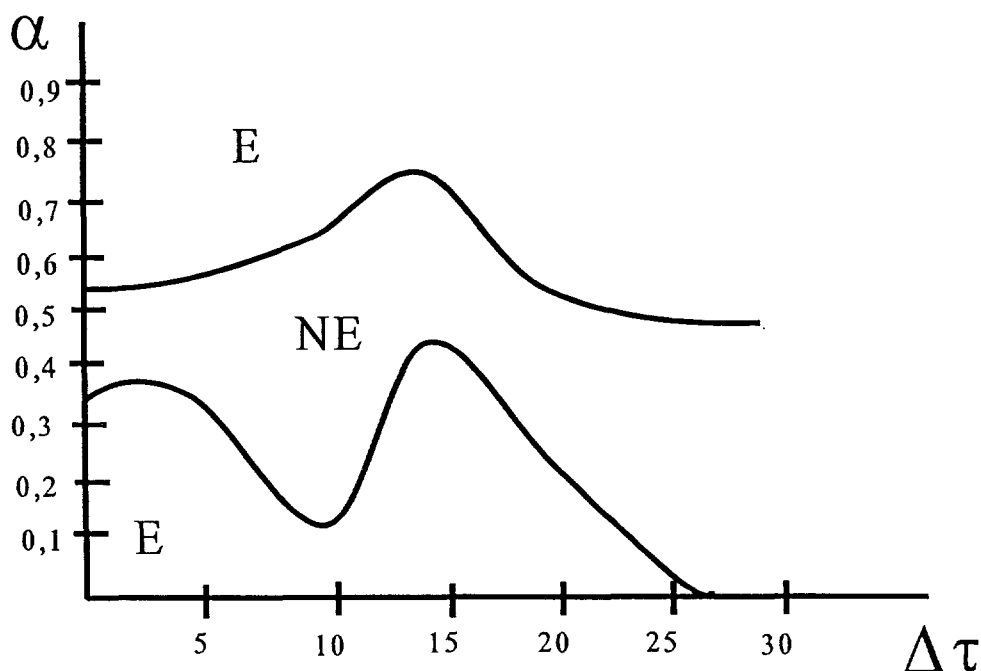


Figura 4.17: Expectativas adaptativas. Regiones del espacio paramétrico $(\Delta\tau, \alpha)$ donde se producen las mismas respuestas hacia la política antiinflacionaria. $E \equiv$ La inflación se estabiliza en el objetivo deseado. $NE \equiv$ La inflación no se estabiliza en el objetivo deseado.

Resumiendo, las consecuencias de esta política de control inflacionario en una economía gobernada por la hipótesis de expectativas adaptativas es muy desigual, según las situaciones en que se encuentren las relaciones entre los sectores y los tiempos de vida medios de los capitales, aunque no se produce un efecto perjudicial sobre la producción en cualquier caso. A pesar de este resultado esperanzador, en casi todas las situaciones se produce un incremento generalizado en el nivel de los precios producido por etapas con alta inflación. Las consecuencias nocivas transitorias de estas situaciones no son contempladas en el modelo, que presenta la economía desde un enfoque a largo plazo. Es por

ello que, en líneas generales, no se pueda presentar esta política como positiva.

- **Expectativas racionales**

Como ya comprobamos en la sección 4.3.2, es de esperar que, en este caso, el efecto de esta política sobre la economía sea más homogéneo que en el caso de la hipótesis de expectativas adaptativas. Como en el apartado previo, hemos simulado el efecto de esta política sobre el caso inicial, obteniendo el resultado presentado en la figura 4.18. Comparando con la figura 4.8, se puede comprobar que la adopción de esta política no tiene efectos negativos sobre las capacidades productivas y se ha conseguido reducir el crecimiento de los precios, aunque sin llegar a los objetivos de inflación previstos.

Esta situación se repite en todos los casos que nosotros hemos simulado para diferentes valores de $(\Delta\tau, \alpha)$. El comportamiento nunca manifiesta oscilaciones y siempre se consigue una reducción en los precios sin llegar a los niveles deseados (figura 4.19). La previsión perfecta en la inflación, por tanto, supone que políticas de control de inflación sean siempre efectivas, ya que los recortes en el crecimiento monetario tienen su correspondencia directa en el nivel de precios.

