

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ECONOMÍA Y
GESTIÓN



TESIS DOCTORAL

EL (R / XP) – MEDIANOIDE INCORPORANDO
CRITERIOS DE ATRACCIÓN

RAFAEL SUÁREZ VEGA

Las Palmas de Gran Canaria, Octubre del 2001

X

21/2001-02

**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO**

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

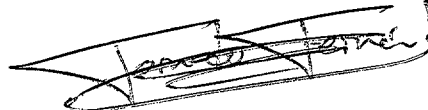
Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de SOBRESALIENTE CON LAUDE
POR UNANIMIDAD

Las Palmas de Gran Canaria, a 15 de diciembre de 2001.

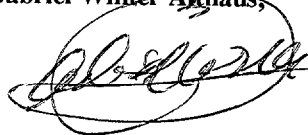
El/a Presidente/a: Dra.Dña. Beatriz González López-Valcárcel,



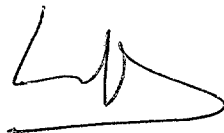
El/a Secretario/a: Dr.D. Fernando Fernández Rodríguez,



El/a Vocal: Dr.D. Gabriel Winter Athaus,



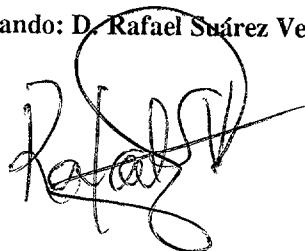
El/a Vocal: Dr.D. Emilio Carrizosa Priego,



El/a Vocal: Dr.D. Dionisio Pérez Brito,



El Doctorando: D. Rafael Suárez Vega,





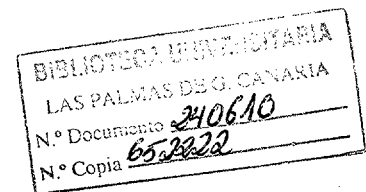
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión

EL $(r|X_p)$ -MEDIANOIDE INCORPORANDO
CRITERIOS DE ATRACCIÓN*



Memoria que presenta D. Rafael Suárez Vega para
optar al grado de Doctor en Ciencias Económicas y
Empresariales, realizada bajo la dirección de la Dra. Dña.
Dolores Rosa Santos Peñate.

Las Palmas de Gran Canaria, a 31 de octubre de 2001.



* Esta memoria ha sido parcialmente subvencionada por la Fundación Universitaria de Las Palmas a través de una beca de investigación patrocinada por Aguas Minerales de Firgas, S.A.

Dña. DOLORES ROSA SANTOS PEÑATE, Titular de la Universidad de las Palmas de Gran Canaria,

CERTIFICA: Que la presente memoria, titulada “**El (rIX_p) -medianoide incorporando criterios de atracción**” ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, por el Licenciado D. Rafael Suárez Vega, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a treinta y uno de octubre de 2001.



Fdo.: Dolores Rosa Santos Peñate

Quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos compañeros del Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión que directa o indirectamente me han apoyado durante estos años de estudio. Especialmente a la profesora Dolores Rosa Santos Peñate, por su trabajo en la dirección de esta memoria sin el cual ésta seguiría siendo un proyecto, y por supuesto, a Pablo Dorta González, compañero de fatigas durante todos estos años.

Agradecer también, la colaboración prestada por la Cámara Oficial de Comercio, Industria y Navegación de Las Palmas y por la Dirección General de Comercio de Canarias.

Finalmente, quiero recordar a mis padres y hermanos, y sobre todo, a Sari. Gracias por esperar.

Contenidos

0.1	Introducción	viii
1	El problema del $(r X_p)$-medianoide	1
1.1	Conceptos básicos	1
1.2	El $(r X_p)$ -medianoide en redes	5
1.2.1	Preferencias binarias y servicios esenciales	6
1.2.2	Preferencias binarias y servicios no esenciales	13
1.2.3	Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales	18
1.2.4	Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales	21
1.2.5	Preferencias proporcionales y servicios esenciales	24
1.2.6	Preferencias proporcionales y servicios no esenciales	26
1.3	El $(r X_p)$ -medianoide discreto	30
1.3.1	Preferencias binarias y servicios esenciales	31
1.3.2	Preferencias binarias y servicios no esenciales	32
1.3.3	Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales	32
1.3.4	Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales	33
1.3.5	Preferencias proporcionales y servicios esenciales	34
1.3.6	Preferencias proporcionales y servicios no esenciales	35
1.3.7	Algunas variantes del $(r X_p)$ -medianoide discreto	35
1.4	Conclusiones	38
2	El $(r X_p)$-medianoide incorporando criterios de atracción	41
2.1	Introducción	41
2.2	Antecedentes	42
2.2.1	Preferencias binarias y servicios esenciales	42
2.2.2	Preferencias proporcionales y servicios esenciales	44
2.3	El $(r X_p)$ -medianoide con atractivos	50
2.3.1	Preferencias binarias y servicios esenciales	51
2.3.2	Preferencias binarias y servicios no esenciales	57
2.3.3	Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales	59
2.3.4	Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales	62
2.3.5	Preferencias proporcionales y servicios esenciales	65
2.3.6	Preferencias proporcionales y servicios no esenciales	68

2.4	El $(r X_p)$ -medianoide discreto con atractivos	75
2.4.1	Preferencias binarias y servicios esenciales	75
2.4.2	Preferencias binarias y servicios no esenciales	76
2.4.3	Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales	77
2.4.4	Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales	78
2.4.5	Preferencias proporcionales y servicios esenciales	79
2.4.6	Preferencias proporcionales y servicios no esenciales	79
2.4.7	Extensiones	80
2.5	Conclusiones	80
3	Algoritmos empleados en la resolución del $(r X_p)$-medianoide	83
3.1	Algoritmos de búsqueda combinatoria	84
3.1.1	Algoritmo greedy	84
3.1.2	Algoritmo de intercambio	84
3.1.3	Algoritmo de búsqueda tabú	84
3.2	Optimización global	89
3.2.1	Introducción	89
3.2.2	Método del gradiente reducido	90
3.2.3	Programación convexa	91
3.2.4	Método de ramificación y acotación.	93
3.3	Ramificación y acotación. Experiencias computacionales	101
3.3.1	Ramificación y acotación utilizando la cota 1	101
3.3.2	Ramificación y acotación utilizando la cota 2	105
3.3.3	Ramificación y acotación utilizando la cota 3	107
3.3.4	Comentarios sobre los resultados obtenidos con la utilización del algoritmo de ramificación y acotación	111
4	El $(r X_p)$-medianoide. Experiencia computacional	113
4.1	Introducción	113
4.2	Binario-esencial	116
4.2.1	Algoritmo greedy	116
4.2.2	Algoritmo de intercambio	118
4.2.3	Algoritmo de búsqueda tabú	121
4.2.4	Síntesis	124
4.3	Binario-no esencial	126
4.3.1	Algoritmo greedy	126
4.3.2	Algoritmo de intercambio	128
4.3.3	Algoritmo de búsqueda tabú	129
4.3.4	Síntesis	130
4.4	Parcialmente binario-esencial	132
4.4.1	Algoritmo greedy	132
4.4.2	Algoritmo de intercambio	132
4.4.3	Algoritmo de búsqueda tabú	134
4.4.4	Síntesis	136

4.5	Parcialmente binario-no esencial	137
4.5.1	Algoritmo greedy	137
4.5.2	Algoritmo de intercambio	138
4.5.3	Algoritmo de búsqueda tabú	140
4.5.4	Síntesis	141
4.6	Proporcional-esencial	143
4.6.1	Algoritmo greedy	143
4.6.2	Algoritmo de intercambio	144
4.6.3	Algoritmo de búsqueda tabú	146
4.6.4	Síntesis	147
4.7	Proporcional-no esencial	149
4.7.1	Algoritmo greedy	149
4.7.2	Algoritmo de intercambio	150
4.7.3	Algoritmo de búsqueda tabú	151
4.7.4	Síntesis	152
4.8	Conclusiones	153
5	El $(r X_p)$-medianoide con atractivo. Experiencia computacional	157
5.1	Introducción	157
5.2	Binario-esencial	159
5.3	Binario-no esencial	163
5.4	Parcialmente binario-esencial	168
5.5	Parcialmente binario-no esencial	172
5.6	Proporcional-esencial	176
5.7	Proporcional-no esencial	181
5.8	Resumen	185
6	Implantación de centros de distribución alimentaria en Gran Canaria	189
6.1	Introducción	189
6.1.1	Criterios Generales de Equipamiento Comercial	193
6.2	Planteamiento del problema	195
6.2.1	Niveles de atractivo	198
6.2.2	Funciones de la distancia	202
6.2.3	Función de costes para los atractivos	205
6.3	Resolución del problema	207
6.4	Conclusiones	212
7	Conclusiones y extensiones	215
7.1	Conclusiones	215
7.2	Extensiones	218
7.2.1	Ampliación del número de centros de servicio operando en el mercado en el caso proporcional	218
7.2.2	Proporcional con umbral	219

Anexo 1	231
Anexo 2	239

Lista de Tablas

3.1	Tiempos medios (segs.) para $r = 2$ ($dm = 0.01$)	107
4.1	Variación de la demanda captada de un nodo al variar α	114
4.2	Resultados para el GR. Binario-esencial	116
4.3	Distribución de los fallos para el GR. Binario-esencial	117
4.4	Resultados del TB. Binario-esencial	118
4.5	Distribución de los fallos para el TB. Binario-esencial	119
4.6	Resultados del TB(GR). Binario-esencial	120
4.7	Resultados del TS. Binario-esencial	122
4.8	Distribución de los errores para el TS. Binario-esencial	122
4.9	Resultados obtenidos por el TS(GR). Binario-esencial	123
4.10	Resultados para los distintos algoritmos heurísticos. Binario-esencial	125
4.11	Resultados del GR. Binario-no esencial	126
4.12	Resultados obtenidos por el TB y TB(GR). Binario-no esencial . . .	127
4.13	Resultados obtenidos por el TS y el TS(GR). Binario-no esencial . .	129
4.14	Resultados para los distintos algoritmos. Binario-no esencial	131
4.15	Resultados para el GR. Parcialmente binario-esencial	132
4.16	Resultados obtenidos por el TB y el TB(GR). Parcialmente binario- esencial	133
4.17	Resultados para el TS y TS(GR). Parcialmente binario-esencial . . .	135
4.18	Resultados para los distintos algoritmos. Parcialmente binario-esencial	136
4.19	Resultados para el GR. Parcialmente binario-no esencial	138
4.20	Resultados para el TB y el TB(GR). Parcialmente binario-no esencial	139
4.21	Resultados para el TS y TS(GR). Parcialmente binario-no esencial .	141
4.22	Resultados para los distintos algoritmos. Parcialmente binario-no esencial	142
4.23	Resultados para el GR. Proporcional-esencial	143
4.24	Resultados para el TB y el TB(GR). Proporcional-esencial	145
4.25	Resultados para el TS y TS(GR). Proporcional-esencial	146
4.26	Resultados para los distintos algoritmos. Proporcional-esencial . . .	148
4.27	Resultados para el GR. Proporcional-no esencial	149
4.28	Resultados para el TB y el TB(GR). Proporcional-no esencial	150
4.29	Resultados para el TS y TS(GR). Proporcional-no esencial	151

4.30	Resultados para los distintos algoritmos. Proporcional-no esencial . . .	153
4.31	Resultados de los algoritmos para las distintas combinaciones (pref-serv)	154
4.32	Resultados obtenidos con la nueva función de la distancia $\alpha=1.1$. . .	155
5.1	Valores de <i>factor</i> para las distintas redes. Binario-esencial	159
5.2	Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Binario-esencial	160
5.3	Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Binario-esencial . . .	161
5.4	Valores de <i>factor</i> para las distintas redes. Binario-no esencial	164
5.5	Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Binario-no esencial	165
5.6	Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Binario-no esencial	166
5.7	Valores de <i>factor</i> para las distintas redes. Parcialmente binario-esencial	168
5.8	Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Parcialmente binario-esencial	169
5.9	Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Parcialmente binario-esencial	171
5.10	Valores de <i>factor</i> para las distintas redes. Parcialmente binario-no esencial	172
5.11	Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Parcialmente binario-no esencial	173
5.12	Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Parcialmente binario-no esencial	175
5.13	Valores de <i>factor</i> para las distintas redes. Proporcional-esencial . . .	176
5.14	Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Proporcional-esencial	177
5.15	Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Proporcional-esencial	179
5.16	Valores de <i>factor</i> para las distintas redes. Proporcional-no esencial .	181
5.17	Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Proporcional-no esencial	182
5.18	Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Proporcional-no esencial	184
5.19	Resultados de los algoritmos para los distintos escenarios	186
5.20	Porcentaje medio de mejora por error cometido	187
5.21	Error cometido por el GR para los distintos casos estudiados	188
6.1	Distribución alimentaria por municipios en Gran Canaria.	190
6.2	Coefficientes de saturación y superficie máxima permitida para hipermercados	195
6.3	Distribución del consumo según el tipo de establecimiento	197
6.4	Distribución de los gastos familiares en alimentación en Canarias . .	198
6.5	Parámetros utilizados para calcular el atractivo	199
6.6	Atractivo para los grandes supermercados e hipermercados existentes	200

6.7	Número de establecimientos y superficie total (m ²) en los municipios de Gran Canaria	201
6.8	Disponibilidad para hipermercados (superficies de venta en m ²) . . .	203
6.9	Distribución de las posibles localizaciones y sus correspondientes rangos para la superficie de venta. (Intervalos en miles de m ²)	204
6.10	Grupos de funciones de la distancia utilizados	208
6.11	Resultados obtenidos para los distintos grupos	210
6.12	Soluciones obtenidas para distintos niveles de costes para los atractivos	211
1	Errores cometidos por el GR. Binario-no esencial	231
2	Errores cometidos por el TB. Binario-no esencial	232
3	Errores cometidos por el TS. Binario-no esencial	232
4	Errores cometidos por el GR. Parcialmente binario-esencial	233
5	Errores cometidos por el TB. Parcialmente binario-esencial	233
6	Errores cometidos por el TS. Parcialmente binario-esencial	234
7	Errores cometidos por el GR. Parcialmente binario-no esencial . . .	234
8	Errores cometidos por el TB. Parcialmente binario-no esencial	235
9	Errores cometidos por el TS. Parcialmente binario-no esencial	235
10	Errores cometidos por el GR. Proporcional-esencial	236
11	Errores cometidos por el TB. Proporcional-esencial.	236
12	Errores cometidos por el TS. Proporcional-esencial	237
13	Errores cometidos por el GR. Proporcional-no esencial	237
14	Errores cometidos por el TS. Proporcional-no esencial	238

Lista de Figuras

1.1	Demanda captada por y_1 a lo largo de la arista $[s, t]$ (0 ó 1 punto isodistante)	7
1.2	Demanda de v captada por y_1 a lo largo de la arista $[s, t]$ (2 puntos isodistantes)	9
1.3	Ejemplo de red	11
1.4	Cuota de mercado captada por y_1 a lo largo de una arista	14
2.1	Red utilizada en los ejemplos	52
2.2	Beneficios para el $(1 X_p)$ -medianoide binario-esencial cuando varía a_1	53
2.3	Beneficios para el $(1 X_1)$ -medianoide cuando $Y_1 = v_2$ (Binario-no esencial)	58
2.4	Red en la que la función de ingresos no es convexa con respecto al atractivo	74
3.1	Organigrama del algoritmo de búsqueda tabú	86
3.2	Función convexa con dos máximos locales	91
3.3	Función de costes para los atractivos (cotas 1 y 2)	102
3.4	Función de beneficios con $factor=9$ (proporcional-no esencial)	103
3.5	Tiempos medios (segs.) al variar ε y $factor$ (cota 1)	104
3.6	Tiempos medios (segs.) para distintos niveles de precisión (cota 1)	105
3.7	Función de beneficios para el caso proporcional-esencial ($n=50, r=2$)	108
3.8	Tiempos medios (segs.) al variar ε y $factor$ (cota 3)	109
3.9	Tiempos medios (segs.) para diferentes niveles de precisión (cota 3)	110
4.1	Comparativa entre los errores para $\alpha = 3.5$ y $\alpha = 1.1$	156
6.1	(Fuente: Camara Oficial de Comercio, Industria y Navegación de Las Palmas. Elaboración propia)	192
6.2	Red (nodos y distancias) y ZACs	196
6.3	Ejemplo de funciones del tiempo empleadas	202
6.4	Funciones de costes fijos para los atractivos utilizadas	206
6.5	Función de beneficios multiextremo	208
6.6	Efecto de la distancia en el atractivo del establecimiento	209

0.1 Introducción

El planteamiento que presenta la microeconomía tradicional sobre los problemas de competencia supone al mercado como un elemento abstracto en el que se combinan consumidores y productores, quienes interaccionan para conseguir ciertos objetivos. Sin embargo, un simple análisis de la mayoría de los problemas de competencia nos lleva a la conclusión de que en gran parte de estos casos existe una distribución espacial, tanto de la oferta como de la demanda, encontrándose en muy raras ocasiones ubicadas en un único punto.

Considerando que los mercados están geográficamente dispersos y que satisfacer la demanda puede llevar asociados unos costes de transporte, “la Competencia Espacial surge como una aproximación analítica de carácter general, más adecuada que el modelo competitivo basado en la concentración del mercado” (Andaluz, 1995).

Una vez reconocido el carácter espacial de muchos de los problemas de competencia, se hace imprescindible desarrollar estudios en los que se analice el efecto de la localización en los distintos aspectos del mercado. En esta línea aparecen los modelos de localización competitiva. Aunque existen diferentes definiciones de estos modelos, nosotros adoptamos las ideas de Hakimi (1983) y Serra y ReVelle (1995), quienes definen un modelo de localización competitiva como aquel en el que se consideran varias empresas que compiten en un mercado espacial, existiendo interacciones entre ellas. Esto significa que las decisiones sobre localización de una empresa no sólo afecta a su cuota de mercado, sino también, a las de sus competidoras.

Después de la aparición del trabajo de Hotelling (1924) “*Stability in competition*”, considerado el origen de este campo de estudio, han sido propuestos varios modelos de localización competitiva. Entre estos modelos se encuentran el $(r|p)$ -centroide y el $(r|X_p)$ -medianoide (Hakimi, 1983), con los que se refleja el comportamiento de la empresa líder y la seguidora, respectivamente, en un modelo de Stackelberg.

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide consiste en una empresa que desea entrar a competir en un mercado donde ya existen otras firmas operando. El objetivo de la empresa entrante es decidir la ubicación de sus r nuevos centros de servicio, los cuales han de competir con los p centros ya establecidos, con el fin de maximizar la cuota de mercado captada. El mercado se encuentra representado por una red en la que la demanda se encuentra concentrada en los nodos. Se considera que el poder de compra de cada nodo es asignado al centro de servicio más próximo y que los nuevos centro de servicio pueden localizarse en cualquier punto de la red.

El problema del $(r|p)$ -centroide coincide con el que abordaría la empresa líder en el modelo de Stackelberg. Se trata de una empresa que desea localizar p centros de servicio en un mercado en el que no existe competencia. Sin embargo, sabe que posteriormente las firmas rivales se incorporarán al mercado con r nuevos centros.

El objetivo será determinar la nuevas localizaciones de forma que la pérdida de cuota de mercado que provoque la entrada de los competidores sea mínima.

Inicialmente el modelo contemplaba demandas inelásticas y posteriormente, este mismo autor (Hakimi, 1990) amplía el modelo del $(r|X_p)$ -medianoide a varios escenarios, en los que se analizan otros criterios de asignación de la demanda de los usuarios y la posibilidad de que la demanda del servicio prestado fuese elástica con respecto a la distancia.

En este trabajo se estudia el problema del $(r|X_p)$ -medianoide. En primer lugar se hace una recopilación de algunos de los resultados conocidos, ampliándose éstos con nuevas conclusiones. Además, se han llevado a cabo experiencias computacionales para resolver el problema y por último, se presenta una aplicación al mercado de la distribución alimentaria en Canarias.

La tesis está formada por siete capítulos. En el primer capítulo se introducen brevemente los conceptos generales que serán utilizados a lo largo del trabajo. Se define el modelo para los distintos criterios de asignación de la demanda (preferencias binarias, parcialmente binarias y proporcionales) y el tipo de servicio prestado a los usuarios (esencial y no esencial).

En este mismo capítulo se hace un repaso de los resultados más importantes existentes sobre el $(r|X_p)$ -medianoide en los diferentes escenarios “preferencia-servicio” estudiados. Uno de estos resultados está relacionado con la existencia de solución nodal (las localizaciones de la solución son vértices) para el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes. Aunque en los casos parcialmente binario y proporcional, bajo ciertas condiciones, se conocía la existencia de solución nodal, presentamos una demostración más general de existencia de solución nodal en el caso proporcional-no esencial. En el caso binario (esencial y no esencial) es conocido que no tiene que existir solución nodal para el problema en redes, sin embargo, mostramos que se puede encontrar una solución evaluando un conjunto finito de candidatos.

De forma similar a como procedieron Benati y Laporte (1994) para el caso binario-esencial, se demuestra la submodularidad de la función objetivo para todos los problemas estudiados. La propiedad submodular, añadida al crecimiento de la función objetivo, permite aplicar resultados conocidos para establecer una cota para el error cometido por el algoritmo greedy en función del número de centros a establecer.

En el capítulo 2 se hace un repaso de los resultados más destacables con respecto al modelo $(r|X_p)$ -medianoide, considerando que la elección de los consumidores atiende a criterios de calidad del centro de servicio.

Se modifica el modelo propuesto por Hakimi (1990) incorporando, además de la distancia, otros criterios de elección, que agrupamos en lo que denominamos atractivo. En esta situación, el objetivo de la empresa es maximizar los beneficios, calculados como ingresos menos los costes dependientes del atractivo. Por lo tanto, la empresa entrante ha de determinar tanto las localizaciones como sus

correspondientes niveles de atractivo, de forma que se maximicen los beneficios. Este problema es analizado en sus diferentes escenarios “preferencia-servicio” demostrando la existencia de solución nodal en los casos parcialmente binario y proporcional. En el caso binario, cuando los atractivos son dados, las localizaciones para los nuevos centros de servicio pueden encontrarse evaluando un conjunto finito de posibilidades.

Los capítulos 1 y 2 terminan con la formulación de problemas de optimización correspondientes al $(\tau|X_p)$ -medianoide. Atendiendo a los resultados sobre la discretización del problema en redes, una solución de estos problemas también lo sería del problema en redes.

En el capítulo 3 se describen los algoritmos utilizados en la resolución del $(\tau|X_p)$ -medianoide discreto. El problema de localización combinatoria ha sido resuelto utilizando un algoritmo greedy, un algoritmo de intercambio y uno basado en búsqueda tabú. En este capítulo se hace especial hincapié en la descripción del algoritmo de búsqueda tabú por ser el más reciente, y quizás menos conocido, y que necesita además, de una implementación más particular. Los algoritmo greedy y de intercambio se describen muy brevemente.

Para obtener los niveles óptimos de los atractivos, dadas las localizaciones, se ha de resolver un programa no lineal que, dependiendo de la función de costes para los atractivos, puede ser multiextremo. Esto significa que la utilización de los algoritmos convencionales basados en el gradiente pueden converger a óptimos locales. En este capítulo se presentan distintos algoritmos destinados a resolver este problema y se describe con más detalle un algoritmo de búsqueda global de ramificación y acotación. Estos algoritmos de búsqueda combinatoria y de ramificación y acotación, han sido programados en código C.

El capítulo 4 contiene los resultados de la experiencia computacional para el $(\tau|X_p)$ -medianoide discreto sin incorporar atractivos. Este problema de localización combinatoria ha sido resuelto inicialmente de forma exhaustiva con el fin de evaluar los errores cometidos por los heurísticos. Tanto el algoritmo de intercambio como el de búsqueda tabú, se han resuelto utilizando soluciones iniciales halladas aleatoriamente o bien, partiendo de la solución obtenida por el algoritmo greedy. Para llevar a cabo este estudio se han utilizado 13 redes, unas generadas aleatoriamente y otras particulares, tomadas de otros trabajos anteriores, variando el número de nodos entre 50 y 79. Para cada una de estas redes se ha resuelto el problema cuando el número de nuevos centros de servicio y los ya existentes puede variar entre uno y tres. Además, para evaluar la sensibilidad de cada uno de los algoritmos con respecto a la distribución de la demanda, se han utilizado tres distribuciones distintas. El resultado final para cada par “preferencia-servicio” es una muestra de 351 casos diferentes a los que se les ha aplicado cada uno de los algoritmos utilizados en el estudio.

Para el caso del $(\tau|X_p)$ -medianoide discreto con atractivos se ha realizado un análisis parecido, incluyéndose sus resultados en el capítulo 5. Aunque los escenarios donde se han llevado a cabo las pruebas con los distintos algoritmos

heurísticos son los mismos, existen ciertas diferencias como consecuencia de la mayor complejidad que resulta de la resolución del programa no lineal que surge a la hora de determinar los niveles óptimos para los atractivos, dadas las localizaciones. La diferencia más importante es que no se ha hallado la solución óptima de forma exhaustiva debido al elevado coste computacional asociado a la resolución de un programa no lineal para cada r -upla de soluciones factibles. El algoritmo de ramificación y acotación utilizado proporciona una ε -solución, es decir, una solución tal que el error cometido con respecto al valor óptimo no es superior a un $\varepsilon > 0$ prefijado.

También en este caso, para la resolución del problema de localización se ha utilizado un algoritmo greedy, uno de intercambio y uno de búsqueda tabú. Basándonos en los resultados obtenidos en el capítulo 4, se ha optado por aplicar los algoritmos de intercambio y de búsqueda tabú partiendo de la solución greedy, comparando las mejoras obtenidas.

En el capítulo 6 se presenta una aplicación en el sector de la distribución alimentaria en Canarias, en particular en la isla de Gran Canaria. Se trata de determinar las localizaciones y las características de los nuevos establecimientos a implantar en la isla, teniendo en cuenta la competencia ya existente en el mercado. Para ello, la isla de Gran Canaria es estructurada como una red de 32 nodos que representan los puntos de demanda y las localizaciones de los centros ya establecidos o nuevos. Dependiendo de las características de los centros (atractivo), especialmente de su superficie de venta, los establecimientos de distribución alimentaria se han dividido en tres grupos: pequeños y medianos autoservicios, grandes supermercados e hipermercados.

El modelo presentado es un caso particular del $(r|X_p)$ -medianoide discreto para servicios esenciales y asignaciones proporcionales (la demanda de alimentos es totalmente inelástica y se supone que los consumidores reparten sus compras entre los distintos centros atendiendo a su atractivo). Por otro lado, el modelo se ha adaptado a las condiciones impuestas por la Ley 4/1994, de 25 de abril, de Ordenación de la Actividad Comercial de Canarias y Plan Integral de Comercio en los que se regulan ciertos aspectos relativos con la implantación de hipermercados.

Al final de cada uno de los capítulos y con el fin de centrar las ideas básicas, se hace una recopilación de los resultados más interesantes a los que se ha llegado. Estos resultados se resumen brevemente en capítulo 7. También se proponen nuevas líneas en las que se puede ampliar las investigaciones llevadas a cabo en esta tesis.

Finalmente, en el anexo 1 se presentan algunas tablas que complementan los contenidos del capítulo 4. En el anexo 2, se muestra el código C de algunos de los algoritmos que han sido implementados para obtener los resultados obtenidos en el trabajo.

Por último, hay que destacar que parte de los resultados que se presentan en el capítulo 3 de esta tesis ya han sido publicados en *Estudios de Economía Aplicada*, 1999, e *Investigación Operacional*, también en el mismo año. Por otro lado, la

aplicación presentada en el capítulo 6 es una extensión de un trabajo publicado en *Studies in Locational Analysis*, 1997, y que se puede encontrar en la *Revista Asturiana de Economía*, 2001.

Capítulo 1

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide

En este capítulo se muestran los resultados más destacados para el $(r|X_p)$ -medianoide. Aunque muchos de ellos son conocidos, también se presentan nuevas aportaciones de las que no conocíamos su anterior publicación.

Se analizan los distintos modelos que resultan al considerar diferentes formas de asignar la demanda de los consumidores así como el tipo de servicio prestado (demanda elástica o no elástica). Los resultados teóricos presentados en este capítulo van orientados a dos aspectos principales. Por un lado, demostrar que el problema en redes puede ser discretizado, y por lo tanto, se puede encontrar una solución resolviendo un problema discreto. Por otro lado, se demuestra que la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide es submodular y creciente, con lo que el error cometido al utilizar un algoritmo greedy para su resolución está acotado por un valor conocido dependiente de r .

En la última parte del capítulo se presentan los programas matemáticos enteros correspondientes al problema $(r|X_p)$ -medianoide discreto en los distintos escenarios considerados.

1.1 Conceptos básicos

En esta sección se definen algunos conceptos básicos que serán utilizados a lo largo de la presente memoria.

Definición 1.1 Una **arista** de longitud l , $l > 0$, es la imagen del conjunto $[0, l]$ de una función continua $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^d$, de tal forma que $f(\theta_1) \neq f(\theta_2)$, $\forall \theta_1 \neq \theta_2$ pertenecientes a $[0, l]$.

Los extremos de la arista serán $u = f(0)$ y $v = f(l)$, denotándose la arista como

$[u, v]$.

Definición 1.2 Una **red** esta definida como un subconjunto N de \mathcal{R}^d tal que satisface: (i) N es la unión de un número finito de aristas; (ii) la intersección de cualquier par de aristas, en caso de existir, se encuentra en un extremo; (iii) N es conexo.

La red se denota como $N(V, A)$, donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es el conjunto de los **vértices**, o nodos, de la red, formado por los extremos de las aristas que definen N , y A es el conjunto de aristas. La longitud de la arista $[v_i, v_j] \in A$ se denota por l_{ij} .

Definición 1.3 Dados $x_1, x_2 \in [v_i, v_j]$, se define el **segmento** de arista como el subconjunto de puntos de $[v_i, v_j]$ entre x_1 y x_2 . El segmento será cerrado, $[x_1, x_2]$, si incluye x_1 y x_2 ; abierto, (x_1, x_2) , si incluye estos puntos; o semiabierto, $[x_1, x_2)$ o $(x_1, x_2]$, si sólo incluye uno de los extremos.

Definición 1.4 Sea la función $f_{ij} : [0, l_{ij}] \rightarrow \mathcal{R}$ que define a $[v_i, v_j]$ y θ_{ij} la inversa de f_{ij} ; para cada punto $x \in [v_i, v_j]$ le corresponde un único valor $\theta_{ij}(x)$ en $[0, l_{ij}]$. Entonces, la **longitud** de $[x_1, x_2]$ es $|\theta_{ij}(x_1) - \theta_{ij}(x_2)|$.

Definición 1.5 Dos aristas son **adyacentes** si tienen al menos un vértice común.

Definición 1.6 El **grado de un vértice** es el número de aristas que contienen a dicho vértice.

Definición 1.7 Una **cadena de aristas** $\mu(a_1, a_2, \dots, a_q)$ es una secuencia de aristas de N tal que cada arista tiene un extremo en común con su antecesora en la secuencia y el otro con la siguiente.