4.4 **Discusión**

El modelo desagregado de onda larga (Kampmann et al. 1994), basado en hipótesis presentadas por el modelo de onda larga en Sterman (1985), y del cual hacemos un estudio analítico en el capítulo anterior, dejó abiertas varias líneas de profundización y extensión del mismo, encaminadas a modelizar el proceso de acoplamiento de una forma más cercana a la realidad. En este sentido, este modelo ha supuesto una ampliación del modelo desagregado de

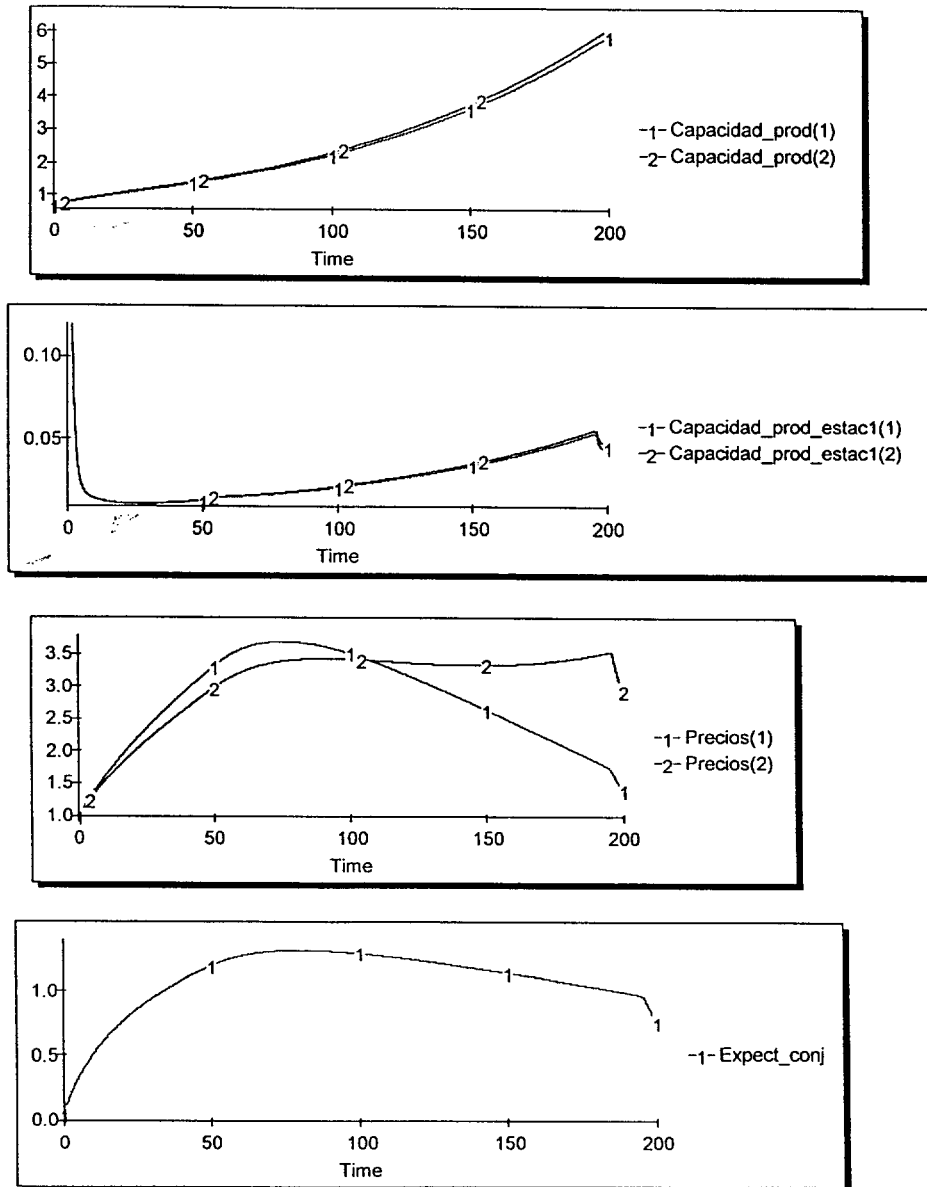


Figura 4.18: Expectativas racionales. Efecto de la política antiinflacionaria sobre una economía con unos indicadores como en la figura 4.8.

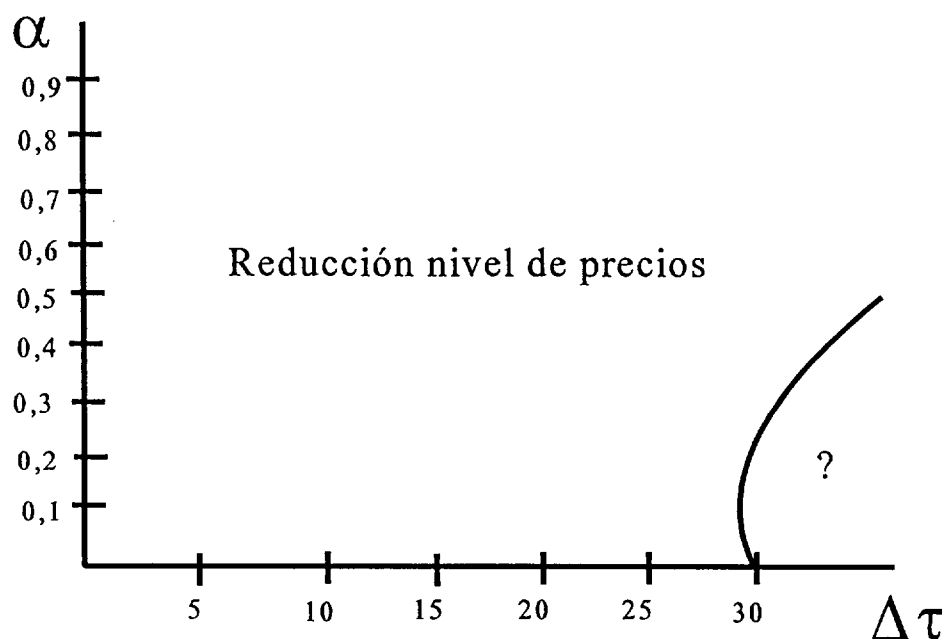


Figura 4.19: Expectativas racionales. Regiones del espacio paramétrico ($\Delta\tau, \alpha$) donde se producen las mismas respuestas hacia la política antiinflacionaria.

onda larga mediante la incorporación de nuevos elementos, como el dinero y el sistema de precios. Para ello, utilizamos unas hipótesis sobre la forma y efecto de la introducción del dinero en una economía de tipo neoclásico desarrollados por Tobin (1965), y completado en varios trabajos posteriores (Hadjimichalakis 1971a, 1971b, Benhabib y Miyao 1981). La construcción de este nuevo modelo presenta una combinación de elementos macroeconómicos y elementos de tipo microeconómico, salvando las dificultades que entrañaba la desagregación de ciertas variables.

Este modelo también incorpora elementos de tipo exógeno con elementos de tipo endógeno como influyentes en el desarrollo económico. A las hipótesis de Serman (1985), que podemos considerar esencialmente endógenas, se

une un factor de carácter inicialmente externo, el crecimiento en la oferta monetaria, cuyo comportamiento influye en la evolución del sistema. En este sentido, el modelo presenta de alguna manera una síntesis de comportamientos exógenos y endógenos, hecho demandado por autores como Zarnowitz (1985) como una vía fructífera de investigación.

Los primeros resultados obtenidos son satisfactorios, en el sentido que hemos ensanchado la región de sincronización entre los sectores, rellenando todo el espacio paramétrico que define las relaciones y circunstancias productivas que rodean a una economía con dos sectores. Ello nos hace suponer que el dinero funciona como un elemento importante que refuerza el acoplamiento entre los comportamientos cíclicos de los sectores.

Sin embargo, en la incorporación del dinero en el modelo de acoplamiento, se nos ha presentado una serie de nuevas posibilidades, cuyo efecto sobre el desarrollo económico son, en sí mismas, fuente de controversia en la teoría económica. Entre esas posibilidades está la elección de la hipótesis de formación de las expectativas de inflación, que son la hipótesis de expectativas adaptativas o la hipótesis de expectativas racionales. Incorporando cada una de ellas, hemos estudiado diversas cuestiones relativas al papel del dinero en la economía, ya analizada por Tobin (1965), pero ahora teniendo en cuenta que las relaciones productivas siguen las características del modelo de onda larga. A su vez, hemos podido analizar las consecuencias, sobre variables reales y monetarias como la producción y precio, de adoptar una política expansiva o contractiva en materia monetaria.