Si $a_i = [x_i, x_{i+1}]$, con $i = 1, 2, \dots, q$, la cadena se puede denotar como $\mu(x_1, x_2, \dots, x_{q+1})$

Definición 1.8 Un **camino** $P(x_1, x_2)$ que une $x_1 \in N$ con $x_2 \in N$ es cualquier cadena de aristas y segmentos cerrados de arista que une los puntos x_1 y x_2 .

Definición 1.9 La **longitud de un camino** es la suma de las longitudes de las aristas y los segmentos de arista que lo forman.

Definición 1.10 Dados $x, y \in N(V, A)$, la **distancia** entre x e y ($d(x, y)$) es la longitud del camino más corto que une x con y .

Definición 1.11 Un punto x es un **cuello de botella** en la arista $[s, t] \in A$ para un nodo $v \in V$, si $d(v, s) + d(s, x) = d(v, t) + d(t, x)$.

Definición 1.12 Una red se dice **conexa** si el conjunto de vértices V no se puede

separar en dos subconjuntos no vacíos V_1 y V_2 de forma que cualquier arista de A una dos vértices de V_1 o dos vértices de V_2 .

Definición 1.13 Un **ciclo** es un camino de longitud no nula entre un vértice y sí mismo.

Definición 1.14 Un **árbol** es una red conexa sin ciclos no vacíos.

Definición 1.15 Un punto x^* es una ε -**solución** de un problema si el valor absoluto de la diferencia entre el supremo de la función en el conjunto factible y el valor de la función en x^* , es no superior a ε , con $\varepsilon > 0$ prefijado.

Definición 1.16 Sea S un conjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Un punto $x \in S$ se dice que es un **punto extremo de S** si $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, con $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in (0, 1)$, implica que $x = x_1 = x_2$.

Definición 1.17 Sea $V = \{v_i\}_{i=1}^n$, y $\mathcal{P}(V)$ el conjunto de las partes de V , entonces $F : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ es **submodular** si $\forall S, T \subseteq V$ tales que $S \subset T$ y $\forall v_k \in V - T$ se verifica que

$$F(T \cup \{v_k\}) - F(T) \leq F(S \cup \{v_k\}) - F(S).$$

Definición 1.18 Dados $a, b \in \mathbb{R}^r$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$, entonces,

- i. $a \geq b$ si $a_i \geq b_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$.
- ii. $a \gneq b$ si $a_i \geq b_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $\exists i_0$ tal que $a_{i_0} > b_{i_0}$.
- iii. $a > b$ si $a_i > b_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Definición 1.19 Dados $a, b \in \mathbb{R}^r$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ y la función $f : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$, entonces,

- i. f es (estrictamente) **creciente con respecto a la componente a_i** , con $i = 1, 2, \dots, r$, si $\forall a, b \in \mathbb{R}^r$, $a_i (\gneq) \geq b \implies f(a) (\gneq) \geq f(b)$.
- ii. f es (estrictamente) **creciente** si $\forall a, b \in \mathbb{R}^r$, $a (\gneq) \geq b \implies f(a) (\gneq) \geq f(b)$.
Obsérvese que f es (estrictamente) creciente sii es (estrictamente) creciente por componente, para todas las componentes.

El comportamiento de los consumidores viene representado por el tipo de preferencias. Se dice que unas **preferencias** son **binarias** cuando cada usuario acude a aquel centro de servicio que le ofrece la mayor utilidad. Unas **preferencias** son **parcialmente binarias** cuando el poder de compra de los usuarios es proporcionalmente repartido, atendiendo a las utilidades, entre el centro de servicio más próximo de la firma entrante y el más próximo de los centros que ya estaban

establecidos anteriormente en el mercado. Por último, se dice que las **preferencias** son **proporcionales** cuando los usuarios reparten proporcionalmente su poder de compra entre todos los centros de servicio existentes en el mercado de acuerdo con las distintas utilidades percibidas de los centros..

En la mayoría de los trabajos sobre este problema, la función de utilidad está directamente relacionada con la distancia entre usuario y centro de servicio. En el caso de preferencias binarias, por ejemplo, lo más usual ha sido asignar la demanda de un nodo al centro de servicio más próximo. Puede ocurrir que la distancia mínima de un nodo de demanda al centro más próximo coincida para un centro de servicio nuevo y otro ya establecido. En este caso existen varios criterios para romper ese empate: repartir la demanda, asignarla al centro de servicio ya existente o asignarla al nuevo centro. La última opción se suele desechar para impedir la solución trivial que ocurriría al localizar la empresa entrante sus nuevos centros de servicio en las localizaciones ya establecidas y así, quedarse con su mercado.

Por otro lado, atendiendo a la clase de servicio prestado por las empresas se pueden distinguir dos casos. Unos **servicios** son **esenciales** (demanda inelástica) cuando proveen bienes cuya demanda es totalmente inelástica con respecto de las variables de decisión. Cuando un servicio oferta un bien no considerado de primer orden, lo que significa que su demanda puede depender de las variables de decisión del problema, se dice que se trata de un **servicio no esencial** (demanda elástica).

En el primer grupo se incluyen aquellos servicios que ofertan bienes de primera necesidad como pueden ser supermercados, hospitales, etc. Como ejemplos de servicios no esenciales se encuentran los bares, cines, restaurantes, museos, etc., en los que los usuarios pueden decidir no gastarse todo su presupuesto porque el establecimiento está demasiado lejos o porque la calidad del producto no invita a ello.

A continuación se presentan algunos lemas que serán utilizados durante la tesis. La mayoría de ellos son resultados sobradamente conocidos, por lo que se ha evitado su demostración.

Lema 1.20 Sean $f, g : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo. Si f y g son funciones cóncavas (convexas) entonces $(f + g)$ es una función cóncava (convexa). Además, si alguna de las funciones lo es estrictamente, entonces la suma también lo es.

Lema 1.21 Sean $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo, $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, D convexo, $f(C) \subseteq D$. Si g es una función creciente y (estrictamente) cóncava y f es cóncava, entonces la función $g \circ f$ es (estrictamente) cóncava.

Lema 1.22 Sean $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo, $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, D convexo, $f(C) \subseteq D$. Si g es una función (estrictamente) convexa y decreciente y f es cóncava, entonces $g \circ f$ es una función (estrictamente) convexa.

Lema 1.23 Sea $f : C \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo. Si f es una función cóncava tal que

$f(x) > 0$, $\forall x \geq 0$, y $a, b, c \in \mathbb{R}$ verificando que $a, b > 0$ y $c \geq 0$, entonces la función $F(x) = \frac{a}{\frac{b}{x} + c}$ es estrictamente cóncava.

Dem. Aplicando el lema 1.21 a $F = g \circ f$ donde $g(x) = \frac{a}{\frac{x}{b} + c}$. ■

Lema 1.24 Sean $f_i : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo, funciones (estrictamente) convexas, con $i=1,2,\dots,k$, entonces la función $\max\{f_i : i = 1,2,\dots,k\}$ es (estrictamente) convexa.

Lema 1.25 Sean $f_i : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo, funciones (estrictamente) cóncavas, con $i=1,2,\dots,k$, entonces la función $\min\{f_i : i = 1,2,\dots,k\}$ es (estrictamente) cóncava.

Lema 1.26 Sean $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo, $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, D convexo, $f(C) \subseteq D$. Si g es una función (estrictamente) convexa y creciente y f es convexa, entonces $g \circ f$ es una función (estrictamente) convexa.

1.2 El $(r|X_p)$ -medianoide en redes

Sea $N(V, A)$ una red tal que cada vértice v tiene asociado un peso $w(v) \geq 0$. Esta red representa un mercado donde la demanda está localizada en los vértices $v \in V$ y tiene un valor igual al peso $w(v)$. La longitud de la arista representa la distancia entre sus extremos o el coste de transporte por unidad de producto servido por un centro de servicio en v_i al vértice v_j . El coste unitario desde un punto $x \in N(V, A)$ hasta $v \in V$ viene dado por el camino más corto entre estos dos puntos de la red.

Existen p centros de servicio ya instalados en los puntos $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset N(V, A)$ y se desea establecer r nuevos centros de servicio en los puntos $Y_r = \{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset N(V, A)$ que competirán con los ya existentes. Se supone que los centros de servicio en Y_r pertenecen a la firma F_Y y que los centros en X_p pueden pertenecer a varias firmas aunque, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que pertenecen a una única firma F_X . Sea $w_Y(v)$ la parte de la demanda de $v \in V$ que es captada por la firma F_Y , es decir, que está servida por un centro de servicio de esta firma. Una vez establecidos los centros de F_X , la firma F_Y buscará establecer los suyos en los puntos Y_r de tal forma que maximicen una función $W(Y_r|X_p)$ cuyo valor dependerá de la demanda captada por F_Y . La función W puede representar el beneficio o la cuota de mercado. El problema de la firma F_Y es determinar el conjunto $Y_r^* \subset N(V, A)$ tal que

$$W(Y_r^*|X_p) = \max_{Y_r \subset N(V, A)} W(Y_r|X_p).$$

Sea $W(Y_r|X_p) = \sum_{v \in V} w_Y(v)$, esto es, la cuota de mercado captada por la firma F_Y con centros en Y_r . A la solución, Y_r^* , del problema anterior se la denomina $(r|X_p)$ -medianoide (Hakimi, 1983).

1.2.1 Preferencias binarias y servicios esenciales

En el problema del $(r|X_p)$ -medianoide con preferencias binarias y servicios esenciales (Hakimi, 1993), toda la demanda de cada nodo es satisfecha, siendo asignada al centro de servicio más próximo.

Para cualquier conjunto $X \subseteq N$ se define $D(v, X) = \min\{d(v, x) : x \in X\}$. El conjunto de vértices captados por F_Y , dado X_p , viene determinado por

$$V(Y_r|X_p) = \{v \in V : D(v, Y_r) < D(v, X_p)\},$$

y su cuota de mercado será

$$W(Y_r|X_p) = \sum_{v \in V(Y_r|X_p)} w(v).$$

Megiddo, Zemel y Hakimi (1983) demuestran que el problema de localización con cubrimiento máximo en redes puede ser discretizado, existiendo un conjunto con un número de candidatos para cada nuevo centro de servicio del orden de $O(|V||A|)$. El $(r|X_p)$ -medianoide binario-esencial es un caso particular del problema anterior cuando la distancia máxima a la que están dispuestos a trasladarse los usuarios de un nodo es $D(v, X_p)$. Para cada $v \in V$, sea $B(v, X_p) = \{z \in N : d(v, z) < D(v, X_p)\}$. Un cliente en v acudirá a un centro de F_Y sólo si $Y_r \cap B(v, X_p) \neq \emptyset$. Para $V' \subset V$, sea $B(V', X_p) = \bigcap_{v \in V'} B(v, X_p)$. Si $B(V', X_p) \neq \emptyset$ y $Y_r \cap B(V', X_p) \neq \emptyset$, entonces los nodos de V' serán captados por F_Y .

Para el caso en el que la red es un árbol, estos mismos autores dan un algoritmo de complejidad $O(n^2r)$. Para árboles, el $(1|X_1)$ -medianoide tiene solución nodal y puede ser determinada de la siguiente forma. Dado el árbol T , sean T_1, T_2, \dots, T_k los subárboles resultantes al eliminar el vértice X_1 . En el caso en el que los dos centros de servicio no puedan coincidir, la localización Y_1 se establecerá en el vértice adyacente a X_1 localizado en el subárbol con más demanda. Si las localizaciones pueden coincidir y los empates se resuelven dividiendo las demandas de los nodos entre los dos centros de servicio, Y_1 coincide con X_1 si este punto es la mediana del árbol (donde se minimizan los costes de transporte totales). De no ser éste el caso, Y_1 es el nodo adyacente perteneciente al subárbol con más demanda.

Con el fin de determinar un conjunto de puntos finito que contenga una solución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide, se analiza el problema en una arista $[s, t]$. Previamente, se introduce la definición de punto (v, X_p) -isodistante.

Definición 1.27 Un punto $x \in N(V, A)$ es (v, X_p) -isodistante, con $X_p \subset N(V, A)$, si verifica que

$$d(v, x) = D(v, X_p).$$

Se definen los siguientes conjuntos,

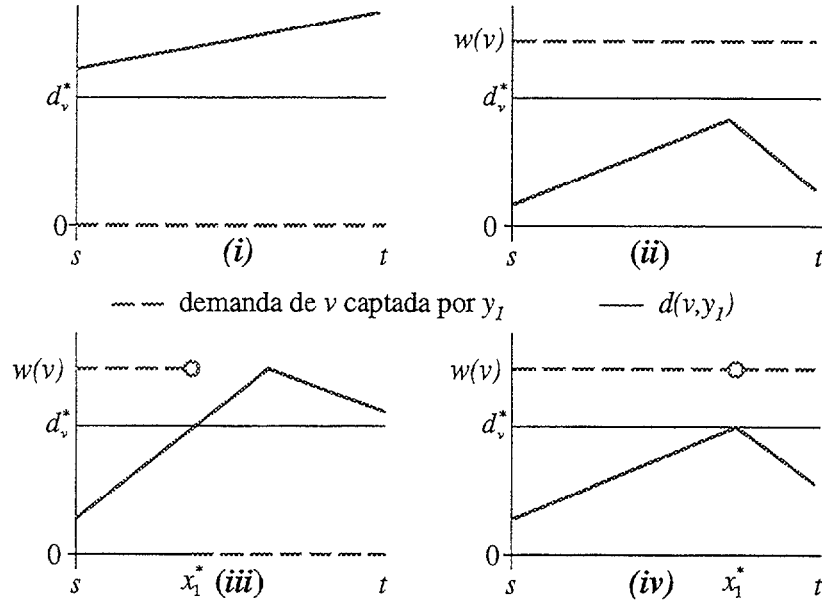


Figura 1.1: Demanda captada por y_1 a lo largo de la arista $[s, t]$ (0 ó 1 punto isodistante)

$$ISOD(v, X_p) = \{x \in N(V, A) : x \text{ es un punto } (v, X_p)\text{-isodistante}\}$$

$$ISOD(X_p) = \bigcup_{v \in V} ISOD(v, X_p).$$

$$ISOD_{ij}(X_p) = ISOD(X_p) \cap [v_i, v_j], \text{ con } [v_i, v_j] \in A.$$

A los elementos de $ISOD(X_p)$ les denominaremos puntos isodistantes.

Considérese la arista $[s, t]$ e y_1 perteneciente a dicha arista. Para $v \in V$, sea $d_v^* = D(v, X_p)$. A continuación se analizan los puntos de la arista que captan la demanda de v , pudiéndose dar tres situaciones:

1. $d_v^* \leq \min\{d(v, s), d(v, t)\}$.

En este caso, no hay puntos isodistantes en (s, t) . Ningún punto $y_1 \in [s, t]$ captará al vértice v , ya que $d(v, y_1) \geq d_v^*$ (figura 1.1 (i)). Aquí se incluyen aquellas aristas en las que alguno de los extremos es un punto (v, X_p) -isodistante ($d(v, s) = d_v^*$ o $d(v, t) = d_v^*$).

2. $d_v^* > \min\{d(v, s), d(v, t)\} = d(v, s)$.

Dependiendo del número de puntos (v, X_p) -isodistantes en la arista, pueden ocurrir tres casos.

- (a) No existe ningún punto (v, X_p) -isodistante en $[s, t]$.
Como $d(v, y_1) < d_v^*$, $\forall y_1 \in [s, t]$, cualquier punto $y_1 \in [s, t]$ captará a v (figura 1.1 (ii)).
- (b) Existe un único punto (v, X_p) -isodistante en $[s, t]$.
Sea $x_1^* \in (s, t]$, tal que $d(v, x_1^*) = d_v^*$.
- i. Si x_1^* no es un punto de cuello de botella, v es captado por y_1 , $\forall y_1 \in [s, x_1^*]$ (figura 1.1 (iii)).
 - ii. Si x_1^* es un punto de cuello de botella, v es captado por y_1 , $\forall y_1 \in [s, x_1^*] \cup (x_1^*, t]$ (figura 1.1 (iv)).
- (c) Existen dos puntos (v, X_p) -isodistantes en $[s, t]$.
En este caso, existe un punto de cuello de botella en el interior de la arista y la distancia de v a los extremos ha de ser menor o igual a d_v^* . Sean x_1^* y x_2^* los puntos (v, X_p) -isodistantes, entonces v es captado por y_1 , $\forall y_1 \in [s, x_1^*] \cup (x_2^*, t]$ (figura 1.2).
3. $d_v^* > \min \{d(v, s), d(v, t)\} = d(v, t)$.
Este caso es simétrico con respecto al anterior.