Por medio de las simulaciones, hemos obtenido una amplia gama de resultados diferentes, según las relaciones de dependencia y duración del capital producido en que se encuentren los sectores, hasta ahora no presentada. Por otro lado, los resultados también son radicalmente diferentes según la hipótesis

en la formación de expectativas que consideremos como cierta. En este sentido, el análisis empírico de ciertos datos sobre indicadores económicos y su contraste con los datos simulados por el modelo pudiere abrir una vía de estudio sobre la forma real en la que los agentes toman sus expectativas.

Este modelo añade un elemento nuevo en la explicación del acoplamiento entre los ciclos económicos, el dinero. Así, los resultados obtenidos explican el extenso comportamiento en sincronía que se verifica en la realidad económica, y abre la vía de nuevas extensiones que expliquen los comportamientos de acoplamiento no sincrónicos, no presentes en el modelo.

Capítulo 5

Conclusiones

A modo de resumen, las aportaciones realizadas en esta memoria las podemos desglosar en dos grandes grupos:

- a) Estudio analítico del modelo desagregado de onda larga (Kampmann et al. 1994) de acoplamiento entre ciclos económicos (capítulo III). Este estudio muestra nuevos aspectos dinámicos hasta el momento no descubiertos por medio de las simulaciones.
- b) Construcción y estudio de un modelo con factores monetarios que describe el acoplamiento entre los ciclos económicos (capítulo IV).

Los resultados obtenidos en los capítulos III y IV de esta memoria pueden concretarse en las siguientes conclusiones:

- *Conclusión 1. El acoplamiento entre los ciclos puede surgir para cualquier grado de dependencia entre los sectores, por pequeña que sea.*

Para el caso de independencia entre los sectores, hemos descubierto que el modelo presenta un único punto de equilibrio, no hiperbólico, que revela una condición necesaria de bifurcación en este valor del parámetro.

Este resultado nos lleva a pensar que el acoplamiento entre los ciclos económicos surge desde cualquier valor del grado de dependencia entre los sectores.

- *Conclusión 2. Cuando las dependencias entre los sectores son altas, se origina sincronización entre los ciclos, cualquiera que sea el valor de la diferencia de los tiempos de vida medios de los capitales producidos por los sectores.*

Esta conclusión emerge del estudio analítico de la simplificación del modelo desagregado de onda larga cuando los valores del grado de dependencia entre los sectores son máximos. Tal simplificación da lugar a un modelo estructuralmente estable.

- *Conclusión 3. Hemos construido un modelo capaz de estudiar el efecto de los factores monetarios en el acoplamiento y sincronización entre los ciclos generados por diversos sectores en la economía.*

Este modelo es una generalización del desarrollado en Kampmann et al. (1994). En él introducimos el mercado de dinero, basándonos en ciertas hipótesis presentadas por Tobin (1965). Sin embargo, esto no constituye una simple generalización del modelo anterior. Nuestro modelo combina elementos microeconómicos originales del modelo desagregado de onda larga con factores macroeconómicos que son necesarios en la introducción del dinero. Ello origina el desarrollo de un procedimiento de desagregación que permita atribuir cantidades de dinero real a los diferentes sectores productivos de la economía, así como modelizar su influencia sobre los precios de los diferentes outputs de cada sector.

Por otro lado, este nuevo modelo, a diferencia del modelo desagregado de onda larga, tiene la virtud, para el caso de adoptar la hipótesis de expectativas adaptativas, de generar un "comportamiento cíclico irregular" en torno a la tendencia de crecimiento de la economía. Tal comportamiento reproduce las fluctuaciones observadas en la economía real de una forma más plausible que las oscilaciones regulares generadas por otros modelos, como el de Goodwin (1951).

- *Conclusión 4. En el caso de que los agentes adopten expectativas racionales sobre los precios, nuestro modelo muestra que la economía sigue una senda estable de crecimiento real, sin existir fluctuaciones cíclicas.*

En nuestro modelo sólo consideramos cambios esperados en la tasa de crecimiento monetario, por lo que el modelo, en caso de adoptar expectativas racionales, sigue las teorías que defienden el comportamiento en equilibrio de la economía si no existieran factores exógenos de tipo aleatorio.