En definitiva, los conjuntos de puntos que pueden captar la demanda de v vienen dados por:

- Las arista $[s, t]$ tales que $d_v^* > \min \{d(v, s), d(v, t)\}$ y no tiene puntos (v, X_p) -isodistantes.
- Los segmentos $[s, x^*]$ de la arista $[s, t]$ tal que x^* es el único punto (v, X_p) -isodistante en la arista, no es cuello de botella y $d(v, s) = D(v, [s, t]) < d_v^*$.
- Los segmentos $(x^*, t]$ de la arista $[s, t]$ tal que x^* es el único punto (v, X_p) -isodistante en la arista, no es cuello de botella y $d(v, t) = D(v, [s, t]) < d_v^*$.
- La unión de los segmentos $[s, x^*] \cup (x^*, t]$, si $D(v, [s, t]) < d_v^*$, x^* es el único punto (v, X_p) -isodistante en la arista $[s, t]$ y es cuello de botella.
- La unión de los segmentos $[s, x_1^*] \cup (x_2^*, t]$, si $D(v, [s, t]) < d_v^*$ y x_1^*, x_2^* son puntos (v, X_p) -isodistantes en la arista $[s, t]$.

Obsérvese que los trozos de arista en los que el centro de servicio y_1 capta la demanda de v pueden ponerse como intervalos cuyos extremos son vértices o puntos (v, X_p) -isodistantes.

Por cuestión de simplicidad en la notación, en las demostraciones que se presentan a lo largo de este capítulo se utilizará la siguiente notación: $V(Y) = V(Y|X_p)$ y $W(Y) = W(Y|X_p)$, $\forall Y \subseteq N(V, A)$.

Proposición 1.28 *El conjunto $V(Y_r|X_p)$ es constante cuando un punto de Y_r se*

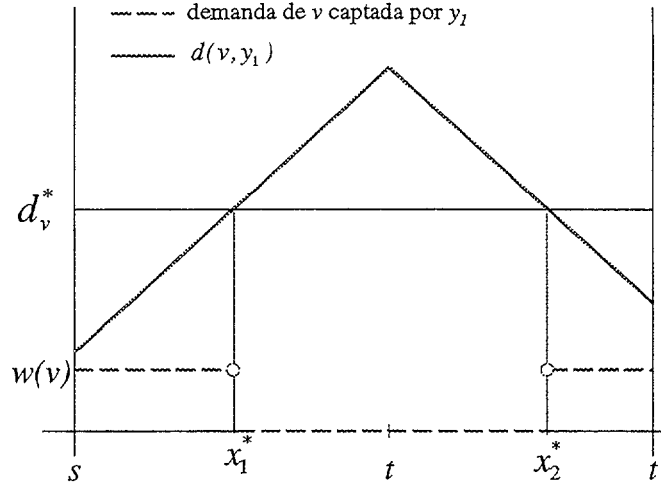


Figura 1.2: Demanda de v captada por y_1 a lo largo de la arista $[s, t]$ (2 puntos isodistantes)

mueve en un segmento (s, t) sin puntos isodistantes y cuyos extremos, s y t , son vértices o puntos isodistantes, esto es,

$$(s, t) \cap ISOD(X_p) = \emptyset \text{ y } \{s, t\} \subset V \cup ISOD(X_p).$$

Dem. Sea $Y_r = \{y_j\}_{j=1}^r$. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que y_1 es la localización que varía en (s, t) . Si $V(Y_r)$ no es constante cuando $y_1 \in (s, t)$, existirán $y'_1, y''_1 \in (s, t)$, tales que

$$V(\{y'_1, y_2, \dots, y_r\}) \neq V(\{y''_1, y_2, \dots, y_r\}).$$

En consecuencia, existe $v_0 \in V$, tal que

$$v_0 \in V(\{y'_1, y_2, \dots, y_r\}) \text{ y } v_0 \notin V(\{y''_1, y_2, \dots, y_r\}) \text{ (o al revés).}$$

Entonces,

$$D(v_0, \{y'_1, y_2, \dots, y_r\}) < D(v_0, X_p) \leq D(v_0, \{y''_1, y_2, \dots, y_r\}),$$

de lo que se infiere que $D(v_0, X_p) \leq D(v_0, \{y_2, \dots, y_r\})$, y por lo tanto

$$d(v_0, y'_1) < D(v_0, X_p) < d(v_0, y''_1).$$

Como la función $d(v_0, y)$ es continua cuando $y \in (s, t)$, se tiene que existe $z \in (y'_1, y''_2)$ tal que $d(v_0, z) = D(v_0, X_p)$, pero esto no puede ocurrir ya que por hipótesis no hay puntos isodistantes en (s, t) . Por tanto, $V(Y_r)$ es constante en (s, t) . ■

Para cada arista $[v_i, v_j]$ se consideran los puntos isodistantes. Sean $x_{ij}^1, x_{ij}^2, \dots, x_{ij}^{q_{ij}}$, los elementos de $ISOD_{ij}(X_p)$, ordenados en orden creciente de la distancia a v_i . Sean los segmentos

$$(v_i, x_{ij}^1), (x_{ij}^k, x_{ij}^{k+1}), k = 1, 2, \dots, q_{ij} - 1, (x_{ij}^{q_{ij}}, v_j)$$

y construimos un conjunto C_{ij} tal que

$$C_{ij} = \{v_i, v_j\} \cup \{y_{ij}^k\}_{k=0}^{q_{ij}}$$

con $y_{ij}^k \in (x_{ij}^k, x_{ij}^{k+1})$, donde $v_i = x_{ij}^0$ y $v_j = x_{ij}^{q_{ij}+1}$. Claramente, este conjunto no es único. Sea entonces, $C = \bigcup_{i,j} C_{ij}$.

Proposición 1.29 *Existe un $(r|X_p)$ -medianoide binario-esencial en el conjunto C .*

Dem. Sea $Y_r^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*\}$ un $(r|X_p)$ -medianoide binario-esencial tal que no todos sus puntos están en C . Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $y_1^* \notin C$ y que $y_1^* \in [s, t]$, con $[s, t] \subset [v_i, v_j]$, tal que $s, t \in V \cup ISOD_{ij}(X_p)$ y $(s, t) \cap ISOD_{ij}(X_p) = \emptyset$.

Si y_1^* no es un punto isodistante, por la proposición anterior, puede trasladarse hasta un punto de C en (s, t) sin que cambie $V(Y_r^*)$, esto es y_1^* puede sustituirse por $y_{ij}^k \in C \cap (s, t)$ y $V(\{y_{ij}^k, y_2^*, \dots, y_r^*\}) = V(Y_r^*)$.

Si y_1^* es un punto isodistante, por la construcción de $[s, t]$, se tiene que $y_1^* = s$ o $y_1^* = t$. Además, existe $v_0 \in V$ tal que $D(v_0, X_p) = d(v_0, y_1^*)$, esto es, y_1^* es un punto (v_0, X_p) -isodistante. Supóngase que $y_1^* = s$ (el otro caso sería simétrico), entonces:

- i. Si $d(v_0, y) \geq D(v_0, X_p)$, para $y \in (s, t)$, se tiene que ningún punto de $[s, t]$ capta a v_0 , por lo que y_1^* puede ser sustituido por $y_{ij}^k \in C \cap (s, t)$ y $V(\{y_{ij}^k, y_2^*, \dots, y_r^*\}) = V(Y_r^*)$.
- ii. Si $d(v_0, y) < D(v_0, X_p)$, para $y \in (s, t)$, el nodo v_0 será captado por cualquier punto de (s, t) , por lo que cualquier movimiento desde s hacia t implica que se captaría a v_0 , sin dejar de captar a ninguno de los ya captados, y por lo tanto, si se elige $y_{ij}^k \in C \cap (s, t)$, se tiene que $V(Y_r^*) \subset V(\{y_{ij}^k, y_2^*, \dots, y_r^*\})$. Esto sería un absurdo ya que entonces Y_r^* no sería un $(r|X_p)$ -medianoide. ■

Puesto que, como se deduce de la demostración anterior, los puntos isodistantes no están en la solución, se pueden eliminar los vértices que sean isodistantes del

conjunto de candidatos a formar parte de la solución. De esta forma, el conjunto C se sustituye por $C - ISOD(X_p)$.

En una arista $[v_i, v_j]$ donde v_i no es isodistante, se hace $y_{ij}^0 = v_i$, y si v_j no es isodistante, se toma $y_{ij}^{q_{ij}} = v_j$. Si en $[v_i, v_j]$ no existen puntos isodistantes, $C_{ij} = \{v_i\}$ o $C_{ij} = \{v_j\}$. De esta forma, C_{ij} está formado por $1 + |ISOD_{ij}(X_p)|$ elementos.

En definitiva, como en cada arista pueden existir como máximo dos puntos (v, X_p) -isodistantes para cada $v \in V$, se tiene que el número máximo de candidatos a considerar es $2|V||A| + |A|$.

Ejemplo: Considérese el problema del $(1|X_1)$ -medianoide planteado en la figura 1.3.

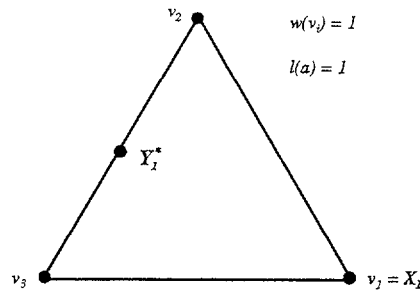


Figura 1.3: Ejemplo de red

Los conjuntos de puntos isodistantes para cada uno de los nodos son:

$$ISOD(v_1, X_1) = \{v_1\} \implies v_1 \text{ no puede ser captado.}$$

$$ISOD(v_2, X_1) = \{v_1, v_3\} \implies v_2 \text{ puede ser captado en } [v_2, v_3] \cup (v_1, v_2].$$

$$ISOD(v_3, X_1) = \{v_1, v_2\} \implies v_3 \text{ puede ser captado en } (v_1, v_3] \cup (v_2, v_3].$$

Obsérvese que los puntos isodistantes son vértices y como se ha visto anteriormente, el medianoide no se encuentra en ninguno de ellos. Bastaría con probar con los puntos $y_{ij} \in (v_i, v_j)$, con $i, j = 1, 2, 3$, para encontrar el $(1|X_1)$ -medianoide. En este caso la solución se encuentra en cualquier punto comprendido en (v_2, v_3) donde la empresa entrante capta una cuota de mercado de dos unidades. Sin embargo, en los vértices v_2 y v_3 , la cuota de mercado captada es tan sólo de una unidad y en v_1 , la cuota es 0.

La proposición siguiente demuestra que la función objetivo del problema del $(\mathcal{r}|X_p)$ -medianoide es submodular. Otra demostración de este resultado puede

encontrarse en Benati y Laporte (1994).

Proposición 1.30 *La función objetivo del problema $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias binarias es submodular.*

Dem. Para cualquier conjunto $Y \subseteq V$, la función objetivo está definida como

$$W(Y) = \sum_{v \in V(Y)} w(v).$$

Sea $S \subset T \subset V$ y $v_k \in V - T$. Entonces,

$$\begin{aligned} W(T \cup \{v_k\}) - W(T) &= \sum_{v \in (V(T \cup \{v_k\}) - V(T))} w(v) = \sum_{v \in (V(\{v_k\}) - V(T))} w(v), \\ W(S \cup \{v_k\}) - W(S) &= \sum_{v \in (V(S \cup \{v_k\}) - V(S))} w(v) = \sum_{v \in (V(\{v_k\}) - V(S))} w(v). \end{aligned}$$

Puesto que $S \subset T$, se tiene que $V(S) \subseteq V(T)$, y por lo tanto

$$V(\{v_k\}) - V(T) \subseteq V(\{v_k\}) - V(S).$$

En consecuencia

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) \leq W(S \cup \{v_k\}) - W(S). \blacksquare$$

Proposición 1.31 *La función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias binarias es creciente.*

Dem. Sea $S \subset T \subset V$. Entonces $V(S) \subseteq V(T)$ y por tanto,

$$W(S) = \sum_{v \in V(S)} w(v) \leq \sum_{v \in V(T)} w(v) = W(T). \blacksquare$$

Teorema 1.32 (Nemhanser y Wolsey, 1988) *Sea el problema*

$$z = \max_{S \subseteq V} \{f(S) : |S| \leq r\}$$

donde $f : P(V) \rightarrow \mathbb{R}$ es submodular y creciente, con $f(\emptyset) = 0$, si z_G es el valor de la función objetivo en la solución greedy y z^* es el valor óptimo, entonces

$$\frac{z_G}{z^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^r.$$

Corolario 1.33 *Si W^* es el valor óptimo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios*

esenciales y preferencias binarias y W_G es el valor de la función objetivo para la solución greedy, entonces

$$\frac{W_G}{W^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^r.$$

Dem. Como consecuencia inmediata del teorema 1.32. ■

Esto supone que para $r = 2$, el valor obtenido por el greedy es al menos un 75 % del valor óptimo y que para $r = 3$ es un 70.37 %.

1.2.2 Preferencias binarias y servicios no esenciales

Considérese el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en el que cada nodo es captado por el centro de servicio más próximo y la cantidad de demanda que le asigna a ese centro es una función decreciente de la distancia entre ellos, de forma que

$$W(Y_r|X_p) = \sum_{v \in V(Y_r|X_p)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, Y_r))},$$

donde f_v es una función de variable real creciente con $f_v(0) \geq 1, \forall v \in V$.

Proposición 1.34 Sean $\{x_k\}_{k=1}^q = ISOD_{ij}(X_p)$, ordenados en orden creciente de la distancia al vértice v_i . Sea $x_0 = v_i$ y $x_{q+1} = v_j$. Entonces la función $W(y) = W(Y_r|X_p)$ con $y \in Y_r$, es convexa en (x_{k-1}, x_k) , $k = 1, 2, \dots, q+1$.

Dem. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que y_1 es la localización que varía en (x_{k-1}, x_k) , para algún $k \in \{1, 2, \dots, q+1\}$, y que el resto de las localizaciones no cambian. En este caso, la cuota de mercado captada por Y_r es una función de y_1 dada por

$$W(y_1) = \sum_{v \in V(\{y_1, \dots, y_r\}|X_p)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, \{y_1, \dots, y_r\}))}.$$

El conjunto $V(\{y_1, \dots, y_r\}|X_p)$ es constante en (x_{k-1}, x_k) (proposición 1.28), por lo tanto, bastaría con demostrar que cada uno de los sumandos es una función convexa en (x_{k-1}, x_k) .

Dado $v \in V(\{y_1, \dots, y_r\}|X_p)$, $D(v, \{y_1, \dots, y_r\}) = \min\{d(v, y_1), G_v\}$, con $G_v = \min\{d(v, y_j) : j = 2, \dots, r\}$. Como $d(v, y_1)$ es cóncava a lo largo de (x_{k-1}, x_k) , sin más que aplicar los lemas 1.25 y 1.21, se tiene que $f_v(D(v, \{y_1, \dots, y_r\}))$ también lo es.

Por lo tanto, cada uno de los sumandos

$$\frac{w(v)}{f_v(D(v, \{y_1, \dots, y_r\}))}$$

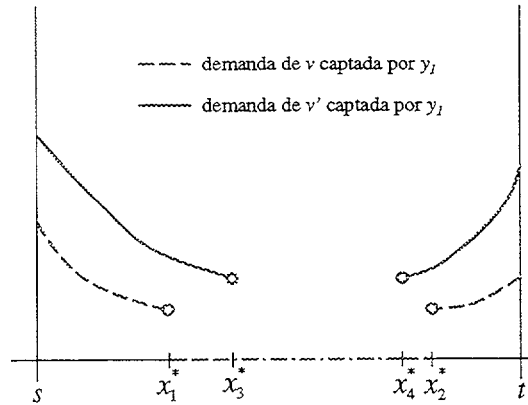


Figura 1.4: Cuota de mercado captada por y_1 a lo largo de una arista

será convexo en (x_{k-1}, x_k) (lema 1.22). Aplicando el lema 1.20 se tiene que $W(y_1)$ es convexa en (x_{k-1}, x_k) . ■

Para ilustrar el comportamiento de la cuota de mercado de y_1 a lo largo de la arista, cuando sólo se localiza este nuevo centro de servicio y se consideran todos los nodos, se analiza la captación de demanda de v y v' por y_1 a lo largo de una arista (figura 1.4). Los puntos x_1^* y x_2^* son (v, X_P) -isodistante, y x_3^* , x_4^* son puntos (v', X_P) -isodistante. En este caso, la arista $[s, t]$ queda dividida en los siguientes segmentos en los que la cuota de mercado captada es una función convexa: $[s, x_1^*]$, $[x_1^*, x_3^*]$, $[x_3^*, x_4^*]$, (x_4^*, x_2^*) y $(x_2^*, t]$. El máximo nunca se encuentra en un punto isodistante $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ ya que existe un punto muy próximo a cada uno de ellos en el que se alcanza mayor cuota de mercado $(x_1^* - \delta, x_2^* + \delta, x_3^* - \delta, x_4^* + \delta)$, con $\delta > 0$, suficientemente pequeño). Por lo tanto, la solución estará en uno de los vértices, o en un punto muy próximo a un punto isodistante. En este último caso, el resultado será una ε -solución ya que no se puede alcanzar el supremo de la función objetivo en ningún punto del conjunto factible.

Obsérvese que cuando se considera más de un nuevo centro de servicio, un punto isodistante no tiene que coincidir con un punto de discontinuidad para la cuota de mercado de F_Y . Si x es un punto (v, X_P) -isodistante e y_j capta la demanda de v , como $d(v, y_j) < D(v, X_P)$ la cuota de mercado permanecería constante cuando otra de las localizaciones se mueve en torno a x . En este caso, la cuota de mercado no presentará una discontinuidad en dicho punto (v, X_P) -isodistante.

Proposición 1.35 Existe un conjunto $Y_r^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*\}$ que es una ε -solución

para el problema del $(r|X_p)$ -medianoide binario-no esencial en la red $N(V, A)$, de tal forma que y_j^* es un vértice o un punto muy próximo a un punto isodistante, $\forall j = 1, 2, \dots, r$.

Dem. Resulta de la convexidad de la función $W(Y_r)$ cuando $y_j \in Y_r$ varía en (s, t) , donde s, t son vértices o puntos isodistantes consecutivos en una misma arista. Además, si el extremo donde se alcanza el máximo es un vértice no isodistante, como la función objetivo es continua en ese punto, ese supremo coincidirá con el máximo y por lo tanto, el vértice será la solución óptima. ■

Como en cada arista pueden existir como máximo dos puntos (v, X_p) -isodistantes, $v \in V$, y teniendo en cuenta que los candidatos para la localización de un nuevo centro de servicio son los vértices y los puntos próximos a los isodistantes, el número máximo de candidatos sería de $2|V||A| + |V|$.

Los puntos isodistantes del ejemplo de la figura 1.3 son los vértices. Por lo tanto, la solución para el $(1|X_1)$ -medianoide no se encontrará en uno de los vértices sino en algún punto muy próximo a éstos.

Tomando $f_v(x) = 1 + x$, si Y_1 se localiza en los vértices v_2 o v_3 , la cuota de mercado captada es de una unidad ya que sólo captaría su propia demanda. Sin embargo, si se evalúan los puntos pertenecientes a la arista $\overline{v_2v_3}$ que son muy próximos al vértice v_2 , se observa que la cuota de mercado tiende a 1.5 unidades cuando la localización se acerca a ese vértice. Lo mismo ocurre cuando la localización se acerca a v_3 .

También en el caso no esencial se puede demostrar que la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide es submodular y creciente, y por lo tanto, el error cometido por el algoritmo greedy en la resolución del problema está acotado según la expresión del teorema 1.32.

Proposición 1.36 Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) \geq 1$, $\forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias binarias es submodular.

Dem. Para cualquier conjunto $Y \subseteq V$, la función objetivo está definida como

$$W(Y) = \sum_{v \in V(Y)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, Y))}.$$

Sea $S \subset T \subset V$ y $v_k \in V - T$. Entonces,

$$\begin{aligned} W(T) &= \sum_{v \in V(T)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, T))}, \\ W(T \cup \{v_k\}) &= \sum_{v \in V(T \cup \{v_k\})} \frac{w(v)}{f_v(D(v, T \cup \{v_k\}))}. \end{aligned}$$

Sean

$$V_1^T = \{v \in V(T \cup \{v_k\}) : D(v, T \cup \{v_k\}) = D(v, T)\},$$

$$V_2^T = \{v \in V(T \cup \{v_k\}) : D(v, T \cup \{v_k\}) < D(v, T)\}.$$

Análogamente se definen V_1^S y V_2^S .

Entonces $V(T) \subseteq V(T \cup \{v_k\}) = V_1^T \cup V_2^T$ y $D(v, T \cup \{v_k\}) = d(v, v_k)$ para $v \in V_2^T$. Así,

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) = \sum_{v \in V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))} - \sum_{v \in V(T) \cap V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(D(v, T))},$$

y

$$W(S \cup \{v_k\}) - W(S) = \sum_{v \in V_2^S} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))} - \sum_{v \in V(S) \cap V_2^S} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))}.$$

Por lo tanto,

$$[W(T \cup \{v_k\}) - W(T)] - [W(S \cup \{v_k\}) - W(S)] =$$

$$\left[\sum_{v \in V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))} - \sum_{v \in V_2^S} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))} \right] +$$

$$\left[\sum_{v \in V(S) \cap V_2^S} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))} - \sum_{v \in V(T) \cap V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(D(v, T))} \right].$$

Puesto que $S \subset T$, se tiene que si $v \in V_2^T$, entonces

$$D(v, T \cup \{v_k\}) = d(v, v_k) < D(v, T) \leq D(v, S).$$

Por lo tanto,

$$D(v, S \cup \{v_k\}) = d(v, v_k) < D(v, S),$$

lo que implica que $v \in V_2^S$. Luego $V_2^T \subseteq V_2^S$.

Por otro lado, como $S \subset T$, entonces $V(S) \subseteq V(T)$ y

$$v \in V(S) \cap V_2^S \implies \begin{cases} v \in V(S) \\ \text{y} \\ v \in V_2^S \end{cases} \implies \begin{cases} v \in V(T) \\ \text{y} \\ v \in V_2^S \end{cases} \implies \begin{cases} v \in V(T) \\ \text{y} \\ v \in V_2^T \end{cases} \quad \text{ó}$$

$$\begin{cases} v \in V(T) \\ \text{y} \\ v \in V_2^S - V_2^T \end{cases} \text{ . En consecuencia, } \begin{cases} v \in V(T) \cap V_2^T \\ \text{ó} \\ v \in V(T) \cap (V_2^S - V_2^T) \end{cases} \text{ y por lo tanto}$$

$$V(S) \cap V_2^S \subseteq [V(T) \cap V_2^T] \cup [V(T) \cap (V_2^S - V_2^T)].$$

Así,

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in V(S) \cap V_2^S} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))} - \sum_{v \in V(T) \cap V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(D(v, T))} \leq \\ & \sum_{v \in V(T) \cap V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))} + \sum_{v \in V(T) \cap (V_2^S - V_2^T)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))} - \sum_{v \in V(T) \cap V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(D(v, T))}. \end{aligned}$$

Puesto que $S \subset T$, se tiene que $D(v, T) \leq D(v, S)$ y como f_v es creciente $f_v(D(v, T)) \leq f_v(D(v, S))$. Por lo tanto, la diferencia entre el primer y el tercer sumando es menor o igual a cero, y

$$\begin{aligned} & [W(T \cup \{v_k\}) - W(T)] - [W(S \cup \{v_k\}) - W(S)] \leq \\ & \sum_{v \in V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))} - \sum_{v \in V_2^S} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))} + \sum_{v \in V(T) \cap (V_2^S - V_2^T)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))} = \\ & \sum_{v \in V(T) \cap (V_2^S - V_2^T)} \frac{w(v)}{f_v(D(v, S))} - \sum_{v \in V_2^S - V_2^T} \frac{w(v)}{f_v(d(v, v_k))}. \end{aligned}$$

Como $d(v, v_k) < D(v, S)$, $\forall v \in V_2^S$, entonces $f_v(d(v, v_k)) \leq f_v(D(v, S))$, $\forall v \in V_2^S$, y como $V(T) \cap (V_2^S - V_2^T) \subseteq (V_2^S - V_2^T)$, se tiene que la suma anterior es menor o igual que cero. En consecuencia, la función W es submodular. ■

Proposición 1.37 Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) \geq 1$, $\forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias binarias es creciente.

Dem. Sea $S \subset T \subset V$, entonces $V(S) \subseteq V(T)$ y $D(v, S) \geq D(v, T)$, y por lo tanto $W(S) \leq W(T)$. ■

Corolario 1.38 Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) \geq 1$, $\forall v \in V$. Si W^* es el valor óptimo del $(\mathbb{R}|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias binarias y W_G es el valor de la función objetivo para la solución greedy, entonces

$$\frac{W_G}{W^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^r.$$

Dem. Como consecuencia inmediata del teorema 1.32. ■

1.2.3 Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales

Las preferencias son parcialmente binarias cuando cada usuario distribuye su demanda entre los servicios más próximos de cada una de las firmas. Además, la demanda asignada a cada una de ellas es una función decreciente de la distancia que separa el punto de demanda del centro de servicio más próximo de la firma. De acuerdo con el trabajo de Hakimi (1990), el modelo se define de la siguiente forma.

Sean X_p e Y_r los conjuntos de las localizaciones para las firmas existente y entrante, respectivamente. Como el servicio es esencial, la demanda en cada uno de los nodos debe ser totalmente satisfecha. Así, si $w_X(v)$ y $w_Y(v)$ son las cantidades de demanda del nodo v que son captadas por X_p e Y_r , respectivamente, se ha de verificar que

$$w(v) = w_X(v) + w_Y(v), \quad \forall v \in V.$$

Estas cantidades son inversamente proporcionales a una función de la distancia, f_v , de forma que

$$\frac{w_Y(v)}{w_X(v)} = \frac{f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, Y_r))},$$

donde $f_v(x)$ es una función real y creciente que transforma números positivos en estrictamente positivos ($f_v: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$). Despejando en la igualdad anterior se tiene

$$w_Y(v) = w(v) \frac{f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, Y_r))},$$

y por lo tanto,

$$W(Y_r|X_p) = \sum_{v \in V} w_Y(v) = \sum_{v \in V} \frac{w(v) f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, Y_r))}.$$

A partir de $W(Y_r|X_p)$, de forma análoga al caso anterior, se define el $(r|X_p)$ -medianoide como el conjunto $Y_r^* \subset N$, que es solución del siguiente problema

$$W(Y_r^*|X_p) = \max_{Y_r \subset N(V,A)} W(Y_r|X_p).$$

Teorema 1.39 (Hakimi, 1990) *Sea f_v una función de variable real, creciente y cóncava tal que $f_v(0) > 0$, $\forall v \in V$. Entonces existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, que es un $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial en $N(V,A)$.*

Si en la red de la figura 1.3 se toma $f_v(x) = 1 + x$, se puede comprobar que para una de las soluciones del caso binario-esencial, Y_1^* en el punto medio de la arista que une v_2 y v_3 , la cuota de mercado es de 1.4286 unidades. Esta alternativa no es el $(1|X_1)$ -medianoide para el caso parcialmente binario-esencial ya que para $X_1 = Y_1$, la cuota de mercado captada por cada empresa es de 1.5 unidades. De hecho, en este caso, cualquier vértice sería un $(1|X_1)$ -medianoide.

También cuando las asignaciones son parcialmente binarias se demuestra que la función objetivo es submodular y creciente, por lo que se podría asegurar que el error cometido por la solución greedy está acotado por la expresión señalada en el teorema 1.32.

Proposición 1.40 *Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 0$, $\forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias parcialmente binarias, es submodular.*

Dem. Para cualquier conjunto $Y \subseteq V$, la función objetivo para este caso está definida como

$$W(Y) = \sum_{v \in V} w_Y(v) = \sum_{v \in V} \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, Y))}.$$

Sean $S \subset T \subset V$ y $v_k \in V - T$. Entonces,

$$W(T) = \sum_{v \in V} \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T))},$$

$$W(T \cup \{v_k\}) = \sum_{v \in V} \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T \cup \{v_k\}))}.$$

Se define

$$V_1^T = \{v \in V : D(v, T \cup \{v_k\}) = D(v, T)\},$$

$$V_2^T = \{v \in V : D(v, T \cup \{v_k\}) = d(v, v_k) < D(v, T)\}.$$

Entonces, $V = V_1^T \cup V_2^T$ y $V_1^T \cap V_2^T = \emptyset$, y

$$W(T \cup \{v_k\}) = \sum_{v \in V_1^T} \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T))} + \sum_{v \in V_2^T} \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(d(v, v_k))}.$$

Por lo tanto,

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) = \sum_{v \in V_2^T} \left[\frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(d(v, v_k))} - \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T))} \right].$$

Análogamente para S , se definen los conjuntos V_1^S y V_2^S , con lo que se tendría que

$$W(S \cup \{v_k\}) - W(S) = \sum_{v \in V_2^S} \left[\frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(d(v, v_k))} - \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, S))} \right].$$

Como $S \subset T$ se cumple que $V_2^S \supseteq V_2^T$ y se tiene que

$$\begin{aligned} & [W(T \cup \{v_k\}) - W(T)] - [W(S \cup \{v_k\}) - W(S)] = \\ & \sum_{v \in V_2^T} \left[\frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, S))} - \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T))} \right] - \\ & \sum_{v \in V_2^S - V_2^T} \left[\frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(d(v, v_k))} - \frac{w(v)f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, S))} \right]. \end{aligned}$$

Como $S \subset T$ y f_v es una función creciente, se tiene que

$$\frac{1}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T))} \geq \frac{1}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, S))}, \forall v \in V,$$

y por lo tanto, el primer sumatorio es menor o igual que cero.