- *Conclusión 5. En el caso de tomar expectativas adaptativas, según nuestro modelo, el dinero funciona como un elemento que refuerza altamente la sincronización entre los comportamientos cíclicos de los sectores.*

Considerando el espacio paramétrico bidimensional formado por el grado de dependencia entre los sectores y la diferencia entre los tiempos de vida de los capitales producidos por los sectores, nuestro modelo muestra que la región de sincronización se ha ensanchado hasta cubrir casi toda la zona relevante del espacio paramétrico.

En este sentido, nuestras simulaciones constituyen un resultado novedoso respecto a los obtenidos por Kampmann et al. (1994). En el modelo presentado por este trabajo, la sincronización sólo se manifiesta cuando los capitales producidos tienen una diferencia en sus tiempos de vida medios no superior a 14 años (para valores no muy elevados del grado de dependencia). En cambio, en nuestro modelo, la sincronización se presenta en casi todo el espectro posible de diferencias de tiempos de vida medios de los capitales producidos por los sectores.

Según el modelo desagregado de onda larga, la diferencia entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos es el elemento determinante que explica la diversificación de la economía en unos pocos modos cíclicos, como se observa en la realidad. Nuestro modelo induce a pensar, en cambio, que este factor no es determinante, y es necesario, por lo tanto, la introducción de otro tipo de factores para explicar la diversidad cíclica (entre ellos podríamos considerar, siguiendo a Sterman y Mosekilde 1993, la incorporación de fluctuaciones en la demanda de bienes de consumo).

- *Conclusión 6. Bajo cualquier tipo de expectativas, la existencia de dinero altera la senda de crecimiento de la economía.*

Los modelos basados en las hipótesis de Tobin comparaban, como forma simplificada de análisis de la neutralidad del dinero, los efectos sobre las variables económicas de la existencia o no de dinero. Nuestro modelo concluye, para ambos tipos de hipótesis de expectativas, que la existencia del dinero tiene efectos positivos o negativos sobre la producción según la región en el espacio paramétrico (grado de dependencia-diferencia de tiempos de vida medios) en la que nos encontremos.

- *Conclusión 7. Cuando se presentan expectativas adaptativas, el dinero, por regla general, no es neutral. El efecto de expansiones y contracciones monetarias sobre la economía real es diverso, según el grado de dependencia entre los sectores y la diferencia entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos.*

En el caso de disponer una diferencia no muy elevada entre los tiempos de vida medios de los capitales producidos, el dinero puede considerarse como neutral, en el sentido que expansiones o contracciones monetarias sólo se traducen en variaciones en la tendencia creciente de los precios. En cambio, a mayores diferencias entre estos tiempos de vida medios, hemos comprobado la existencia de una tasa óptima de crecimiento en la oferta monetaria. Esta tasa óptima depende del grado de dependencia entre los sectores e indica que a mayores o menores tasas de crecimiento en la oferta monetaria, la tasa de crecimiento en la producción se ve mermada.

- *Conclusión 8. Cuando se presentan expectativas racionales, nuestro modelo corrobora la hipótesis de neutralidad del dinero, en el sentido que expansiones o contracciones monetarias se traducen exclusivamente en alteraciones en el nivel de inflación.*

El modelo es acorde con lo que es bien conocido en la literatura económica actual, que la adopción de expectativas racionales está ligada con la hipótesis de neutralidad del dinero mientras que la de expectativas adaptativas está generalmente ligada a la no neutralidad.

En las simulaciones que realizamos, hemos considerado, por simplicidad; la economía formada exclusivamente por dos sectores. La incorporación de más sectores, ya considerado en el modelo teórico, supondrá un comportamiento más rico desde el punto de vista dinámico. Además, es posible considerar nuevas situaciones entre los sectores y acercarnos más al proceso real.

- *Contraste con datos empíricos.*

El contraste de datos recogidos en la economía del mundo real con los resultados simulados por los modelos es un objetivo muy deseable para completar el estudio del proceso de acoplamiento. La búsqueda y manejo de estos datos empíricos no es tarea fácil, debido a los aspectos tan específicos que representan los parámetros en los modelos.