Además, como f_v es creciente y $d(v, v_k) < D(v, S), \forall v \in V_2^S$, se tiene que

$$f_v(d(v, v_k)) \leq f_v(D(v, S)), \forall v \in V_2^S$$

y por lo tanto, el segundo sumatorio es mayor o igual que cero. Consecuentemente, el resultado total es menor o igual que cero, de lo que resulta

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) \leq W(S \cup \{v_k\}) - W(S). \blacksquare$$

Proposición 1.41 *Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 0$, entonces, la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias parcialmente binarias es creciente.*

Dem. Si $S \subset T \subset V$, entonces $D(v, S) \geq D(v, T), \forall v \in V$. Como f_v es creciente resulta que $f_v(D(v, S)) \geq f_v(D(v, T))$, y por lo tanto

$$\frac{f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, S))} \leq \frac{f_v(D(v, X_p))}{f_v(D(v, X_p)) + f_v(D(v, T))},$$

de donde se deduce que $W(S) \leq W(T)$. ■

Corolario 1.42 *Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 0, \forall v \in V$. Si W^* es el valor óptimo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias parcialmente binarias y W_G es el valor de la función objetivo para la solución greedy, entonces*

$$\frac{W_G}{W^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^r.$$

Dem. Como consecuencia inmediata del teorema 1.32. ■

1.2.4 Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales

A diferencia del caso esencial, ahora la demanda de un nodo no tiene que ser satisfecha completamente, verificándose que

$$w(v) \geq w_X(v) + w_Y(v), \forall v \in V.$$

La cantidad captada por cada empresa es directamente proporcional a la que no es servida por la rival, esto es

$$\begin{aligned} w_Y(v) &= \frac{w(v) - w_X(v)}{f_v(D(v, Y_r))}, \\ w_X(v) &= \frac{w(v) - w_Y(v)}{f_v(D(v, X_p))}. \end{aligned}$$

Suponiendo $f_v(0) > 1, \forall v \in V$ y utilizando las igualdades anteriores, se deduce la demanda captada por cada una de las empresas,

$$w_Y(v) = \frac{w(v)(f_v(D(v, X_p)) - 1)}{[f_v(D(v, X_p))f_v(D(v, Y_r))] - 1},$$

$$w_Y(v) = \frac{w(v)(f_v(D(v, Y_r)) - 1)}{[f_v(D(v, X_p))f_v(D(v, Y_r))] - 1}.$$

El siguiente teorema, debido Hakimi (1990), asegura la existencia de solución nodal para ciertas condiciones de la funciones f_v .

Teorema 1.43 (Hakimi, 1990) *Sea f_v una función de variable real creciente y cóncava tal que $f_v(0) > 1, \forall v \in V$. Entonces existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, que es un $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias parcialmente binarias en $N(V, A)$.*

Proposición 1.44 *Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 1, \forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias parcialmente binarias es submodular.*

Dem. Para cualquier conjunto $Y \subseteq V$, la función objetivo está definida como

$$W(Y) = \sum_{v \in V} w_Y(v) = \sum_{v \in V} \frac{w(v)(f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p))f_v(D(v, Y)) - 1}.$$

Sean $S \subset T \subset V$ y $v_k \in V - T$, y se definen los conjuntos

$$V_1^T = \{v \in V : D(v, T \cup \{v_k\}) = D(v, T)\},$$

$$V_2^T = \{v \in V : D(v, T \cup \{v_k\}) = d(v, v_k) < D(v, T)\}.$$

Entonces $V = V_1^T \cup V_2^T$ y $V_1^T \cap V_2^T = \emptyset$, y

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) = \sum_{v \in V_2^T} \frac{w(v)(f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p))f_v(d(v, v_k)) - 1} -$$

$$\sum_{v \in V_2^T} \frac{w(v)(f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p))f_v(D(v, T)) - 1}.$$

Análogamente, se definen los conjuntos V_1^S y V_2^S para el conjunto S , y se tendría

que

$$W(S \cup \{v_k\}) - W(S) = \sum_{v \in V_2^S} \frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(d(v, v_k)) - 1} - \sum_{v \in V_2^S} \frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, S)) - 1}.$$

Como $S \subset T$ se tiene que $V_2^S \supseteq V_2^T$, y entonces

$$\begin{aligned} & [W(T \cup \{v_k\}) - W(T)] - [W(S \cup \{v_k\}) - W(S)] = \\ & \sum_{v \in V_2^T} \left[\frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, S)) - 1} - \frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, T)) - 1} \right] - \\ & \sum_{v \in V_2^S - V_2^T} \left[\frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(d(v, v_k)) - 1} - \frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, S)) - 1} \right]. \end{aligned}$$

Como $S \subset T$ y f_v es una función creciente, se tiene que

$$\frac{1}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, T)) - 1} \geq \frac{1}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, S)) - 1}, \quad \forall v \in V.$$

Por lo tanto, el primer sumatorio es menor o igual que cero.

Por otro lado, por ser f_v creciente y $d(v, v_k) < D(v, S)$, $\forall v \in V_2^S$, se tiene que

$$f_v(d(v, v_k)) \leq f_v(D(v, S)), \quad \forall v \in V_2^S,$$

de donde se deduce que el segundo sumatorio es positivo.

De todo lo anterior se obtiene la desigualdad

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) \leq W(S \cup \{v_k\}) - W(S). \blacksquare$$

Proposición 1.45 Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 1$, $\forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias parcialmente binarias es creciente.

Dem. Si $S \subset T \subset V$, entonces $D(v, S) \geq D(v, T)$, y como f_v es creciente, $\forall v \in V$, resulta

$$\begin{aligned} W(S) &= \sum_{v \in V} \frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, S)) - 1} \leq \\ & \sum_{v \in V} \frac{w(v) (f_v(D(v, X_p)) - 1)}{f_v(D(v, X_p)) f_v(D(v, T)) - 1} = W(T). \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 1.46 *Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 1$, $\forall v \in V$. Si W^* es el valor óptimo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias parcialmente binarias y W_G es el valor de la función objetivo para la solución greedy, entonces*

$$\frac{W_G}{W^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r} \right)^r.$$

Dem. Como consecuencia inmediata del teorema 1.32. ■

1.2.5 Preferencias proporcionales y servicios esenciales

Para simplificar la notación, se define el conjunto $X_{p+r} = \{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{p+r}\}$ formado por el conjunto de la r localizaciones de la empresa F_Y , $Y_r = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, y las p correspondientes a F_X , $X_p = \{x_{r+1}, \dots, x_{p+r}\}$. Además, $f_v(d(v, x_i)) = f_{vi}$ y $w_i(v)$ representa la parte de la demanda de v captada por un centro de servicio x_i .

Si las preferencias son proporcionales, la demanda de cada nodo se reparte entre todos los centros de servicios que operan en el mercado, y por ser un servicio esencial se tiene que

$$w(v) = w_1(v) + w_2(v) + \dots + w_{p+r}(v), \forall v \in V.$$

El modelo queda definido por las relaciones siguientes

$$\frac{w_i(v)}{w_j(v)} = \frac{f_{vj}}{f_{vi}}, \forall x_i, x_j \in X_{p+r},$$

de donde se deduce que

$$w_i(v) = \frac{w(v)/f_{vi}}{\sum_{j=1}^{p+r} \frac{1}{f_{vj}}}, \forall x_i \in X_{p+r}, \forall v \in V.$$

Por lo tanto el $(r|X_p)$ -medianoide será el conjunto $Y_r^* = \{x_1^*, \dots, x_r^*\}$ solución del siguiente problema

$$\max_{Y_r \subset N(V,A)} \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^r w_i(v)$$

donde el conjunto $X_p = \{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{p+r}\}$ se considera dado.

Teorema 1.47 (*Hakimi, 1990*) *Sea la red $N(V,A)$ y se asume que $p+r \leq |V|$. Sea f_v una función de variable real creciente y cóncava, tal que $f_v(0) > 0$, $\forall v \in V$. Entonces existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, que es un $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias proporcionales en $N(V,A)$.*

Para demostrar el resultado anterior, el autor prueba que si una de las localizaciones que forman parte de la solución no se corresponde con un vértice, la cuota de mercado captada por la empresa ya establecida no varía si se traslada esa localización a alguno de los vértices de la arista donde se encuentra.

Es evidente que si el objetivo es obtener un $(1|X_1)$ -medianoide, la solución obtenida para preferencias proporcionales es la misma que la del caso parcialmente binario. Esta equivalencia entre preferencias parcialmente binarias y proporcionales no ocurre cuando alguna de las empresas opera con más de un centro de servicio.

Bauer, Domschke y Pesch (1993) analizan el problema del $(1|X_1)$ -medianoide en redes considerando las siguientes asignaciones proporcionales

$$P_{vY_1} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } v \text{ coincide con el centro de servicio en } Y_1 \\ \frac{d(v, X_1)^s}{d(v, X_1)^s + d(v, Y_1)^s} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

considerando además, que los centros de servicio no pueden estar localizados en la misma ubicación. Bajo estas condiciones, los autores demuestran que para $s = 1$ el problema tiene solución nodal, mientras que para $s \geq 2$, la existencia de este tipo de soluciones no se puede asegurar.

Proposición 1.48 *Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 0, \forall v \in V$. Entonces, la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias proporcionales es submodular.*

Dem. Para cualquier conjunto $Y \subseteq V$, la función objetivo para este caso está definida como

$$W(Y) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{\sum_{x_i \in Y} \frac{1}{f_{vi}}}{\sum_{x_i \in Y} \frac{1}{f_{vi}} + \sum_{x_j \in X_p} \frac{1}{f_{vj}}}$$

Sean $S \subset T \subset V$ y $v_k \in V - T$. Entonces,

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) = \sum_{v \in V} w(v) \left[\frac{K_v^T + \frac{1}{f_{vv_k}}}{K_v^T + \frac{1}{f_{vv_k}} + K_v^{X_p}} - \frac{K_v^T}{K_v^T + K_v^{X_p}} \right],$$

$$W(S \cup \{v_k\}) - W(S) = \sum_{v \in V} w(v) \left[\frac{K_v^S + \frac{1}{f_{vv_k}}}{K_v^S + \frac{1}{f_{vv_k}} + K_v^{X_p}} - \frac{K_v^S}{K_v^S + K_v^{X_p}} \right],$$

donde $K_v^X = \sum_{x \in X} \frac{1}{f_{vx}}, \forall X \subset V$.

La función $g(x) = \frac{x+\alpha}{x+\alpha+\beta} - \frac{x}{x+\beta}$, con $\alpha, \beta > 0$, es estrictamente decreciente para $x \geq 0$. Por lo tanto, si $S \subsetneq T$, entonces $K_v^S < K_v^T, \forall v \in V$, y en consecuencia

$g(K_v^S) > g(K_v^T)$, $\forall v \in V$. De donde resulta la desigualdad

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) < W(S \cup \{v_k\}) - W(S). \blacksquare$$

Proposición 1.49 *Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 0$, $\forall v \in V$. Entonces, la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias proporcionales es creciente.*

Dem. Sea $S \subseteq T \subset V$ y

$$W(S) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{K_v^S}{K_v^S + K_v^{X_v}},$$

$$W(T) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{K_v^T}{K_v^T + K_v^{X_v}}.$$

Considerando que $K_v^T = K_v^S + K_v^{T-S}$ y que la función $g(x) = \frac{x}{x+\alpha}$ es estrictamente creciente para $x \neq -\alpha$ y $\alpha > 0$, resulta que $W(S) < W(T)$. \blacksquare

Corolario 1.50 *Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 0$, $\forall v \in V$. Si W^* es el valor óptimo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias proporcionales y W_G es el valor de la función objetivo para la solución greedy, entonces*

$$\frac{W_G}{W^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^r.$$

Dem. Como consecuencia inmediata del teorema 1.32. \blacksquare

1.2.6 Preferencias proporcionales y servicios no esenciales

Cuando la demanda es no esencial se tiene que

$$w(v) \geq w_1(v) + w_2(v) + \dots + w_{p+r}(v), \forall v \in V.$$

Considerando que la cantidad de demanda de un nodo v captada por un establecimiento localizado x_i es proporcional a la que queda sin ser servida por el resto de los centros de servicio, se tiene

$$w_i(v) = \frac{w(v) - \sum_{j=1, j \neq i}^{p+r} w_j(v)}{f_{vi}}, \quad \forall x_i \in X_{p+r},$$

y por lo tanto,

$$w(v) = w_1(v) + w_2(v) + \dots + w_i(v)f_{vi} + \dots + w_{p+r}(v), \quad \forall x_i \in X_{p+r}.$$

Este sistema tiene solución única siempre que $f_{vi} \neq 1, \forall x_i \in X_{p+r}$, siendo

$$w_i(v) = \frac{w(v) \frac{1}{(f_{vi}-1)}}{1 + \sum_{j=1}^{p+r} \frac{1}{(f_{vj}-1)}}, \quad \forall x_i \in X_{p+r}.$$

Por lo tanto, dado el conjunto $X_p, Y_r^* = \{x_1^*, \dots, x_r^*\}$ es un $(r|X_p)$ -medianoide si es la solución del siguiente problema

$$\max_{Y_r \subset N(V,A)} \sum_{v \in V} \sum_{i=1}^r w_i(v).$$

Teorema 1.51 (Hakimi, 1990) *Sea la red $N(V,A)$ y se asume que $p+r \leq |V|$. Sea $f_v(\delta) = a_v \delta + b_v$, con $a_v \geq 0$ y $b_v > 1, \forall v \in V$. Entonces existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que es un $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias proporcionales en $N(V,A)$.*

Teorema 1.52 (Hakimi, 1990) *Sea la red $N(V,A)$ y se asume que $p+r \leq |V|$. Sea f_v una función real creciente y cóncava tal que $f_v(0) > 1, \forall v \in V$. Entonces existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que minimiza la cuota de mercado captada por los centros de servicio ya establecidos.*

Este resultado es interesante pero poco útil en el caso no esencial. El hecho de que se reduzca la cuota de mercado para la empresa ya establecida no implica que aumente la de la entrante, ya que puede ocurrir que se produzca una reducción de la demanda total captada por ambas firmas.

El resultado de Hakimi (1990) sobre la existencia de solución nodal cuando las funciones f_v son lineales ha sido extendido en esta tesis a los casos donde las funciones f_v , son cóncavas.

Lema 1.53 *La función real de variable real $h(x) = \frac{a}{a+Kx} + \sum_{j=1}^q \frac{b_j x}{a+Kx}$ con $a,$*

$b_j, K > 0, j = 1, \dots, q$, y $\sum_{j=1}^q b_j < K$, es estrictamente decreciente y estrictamente cóncava.

Dem. Se tiene que

$$h'(x) = \frac{a}{(a+Kx)^2} \left(\sum_{j=1}^q b_j - K \right) < 0 \Rightarrow h(x) \text{ es estrictamente decreciente}$$

$$h''(x) = a \left(\sum_{j=1}^q b_j - K \right) \frac{(-2K)}{(a+Kx)^3} > 0 \Rightarrow h(x) \text{ es estrictamente cóncava. } \blacksquare$$

Teorema 1.54 Sea $N(V, E)$ una red y $A_{p+r} = \{a_1, a_2, \dots, a_{p+r}\}$ donde a_j son constantes positivas, $\forall a_j \in A_{p+r}$. Se supone que $p+r \leq |V|$ y sea f_v una función de variable real creciente y cóncava tal que $f_v(0) > a_j$, $\forall v \in V$, $\forall a_j \in A_{p+r}$. Entonces, existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que

$$W(V_r | X_p) = \max_{Y_r \subset N(V, A)} \sum_{v \in V} \sum_{j=1}^r \frac{w(v) \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}}.$$

Dem. Supóngase que $Y_r^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*\}$ es una solución del problema anterior y no todas las localizaciones son nodales. Entonces

$$W(Y_r^* | X_p) = \max_{Y_r \subset N(V, A)} W(Y_r | X_p).$$

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que x_1^* no es un nodo y que está en la arista $[s, t]$. Se probará que la localización x_1^* puede trasladarse a uno de los vértices de esta arista, manteniendo el resto de las localizaciones fijas, sin que con ello se reduzca el valor de $W(Y_r^* | X_p)$.

$$W(Y_r^* | X_p) = \sum_{v \in V} w(v) \left[\frac{\frac{a_1}{f_{v1} - a_1}}{\frac{a_1}{f_{v1} - a_1} + K_v} + \sum_{j=2}^r \frac{\frac{a_j}{f_{vj} - a_j}}{\frac{a_1}{f_{v1} - a_1} + K_v} \right]$$

donde $K_v = 1 + \sum_{j=2}^{p+r} \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}$, $\forall v \in V$, son constantes ya que todas las localizaciones menos x_1^* están fijadas.

Sea la función $g_v = f_{v1} - a_1$, que es creciente, positiva y cóncava, $\forall v \in V$. Supóngase que la localización de x_1^* en la arista $[s, t]$ viene dada por la variable z que representa la distancia entre el centro de servicio y el vértice s . La distancia entre cualquier vértice $v \in V$ y la localización x_1^* es una función cóncava de z que se representará como $\delta_v(z)$. Así, cuando el resto de las localizaciones están fijas, $W(Y_r^* | X_p)$ puede expresarse en función de z de la siguiente forma

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{v \in V} w(v) \left[\frac{\frac{a_1}{g_v(\delta_v(z))}}{\frac{a_1}{g_v(\delta_v(z))} + K_v} + \sum_{j=2}^r \frac{\frac{a_j}{f_{vj} - a_j}}{\frac{a_1}{g_v(\delta_v(z))} + K_v} \right] = \\ &= \sum_{v \in V} w(v) h_v(g_v(\delta_v(z))), \end{aligned}$$

siendo $h_v(x) = \frac{a_1}{a_1 + K_v x} + \sum_{j=2}^r \frac{\gamma_{vj} x}{a_1 + K_v x}$, donde $\gamma_{vj} = \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}$.

La función $g_v(\delta_v(z))$ es cóncava (lema 1.21) y como $\gamma_{vj} > 0$ y $K_v > \sum_{j=2}^r \gamma_{vj}$ se tiene que h_v es estrictamente decreciente y convexa (lema 1.53). Por lo tanto,

$h_v(g_v(\delta_v(z)))$ es estrictamente convexa (lema 1.22). En consecuencia, sin más que aplicar el lema 1.20 se tiene que la función $W_1(z)$ es convexa en el intervalo $0 \leq z \leq l$, con l la longitud de la arista $[s, t]$. Por lo tanto se tiene que el $\max_z W_1(z) = \max\{W_1(0), W_1(l)\}$. Esto significa que el centro de servicio x_1^* puede moverse a uno de los vértices sin que con ello se reduzca el valor de $W(Y_r^*|X_p)$.

Si este proceso se realiza con todas aquellas localizaciones no nodales de Y_r^* se concluye que existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que

$$W(V_r|X_p) = W(Y_r^*|X_p)$$

y por lo tanto, V_r sería una solución del problema. ■

Corolario 1.55 *Si f_v es una función de variable real creciente y cóncava tal que $f_v(0) > 1$, $\forall v \in V$, entonces el $(r|X_p)$ -medianoide en redes para servicios no esenciales y preferencias proporcionales tiene solución nodal en $N(V, A)$.*

Dem. Resulta de tomar $a_j = 1$, $\forall j = 1, 2, \dots, p+r$ en el teorema anterior. ■

Proposición 1.56 *Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 1$, $\forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias proporcionales es submodular.*

Dem. Para cualquier conjunto $Y \subseteq V$, la función objetivo está definida como

$$W(Y) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{\sum_{y \in Y} \frac{1}{f_{vy}-1}}{1 + \sum_{y \in Y} \frac{1}{f_{vy}-1} + \sum_{x \in X_p} \frac{1}{f_{vx}-1}}.$$

Sean $S \subset T \subset V$ y $v_k \in V - T$. Entonces,

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) = \sum_{v \in V} w(v) \left[\frac{K_v^T + \frac{1}{f_{vv_k}-1}}{K_v^T + \frac{1}{f_{vv_k}-1} + K_v^{X_p}} - \frac{K_v^T}{K_v^T + K_v^{X_p}} \right],$$

$$W(S \cup \{v_k\}) - W(S) = \sum_{v \in V} w(v) \left[\frac{K_v^S + \frac{1}{f_{vv_k}-1}}{K_v^S + \frac{1}{f_{vv_k}-1} + K_v^{X_p}} - \frac{K_v^S}{K_v^S + K_v^{X_p}} \right],$$

donde $K_v^X = \sum_{x \in X} \frac{1}{f_{vx}-1}$, $\forall X \subset V$.

Sea la función $g(x) = \frac{x+\alpha}{x+\alpha+\beta} - \frac{x}{x+\beta}$, con $\alpha, \beta > 0$. Esta función es estrictamente decreciente para $x \geq 0$. Por lo tanto, si $S \subsetneq T$ se tiene que $K_v^S < K_v^T$, $\forall v \in V$, y en consecuencia $g(K_v^S) > g(K_v^T)$, $\forall v \in V$. De donde

$$W(T \cup \{v_k\}) - W(T) < W(S \cup \{v_k\}) - W(S). \blacksquare$$

Proposición 1.57 Si f_v es una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 1$, $\forall v \in V$, entonces la función objetivo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias proporcionales es creciente.

Dem. Sea $S \subsetneq T \subset V$, y $K_v^X = \sum_{x \in X} \frac{1}{f_{vx}-1}$, $\forall X \subset V$, entonces

$$W(S) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{K_v^S}{1 + K_v^S + K_v^{X_p}},$$

$$W(T) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{K_v^T}{1 + K_v^T + K_v^{X_p}},$$

y $K_v^T = K_v^S + K_v^{T-S}$.

Cuando $x, \alpha > 0$, la función $g(x) = \frac{x}{x+\alpha}$ es estrictamente creciente y por lo tanto, si $S \subsetneq T$ resulta que $W(S) < W(T)$. ■

Corolario 1.58 Sea f_v una función de variable real creciente tal que $f_v(0) > 1$, $\forall v \in V$. Si W^* es el valor óptimo del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias proporcionales y W_G es el valor de la función objetivo para la solución greedy, entonces

$$\frac{W_G}{W^*} \geq 1 - \left(\frac{r-1}{r} \right)^r.$$

Dem. Como consecuencia inmediata del teorema 1.32. ■

1.3 El $(r|X_p)$ -medianoide discreto

Bajo ciertas condiciones para las funciones f_v , tal y como se señaló en los epígrafes anteriores, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes puede formularse como un problema de localización discreto, donde el conjunto de posibles ubicaciones para los nuevos centros de servicio es finito. Por otro lado, en gran parte de los problemas reales son discretos ya que se considera un conjunto finito de puntos donde establecer estos nuevos centros.

En esta sección se formula un programa matemático para resolver el problema discreto del $(r|X_p)$ -medianoide asociado a cada uno de los escenarios descritos en la sección anterior.

Para simplificar la notación se utilizará i para denotar al vértice $v_i \in V$, siendo w_i su poder de compra. El conjunto finito de posibles ubicaciones en la red para los nuevos centros de servicio se denota J , utilizándose el subíndice j para representar una posible localización perteneciente a J .

El problema general a resolver es,

$$\begin{aligned} \max_{Y \subseteq V} W(Y|X_p) \\ \text{s.a. } |Y| = r \end{aligned}$$

donde la función $W(Y|X_p)$ representa la demanda captada por la firma F_Y con centros de servicio en Y , dadas las localizaciones X_p de los centros de la firma que ya opera en el mercado.

1.3.1 Preferencias binarias y servicios esenciales

En este caso, la cuota de mercado captada por un conjunto Y viene dada por

$$W(Y|X_p) = \sum_{i \in V(Y|X_p)} w_i,$$

donde $V(Y|X_p) = \{i \in V : D(i, Y) < D(i, X_p)\}$.

Como ya se indicó en la sección 1.2.1, se puede obtener una solución para el $(r|X_p)$ -medianoide en redes si se resuelve el problema discreto cuando $J = C$, siendo el conjunto C el propuesto en dicha sección.

Para plantear el problema se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned} y_j &= \begin{cases} 1 & \text{si se establece un centro de servicio en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ x_i &= \begin{cases} 1 & \text{si existe } j \in N_i \cap Y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

donde $N_i = \{j \in J : d(i, j) < D(i, X_p)\}$.

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide en este caso puede ser formulado como el siguiente programa lineal entero que sigue la línea del problema de cubrimiento máximo de Church y ReVelle (1974):

$$\begin{aligned} \max \sum_{i \in V} w_i x_i \\ \text{s.a} \\ \sum_{j \in J} y_j = r \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$x_i \leq \sum_{j \in N_i} y_j \quad \forall i \in V \quad (1.2)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in N_i \quad (1.3)$$

La restricción (1.1) impone que el número de nuevos centros de servicio sea r . El grupo de restricciones (1.2) obliga a que la demanda de un vértice i sólo pueda ser

asignada a la empresa entrante si uno de los nuevos centros de servicio está más próximo a ese vértice que el más cercano de la empresa rival. Por último, en (1.3) se impone que las variables sean binarias.

1.3.2 Preferencias binarias y servicios no esenciales

En este caso se puede obtener una ε -solución para el problema en redes, haciendo $J = C$, donde C es un conjunto formado por los vértices y puntos próximos a los isodistantes (sección 1.2.2).

Se introducen las variables

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se establece un centro de servicio en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es captado por } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por simplicidad en la notación, se define $f_{ij} = f_i(d(i, j))$. En este caso, el problema a resolver sería el siguiente programa lineal entero:

$$\max \sum_{i \in V} \sum_{j \in N_i} \frac{w_i}{f_{ij}} x_{ij}$$

s.a

$$\sum_{j \in J} y_j = r$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in V, \forall j \in N_i \quad (1.4)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in V \quad (1.5)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in N_i \quad (1.6)$$

En (1.4) se impone que sólo se pueda asignar demanda del nodo i a j si se localiza un centro de servicio en j , con $j \in N_i$. Con (1.5) se obliga a que el nodo i sólo sea servido por un único centro de servicio de entre los nuevos que se encuentran más próximos que los de X_p . Obsérvese que la restricciones son con menor o igual que 1 ya que, si no existen ningún centro de Y_r más próximo que los de X_p , este sumatorio sería nulo. Por último, en (1.6) se impone que las variables de localización y asignación sean binarias.

1.3.3 Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales

En este caso, para obtener una solución para el $(r|X_p)$ -medianoide en redes basta con tomar $J = V$ (teorema 1.39). Para plantear el problema se definen las

siguientes variables

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se establece un centro de servicio en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es captado por } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema del $(\tau|X_p)$ -medianoide discreto puede ser resuelto mediante el siguiente programa lineal entero:

$$\max \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} w_i \frac{f_i(D(i, X_p))}{f_i(D(i, X_p)) + f_{ij}} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j \in J} y_j = \tau$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in V, j \in J \quad (1.7)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (1.8)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, j \in J$$

Obsérvese que la formulación es muy parecida a la del caso binario-no esencial, salvo en dos puntos. Por un lado, en las restricciones (1.7) no se impone que el nuevo centro de servicio al que se asigna parte de la demanda se encuentre más próximo que los de X_p , ya que se asignará simplemente al más próximo de Y_r . Por otro lado, las restricciones (1.8) se dan con igualdad ya que la demanda de cada nodo tiene que ser repartida entre los centros de servicio más próximos de las dos empresas.

1.3.4 Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales

El programa lineal correspondiente a preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales tan sólo se diferencia del formulado para servicios esenciales en la función objetivo. Utilizando las mismas variables $y_j, x_{ij}, i \in V, j \in J$, que en la

sección 1.3.3, resulta,

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} w_i \frac{f_i(D(i, X_p)) - 1}{f_i(D(i, X_p)) f_{ij} - 1} x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J} y_j = r \\ & x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in V, j \in J \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, j \in J \end{aligned}$$

Tomando $J = V$, la solución de este programa también sería una solución del problema en redes (teorema 1.43).

1.3.5 Preferencias proporcionales y servicios esenciales

Se introducen las variables

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se establece un centro de servicio en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En este caso, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto puede formularse como el siguiente programa no lineal entero:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in J} w_i \frac{\sum_{j \in V} \frac{1}{f_{ij}} y_j}{\sum_{j \in V} \frac{1}{f_{ij}} y_j + \sum_{j \in X_p} \frac{1}{f_{ij}}} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J} y_j = r \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Una vez decididas las localizaciones para los nuevos centros de servicio, tan sólo resta repartir proporcionalmente la demanda entre todos los centros de servicio que compiten en el mercado.

Tomando $J = V$, la solución de este programa también sería una solución del $(r|X_p)$ -medianoide proporcional-esencial en redes (teorema 1.47).

1.3.6 Preferencias proporcionales y servicios no esenciales

Utilizando las variables y_j , $j \in J$, introducidas en 1.3.5, el programa no lineal entero se formula como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} w_i \frac{\sum_{j \in V} \frac{1}{r_{ij}-1} y_j}{1 + \sum_{j \in V} \frac{1}{r_{ij}-1} y_j + \sum_{j \in X_p} \frac{1}{r_{ij}-1}} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J} y_j = r \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Tomando $J = V$, la solución de este programa también sería una solución del $(r|X_p)$ -medianoide proporcional-no esencial en redes (corolario 1.55).

1.3.7 Algunas variantes del $(r|X_p)$ -medianoide discreto

Entre las distintas formulaciones del $(r|X_p)$ -medianoide discreto se encuentra el problema de máxima captura (MAXCAP) (ReVelle, 1986). Este modelo ha sido planteado para la localización de cierto tipo de establecimientos que han de verificar los siguientes supuestos:

- No existe diferenciación, ni entre los productos ofertados, ni entre los establecimientos que los ofertan.
- Las asignaciones se basan en el criterio del más próximo, y en caso de empate, la demanda se reparte en partes iguales entre los centros de servicio implicados. Al no existir diferenciación en el mercado, se considera un comportamiento razonable del consumidor asumiendo que su objetivo es desplazarse lo mínimo posible.
- La demanda es totalmente inelástica, siendo el precio del producto el mismo en todos los establecimientos. Se trata por tanto, de servicios esenciales del tipo de farmacias, tiendas de conveniencia o sucursales de banco.
- Los costes unitarios son los mismos para todos los centros de servicio.

El objetivo de la empresa entrante es maximizar la cuota de mercado captada, que bajo estos supuestos, equivale a maximizar los beneficios. Este modelo se formula como el siguiente programa lineal entero, basado en el problema de

localización con cobramiento máximo de Church y ReVelle (1974),

$$\max Z^A = \sum_{i \in V} w_i x_i + \sum_{i \in V} \frac{w_i}{2} z_i$$

s.a

$$x_i \leq \sum_{j \in N_i} y_j \quad \forall i \in V \quad (1.9)$$

$$z_i \leq \sum_{j \in O_i} y_j \quad \forall i \in V \quad (1.10)$$

$$x_i + z_i \leq 1 \quad \forall i \in V \quad (1.11)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = r \quad (1.12)$$

$$x_i, y_j, z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, j \in J$$

Este caso sería una variación del $(\tau|X_p)$ -medianoide binario-esencial donde $J \subseteq V$.

Se definen los siguientes conjuntos:

$$N_i = \{j \in J : d(i, j) < d(i, X_p)\},$$

$$O_i = \{j \in J : d(i, j) = d(i, X_p)\}.$$

Las variables se definen de la siguiente forma:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la firma entrante capta toda la demanda del nodo } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda del nodo } i \text{ es repartida entre las dos firmas} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si la firma entrante localiza un centro de servicio en } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El conjunto de restricciones (1.9) impone que la firma entrante no puede captar la demanda de un nodo si no establece algún centro de servicio que se encuentre más próximo que el más cercano de la empresa competidora. En las restricciones (1.10) se plantea la misma idea para el caso en el que se tuviera que repartir la demanda. En (1.11) se impone que la demanda de un nodo sólo puede estar asignada de una de las siguientes formas: toda a la firma entrante ($x_i = 1, z_i = 0$), la mitad a cada una de las firmas, ($x_i = 0, z_i = 1$), o bien toda a la firma existente ($x_i = 0, z_i = 0$). Por último, en la restricción (1.12) se impone el número de nuevos centros de servicio que implantará la firma entrante.