- *Extensiones del modelo de acoplamiento con factores monetarios.*

Los resultados obtenidos en las simulaciones de este modelo han mostrado nuevos aspectos en el comportamiento del acoplamiento entre los ciclos económicos, además de presentar un nuevo estudio del efecto del dinero en la economía. Esto sugiere que nuevas extensiones podrían producir igualmente buenos resultados. Así, es posible incorporar un mercado de trabajo no en equilibrio, para poder relacionarlo con variables monetarias y el acoplamiento. Siguiendo a Lorenz (1989), podemos también considerar economías abiertas, para poder modelizar el acoplamiento del comportamiento cíclico entre países.

Por otro lado, el modelo construido no incorpora, al considerar las hipótesis de Tobin (1965), los efectos nocivos sobre la economía de una

Capítulo 6

Problemas abiertos y comentarios finales

El trabajo que hemos expuesto a lo largo de esta memoria suscita diversas investigaciones futuras desde diferentes puntos de vista. En este capítulo haremos una pequeña recopilación de las que nos parecen más relevantes. Estas son:

- *Estudio más exhaustivo de la dinámica de los modelos.*

Tanto en el modelo desagregado de onda larga como en el modelo con factores monetarios no han sido examinadas completamente sus dinámicas. Esto es debido a su gran complejidad, con la aparición de comportamientos muy irregulares. La aplicación de muchos resultados acerca de este tipo de dinámicas, como son los resultados sobre comportamientos caóticos, pueden servir de gran ayuda.

- *Estudio del modelo de acoplamiento con factores monetarios considerando más sectores.*

tasa elevada de inflación. Otra línea abierta es alterar estas hipótesis escogidas para considerar, de alguna forma, las consecuencias de una elevada inflación en la economía.

Existen, por supuesto, muchos otros problemas abiertos relacionados con el acoplamiento entre ciclos y el efecto del dinero sobre este fenómeno y en la economía en general. La recopilación anterior es simplemente una pequeña muestra de ellos que en el futuro desearíamos seguir ampliando con nuevas aportaciones.

Bibliografía

- ANDRÉU, J.M. Y CALVO, J.L. (1987) *Teoría Económica Superior II*. U.N.E.D. Madrid.
- ARACIL, J. (1992) *Introducción a la Dinámica de Sistemas*. Alianza Universidad Textos.
- ARNOL'D, V.I. (1965) *Small Divisors I. Mapping the Circle onto itself*. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 46, pp. 213-284.
- ARNOL'D, V.I. (1992) *Ordinary Differential Equations*. MIT Press.
- ARROWSMITH, D.K. AND PLACE, C.M. (1990) *An introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- BARROW-GREEN, J. (1997) *Poincaré and the Three Body Problem*. American Mathematical Society. London Mathematical Society.
- BENHABIB, J. AND MIYAO, T. (1981) *Some New Results on the Dynamics of the Generalized Tobin Model*. International Economic Review, 22, 3, pp. 589-596.
- BROER, H.W., DUMORTIER, F., VAN STRIEN, S.J. AND TAKENS, F. (1991) *Structures in Dynamics*. North-Holland.
- BRØNS, M. AND STURIS, J. (1991) *Local and Global Bifurcations in a Model of the Economic Long Wave*. Systems Dynamics Review, 7, 1, pp. 41-60.
- CHIANG, A.C. (1987) *Métodos Fundamentales en la Economía Matemática*. McGraw-Hill.
- CHIARELLA, C. (1990) *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics*. Springer-Verlag.

- DAY, R.H. (1982) *Irregular Growth Cycles*. American Economic Review, 72, pp. 406-414.
- DAY, R.H. (1994) *Complex Economic Dynamics*. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts.
- FEIGENBAUM, M.J. (1978) *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*. Journal of Statistical Physics, 19, 1, pp. 25-52.
- FERNÁNDEZ-RODRÍGUEZ, F. (1992) *El Problema de la Predicción en Series Temporales: Aplicaciones del Caos Determinista*. Memoria de Tesis Doctoral. Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- FORRESTER, J.W. (1961) *Industrial Dynamics*. Productivity Press. Cambridge, MA.
- FORRESTER, J.W. (1987) *Nonlinearity in High-Order Models of Social Systems*. European Journal of Operational Research, 30, pp. 104-109.
- GALLAS, J.A.C. (1994) *Dissecting Shrimps: Results for some One-Dimensional Physical Models*. Physica A 202, pp. 196-223.
- GOODHART, C.A.E. (1989) *Money, Information and Uncertainty*. MacMillan Education, Ltd.
- GOODWIN, R.M. (1951) *The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles*. Econometrica, 15, pp. 181-204.
- GUCKENHEIMER, J. AND HOLMES, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag.
- HADJIMICHALAKIS, M. (1971a) *Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money - the Tobin Models*. Review of Economic Studies, 38, pp. 457-479.
- HADJIMICHALAKIS, M. (1971b) *Money. Expectations, and Dynamics - An Alternative View*. International Economic Review, 12, 3, pp. 381-402.
- HAXHOLDT, C., KAMPMANN, C., MOSEKILDE, E. AND STERMAN, J.D. (1994) *Mode Locking and Entrainment of Endogenous Economic Cycles*. WP-3646-94-MSA, Sloan School of Management, Cambridge, MA.
- HERNÁNDEZ-GUERRA, J. (1996) *Entrainment between Economic Cycles: An*

-
- Analytical Study of a Model.* Proceedings of the System Dynamics Conference. Cambridge, MA.
- HERNÁNDEZ-GUERRA, J. AND FERNÁNDEZ-RODRÍGUEZ, F. (1997) *A Qualitative Study of the Disaggregated Long-Wave Model.* System Dynamics Review, 13, 1, pp. 87-96.
- HIRSCH, M.W. AND SMALE, S. (1974) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, Inc.
- JACKSON, E.A. (1991) *Perspectives of Nonlinear Dynamics.* Cambridge University Press.
- JENSEN, M.H., BAK, P. AND BOHR, T. (1983) *Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map.* Physical Review Letters, 50, pp. 1637-1639.
- JENSEN, M.H., BAK, P. AND BOHR, T. (1984) *Transition to Chaos by Interaction of Resonances in Dissipative Systems. I. Circle Maps.* Physical Review A, 309, pp. 1960-1969.
- JORDAN, D.W., SMITH, P. (1987) *Nonlinear Ordinary Differential Equations.* Oxford University Press.
- KAMPMANN, C. (1996) Personal Communication.
- KAMPMANN, C., HAXHOLDT, C., MOSEKILDE, E. AND STERMAN, J.D. (1993) *Entrainment in a Disaggregated Economic Long-Wave Model.* Loet Leydesdorff and Peter Van den Besselaar, ed. "Evolutionary economics and chaos theory", Pinter Publishers, London.
- KNUDSEN, C., STURIS, J. AND THOMSEN, J.S. (1991) *Generic Bifurcations Structures of Arnol'd Tongues in Forced Oscillators.* Physical Review A, 44, pp. 3503-3510.
- LAILLER, D.E.W. (1973) *The Influence of Money on Real Income and Inflation:- A Simple Model with some Empirical Tests for the United States 1953-72.* Manchester School of Economic and Social Studies, 41, 4, pp. 367-395.
- LAILLER, D.E.W. (1977) *La Demanda de Dinero.* Antoni Bosch, ed.

- LORENZ, H. W. (1989) *Strange Attractors in Dynamical Economics*. Ames, W.F., ed., "Numerical and Applied Mathematics", pp. 281-286. Basel: J.C. Baltzer.
- LORENZ, H. W. (1993) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag.
- LUCAS, R.E. (1973) *Some International Evidence on Output-Inflation Trade-Offs*. American Economic Review, 63, pp. 326-334.
- MOSEKILDE, E., FELDBERG, R., KNUDSEN, C. AND HINDSHOLM, M. (1990) *Mode Locking and Spatiotemporal Chaos in Periodically Driven Gunn Diodes*. Physical Review A, 41, 4, pp. 2298-2306.
- MOSEKILDE, E., LARSEN, E.R., STERMAN, J.D. AND THOMSEN, J.S. (1992) *Non-linear Mode-Interaction in the Macroeconomy*. Annals of Operations Research, 37, pp. 185-215.
- MOSEKILDE, E., LARSEN, E.R., STERMAN, J.D. AND THOMSEN, J.S. (1993a) *Mode Locking and Nonlinear Entrainment of Macroeconomic Cycles*. Richard H. Day and Ping Chen, ed., "Nonlinear dynamics and evolutionary economics".
- MOSEKILDE, E., THOMSEN, J.S., KNUDSEN, C. AND FELDBERG, R. (1993b) *Phase Diagrams for Periodically Driven Gunn Diodes*. Physica D, 66, pp. 143-153.
- PRIGOGINE, I. (1993) *Bounded Rationality: From Dynamical System to Socio-economic Models*. Richard H. Day and Ping Chen, ed., "Nonlinear dynamics and evolutionary economics".
- RASMUSSEN, S., MOSEKILDE, E. AND STERMAN, J.D. (1985) *Bifurcations and Chaotic Behavior in a Simple Model of the Economic Long Wave*. System Dynamics Review, 1, pp. 92-110.
- REICK, C. AND MOSEKILDE, E. (1995) *Emergence of Quasiperiodicity in Symmetrically Coupled, Identical Period-Doubling Systems*. Physical Review E, 52, 2, pp. 1418-1435.
- ROBERTS, N., ANDERSEN, D., DEAL, R., GARET, M. AND SHAFFER, W.

- (1983) *Introduction to Computer Simulation*. Productivity Press.
- SARGENT, T.J. AND WALLACE, N. (1975) *Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument and the Optimal Money Supply Rule*. *Journal of Political Economy*, 83, pp. 241-254.
- SCHUSTER, H.G. (1989) *Deterministic Chaos - An Introduction*. Weinheim: Physik-Verlag.
- SHEFFRIN, S.M. (1996) *Rational Expectations*. Cambridge University Press.
- SIMON, H. (1979) *Rational Decisionmaking in Business Organizations*. *American Economic Review*, 69, pp. 493-513
- STERMAN, J.D. (1985) *A Behavioral Model of the Economic Long Wave*. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 6, pp. 17-53.
- STERMAN, J.D. (1986) *The Economic Long Wave: Theory and Evidence*. *System Dynamics Review*, 2, 2, pp. 87-125.
- STERMAN, J.D. (1989a) *Misperceptions of Feedback in Dynamic Decision Making*. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 43, pp. 301-335.
- STERMAN, J.D. (1989b) *Deterministic Chaos in an Experimental Economic System*. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 12, pp. 1-28.
- STERMAN, J.D. AND MOSEKILDE, E. (1993) *Business Cycles and Long Waves: a Behavioral Disequilibrium Perspective*. Semmler, W., ed. "Business cycles: theory and empirical methods". Kluwer Academic Publishers.
- STURIS, J., KNUDSEN, C., O'MEARA, N., THOMSEN, J.S., MOSEKILDE, E., VAN CAUTER, E. AND POLONSKY, K.S. (1995) *Phase-Locking Regions in a Forced Model of Slow Insulin and Glucose Oscillations*. *Chaos*, 5, 1, pp. 193-199.
- TOBIN, J. (1965) *Money and Economic Growth*. *Econometrica*, 33, 4, pp. 671-684.
- TOGEBY, M., MOSEKILDE, E. AND STURIS, J. (1988) *Frequency-Locking in a Model of Two Coupled Thermostatically Controlled Radiators*. Winter

- Annual Meeting of The American Society of Mechanical Engineers, Chicago.
- TORRE, V. (1977) *Existence of Limit Cycles and Control in Complete Keynesian System by Theory of Bifurcations*. *Econometrica*, 45, 6, pp. 1457-1466.
- TU, P.N.V. (1992) *Dynamical Systems. An Introduction with Applications in Economics and Biology*. Springer-Verlag.
- VÁZQUEZ, F.J. (1993) *Análisis de Comportamientos Cíclicos en Ciertos Modelos Económicos con Retardo*. Memoria de Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid.
- ZARNOWITZ, V. (1985) *Recent Work on Business Cycles in Historical Perspective: a Review of Theories and Evidence*. *The Journal Economic Literature*, 23, pp. 523-580.
- ZHANG, W-B. (1990) *Economic Dynamics*. Springer-Verlag.