Este programa es resuelto mediante un procedimiento de ramificación acotación que obtiene fácilmente la solución de problemas con un tamaño en torno a los 500 nodos. Para problemas de tamaño muy grande propone un heurístico basado en la técnica de intercambio (Teitz y Bart, 1968).

ReVelle y Serra (1991) y Serra, Marianov y ReVelle (1992) plantean el modelo MAXRELOC, en el que la empresa entrante ya está establecida en el mercado y

quiere ampliar el número de establecimientos, pudiendo incluso relocalizar alguno de los que ya posee.

Por otro lado, Serra et al (1992) plantean un modelo jerárquico. Cada firma posee establecimientos de varios niveles que se encuentran anidados, de forma que los servicios ofertados por un establecimiento de un determinado nivel, también lo son por los de mayor nivel en la jerarquía. El área de influencia de cada centro depende de su nivel, siendo mayor cuanto más elevada sea su posición en la jerarquía. Un centro de nivel superior puede captar la demanda de un nodo, aunque éste esté más próximo de un centro de nivel inferior de la firma rival, si las áreas de influencia así lo permitieran. El problema es básicamente un medianoide en el que la firma entrante ha de localizar r_k centros de servicio para cada uno de los k niveles. En este caso, el objetivo es maximizar las capturas totales ponderadas por la rentabilidad que se obtiene en cada nivel. Para resolverlo, los autores utilizan una reformulación del MAXRELOC.

Serra y ReVelle (1995) añaden incertidumbre al modelo anterior. Consideran que la distribución de la demanda y de la competencia puede no permanecer constante por lo que plantea varios escenarios. El objetivo es maximizar los beneficios de la empresa entrante teniendo en cuenta estos posibles escenarios. Para ello utiliza dos criterios: criterio "maximin", maximizar la captura del peor escenario; y criterio "regret" (minimizar la peor desviación de la captura máxima que se podría obtener en un escenario determinado). Para resolverlo, debido al gran esfuerzo computacional que requiere el modelo planteado, los autores proponen un heurístico de intercambio.

En un reciente trabajo, Serra, ReVelle y Rosing (1999) plantean el problema del medianoide desde una perspectiva distinta. Ellos suponen que cualquier centro de servicio que opere en el mercado necesita de una cuota de mercado mínima para subsistir. Así, la firma entrante desea saber donde localizar los nuevos centros de servicio de forma que se maximice su cuota de mercado, teniendo en cuenta que cada nuevo centro de servicio ha de tener garantizada la captación de una cantidad mínima de demanda. Por otro lado, también tienen en cuenta el hecho de que la entrada de estos nuevos centros de servicio puede provocar una reducción en la cuota de mercado de los centros ya establecidos, de tal forma que alguno de ellos no pudiera subsistir. En este trabajo se formula el problema como un programa entero que para el caso de redes pequeñas puede ser resuelto utilizando programación lineal y ramificación y acotación. Esta formulación plantea varios problemas. Uno de ellos es que no tiene en cuenta el caso de que alguno de los centros de servicio existente tuviera que salir del mercado por no cubrir su umbral mínimo de demanda. Esta salida llevaría asociada una reasignación de la demanda que no es contemplada en el programa entero. Los autores proponen un algoritmo heurístico de concentración basado en procedimientos de intercambio para resolver ese problema.

Los modelos anteriores se plantean como programas lineales enteros. Este tipo de problema, cuando el número de variables que intervienen es elevado

necesita de un esfuerzo computacional muy fuerte que impone la utilización de algoritmos heurísticos para su resolución. Mientras que en los casos anteriores, se ha utilizado heurísticos de intercambio, otros autores (Benati y Laporte, 1994) han implementado un heurístico basado en la búsqueda tabú (Glover, 1993) para obtener la resolución del $(r|X_p)$ -medianoide.

En un reciente trabajo, Serra y Colomé (2001) han llevado a cabo un estudio sobre el efecto que puede tener la forma de reflejar la distancia entre usuarios y centros de servicio a la hora de modelar un problema de localización competitiva. Estos autores plantean cuatro modelos en los que se consideran distintas estrategias de asignación de la demanda en función de la distancia: asignación binaria (MAXCAP), asignaciones proporcionales, tomando en un caso f_v lineal y en otro cuadrática, y asignaciones parcialmente binarias.

Para resolver estos problemas emplean un procedimiento metaheurístico en el que se combina el GRASP (Feo y Resende, 1989) con la búsqueda tabú. Los autores concluyen que este procedimiento se hace computacionalmente rentable cuando aumenta tanto el número de nodos de la red como los centros de servicio a establecer.

Una vez resuelto el problema, en el trabajo se comparan las soluciones de los distintos modelos y se calculan las desviaciones resultantes de utilizar la solución obtenida para un modelo en otro distinto. Así, se llega a la conclusión de que el empleo de las soluciones obtenidas por cualquier modelo de asignaciones proporcionales como solución del MAXCAP produce desviaciones significativamente distintas de cero. Sin embargo, si se utiliza la solución del MAXCAP como posible solución de los otros tres modelos, las desviaciones son menores. Los autores advierten que se hace necesario un estudio del comportamiento de los usuarios para poder determinar el procedimiento a utilizar. En el caso de que no se pudiera hacer este estudio, recomiendan la utilización del MAXCAP por ser la solución que más se parecería al resto. Por último, se manifiesta una mínima desviación entre las soluciones obtenidas en los dos modelos de asignación proporcional estudiados, por lo que los autores concluyen que el efecto de la ponderación de la distancia en estos casos es reducido.

1.4 Conclusiones

En este primer capítulo de la memoria se introduce el problema del $(r|X_p)$ -medianoide. Este modelo ha sido planteado en varios escenarios en los que se combinan los criterios de asignación de la demanda (preferencias binarias, parcialmente binarias y proporcionales) con el tipo de servicio prestado a los usuarios (servicio esencial y no esencial).

Seguidamente se hace un repaso de los resultados conocidos más importantes existentes sobre el $(r|X_p)$ -medianoide en los diferentes escenarios “preferencia-servicio” estudiados. Uno de los aspectos analizados es la existencia de solución

nodal para estos problemas en redes. Así, se muestra que en el caso binario (esencial y no esencial) no existe solución nodal de forma general, mientras que bajo ciertas condiciones, para los casos parcialmente binario y proporcional, también en sus dos versiones, sí que se puede asegurar la existencia de solución nodal. Aunque la mayoría de estos resultados se deben al trabajo de Hakimi (1990), presentamos una extensión sobre la optimalidad nodal para servicios no esenciales y preferencias proporcionales.

A pesar de que cuando las preferencias son binarias no tiene que existir solución nodal, el problema en redes puede ser discretizado. Así en el caso esencial, se puede obtener una solución del problema eligiendo las localizaciones entre los puntos de un conjunto finito C . Este conjunto se formaría eligiendo un punto en cada uno de los segmentos (s, t) , donde s y t son vértices o puntos isodistantes pertenecientes a una misma arista, de tal forma que no existe ningún otro punto isodistante entre s y t . La elección de este conjunto no es única, pero en cualquier caso, el número de candidatos es menor o igual que $2|V||A| + |A|$.

En el caso binario-no esencial se demuestra que puede obtenerse una ε -solución para este problema donde las localizaciones son vértices o puntos muy próximos a los puntos isodistantes. En este caso, el número máximo de candidatos posibles para localizar un centro de servicio es $2|V||A| + |V|$.

El número de candidatos para localizar un nuevo centro de servicio en el caso binario esencial y no esencial puede ser reducido aunque nuestro objetivo se centra en la posibilidad de discretizar el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes.

También, siguiendo la iniciativa de Benati y Laporte (1994) para el caso binario-esencial, se demuestra la propiedad submodular de la función objetivo para todos los casos estudiados. Con ello, y utilizando el crecimiento de estas funciones, se puede concluir que el algoritmo greedy de búsqueda combinatoria se comporta razonablemente bien, pudiendo acotar su error en función del número de nuevos centros de servicio. De hecho, en los problemas en los que se pretende localizar dos nuevos centros de servicio, el valor de la función objetivo para la solución greedy es al menos un 75 % del valor óptimo del problema. En el caso de tres nuevos centros de servicio, este porcentaje se reduce a un 70.37 %.

La posibilidad de que el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes pueda ser discretizado, permite encontrar una solución de dicho resolviendo un problema discreto. Por ello, en la última sección del capítulo, se presenta una formulación de estos problemas como programas enteros.

Capítulo 2

El $(r|X_p)$ -medianoide incorporando criterios de atracción

2.1 Introducción

En gran parte de los modelos de localización se asume que el consumidor elige un centro de servicio atendiendo únicamente a la distancia que lo separa de éste. Sin embargo, en muchas ocasiones el consumidor hace su elección considerando, además de la distancia, otros aspectos relacionados con las características de cada centro de servicio tales como, la disponibilidad de aparcamiento o la variedad de marcas.

Con el objeto de estudiar estas situaciones surgen ciertos trabajos en localización competitiva en los que cada centro de servicio está caracterizado por su nivel de atractivo o de calidad. La demanda de un nodo que es captada por un centro de servicio depende de la atracción que ejerce este centro sobre el nodo. Dicha atracción viene medida por una función que relaciona las características del centro con la distancia entre el cliente y el centro de servicio.

En la mayoría de los modelos de localización competitiva se considera que los centros de servicio poseen las mismas características. La literatura consultada que aborda el problema del $(r|X_p)$ -medianoide considerando aspectos de calidad (atractivo) es reducida y se centra exclusivamente en servicios esenciales. En este capítulo se estudia el problema del $(r|X_p)$ -medianoide incorporando criterios de calidad o atracción, añadiendo a algunos resultados conocidos, otros que creemos nuevos.

2.2 Antecedentes

2.2.1 Preferencias binarias y servicios esenciales

En los problemas revisados en esta sección la demanda de un nodo es asignada a aquel centro de servicio por el que se siente más atraído. En este sentido cabe reseñar los trabajos de Eiselt y Laporte (1988a,1988b) y Eiselt, Laporte y Pederzoli (1989). Estos autores consideran un mercado lineal, a lo largo del cual los clientes se encuentran distribuidos uniformemente. Estudian las cuotas de mercado de los distintos centros de servicio teniendo en cuenta que cada uno tiene un peso (atractivo) asociado, no necesariamente igual para todos. La atracción ejercida por un centro de servicio sobre los clientes es directamente proporcional a su peso e inversamente proporcional a la distancia que los separa, es decir, utilizan como función de atracción

$$\phi(i, x) = \frac{w_x}{d_{ix}},$$

donde w_x es el peso del centro de servicio localizado en x y d_{ix} es la distancia entre el cliente en i y el centro de servicio en x .

El problema a resolver es un $(r|X_p)$ -medianoide, evaluándose las cuotas de mercado captadas por las empresas a través de los conjuntos de Voronoi. Si P es un centro de servicio, se llama conjunto de Voronoi asociado a P , $V(P)$, al conjunto de puntos que son más próximos a P , según alguna métrica, que al resto de los centros de servicio. En este caso, $V(P)$ estará formado por los nodos de demanda que se encuentran más atraídos por P que por el resto de los centros de servicio. Por lo tanto, en estas condiciones se puede asociar la cuota de mercado captada por el punto P a su correspondiente conjunto de Voronoi, $V(P)$.

En Eiselt y Laporte (1988a) se plantea el problema de calcular las cuotas de mercado dadas las localizaciones y los atractivos. Para su resolución proponen un algoritmo de orden $O(n^2)$. Además, se hace un análisis de sensibilidad sobre el efecto que tienen sobre las cuotas de mercado las variaciones en los niveles de atractivo. La conclusión a la que llegan es que un aumento en el nivel de atractivo de un centro produce una ampliación de la cuota de mercado en los límites.

Posteriormente, en Eiselt y Laporte (1988b) se resuelve el problema de un $(1|X_p)$ -medianoide, mediante un algoritmo de orden $O(n^2)$. La decisión es exclusivamente en localización ya que los niveles de atractivos vienen dados.

Por último, en Eiselt, Laporte y Pederzoli (1989), se obtienen los niveles de atractivo óptimos que maximizan la cuota de mercado dadas las localizaciones de los centros de servicio. Plantean un juego no cooperativo donde cada uno de los jugadores deciden sus niveles de atractivo, conocidos los niveles del rival, y muestran, a través de ejemplos, que el juego converge rápidamente a un equilibrio.

En Drezner (1994a) se estudia el problema del $(1|X_p)$ -medianoide en el plano considerando que la demanda se encuentra discretizada en un número finito de

puntos. Los centros de servicio están caracterizados por una serie de atributos, en función de los cuales los usuarios perciben una utilidad. Para determinarla emplea una función aditiva, de forma que la utilidad apreciada por los usuarios del nodo de demanda i con respecto a un centro de servicio localizado en x es

$$U_{ix} = F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k,$$

donde los x_k son los atributos del centro y α_k sus ponderaciones correspondientes (supone que x_1 es la distancia del punto x al nodo i). Los niveles de los atributos, excepto la distancia, son fijos y no necesariamente iguales para todas las localizaciones. El autor propone un algoritmo sencillo para hallar la localización que maximice la cuota de mercado del nuevo centro de servicio.

Aunque el algoritmo no hace más que hallar la localización óptima dados los niveles del resto de los atributos, sugiere la posibilidad de realizar simulaciones para llevar a cabo un análisis de sensibilidad sobre los elementos que determinan el modelo. Así, se podría estudiar como puede variar la localización o la cuota de mercado cuando se producen variaciones en las condiciones del problema (posición y número de las localizaciones existentes, variación en los niveles de atractivo, entrada de un nuevo competidor, etc.).

En el trabajo de Plastria (1997) se consideran decisiones continuas en localización y nivel de atractivo. El autor plantea el problema del $(1|X_p)$ -medianoide en el plano, considerando que la demanda se encuentra discretizada en un conjunto finito de puntos. Se persigue maximizar los beneficios ya que considera costes crecientes para los niveles de atractivo. La atracción experimentada por los usuarios del nodo de demanda i hacia un centro de servicio localizado en x viene dada por

$$\phi(i, x) = \frac{w_x}{(d_{ix})^k},$$

donde w_x es el nivel de atractivo y d_{ix} es la distancia que los separa. El parámetro k es un valor positivo fijo, siendo los más utilizados $k = 2$ (modelo gravitacional puro) y $k = 1$, empleado, por ejemplo, en los trabajos de Eiselt, Laporte y Pederzoli, expuestos anteriormente. En este modelo se supone que cuando las localizaciones del nodo de demanda y del centro de servicio coinciden, esto es, $d_{ix} = 0$, la demanda de i es totalmente asignada a ese centro de servicio. En el caso de que un nodo se encuentre igualmente atraído por el nuevo centro de servicio y alguno de los ya establecido, para evitar problemas en la resolución, su demanda es asignada al nuevo centro de servicio.

Para resolver el problema plantean un modelo biobjetivo, en el que, por un lado se minimiza el atractivo del centro, y por otro, se maximiza su captura dado ese atractivo. Demuestra que este problema tiene un conjunto finito de candidatos a formar parte de las soluciones eficientes y que cualquier solución dominada lo es

por una solución eficiente. Por lo tanto, bastaría obtener las soluciones eficientes y elegir entre ellas la que maximice los beneficios. Siguiendo esta estrategia, para el caso en el que la región del plano donde puede ser localizado el nuevo centro de servicio es un polígono conexo, plantean un algoritmo $O(n^3 \log n)$. Si la región factible es tan sólo cerrada y acotada, la complejidad es más elevada.

2.2.2 Preferencias proporcionales y servicios esenciales

En este caso, la demanda de cada nodo es repartida de forma proporcional entre los distintos centros de servicio que operan en el mercado en función de la atracción que le proporciona cada uno de ellos.

Siguiendo la línea gravitacionista, el modelo de Huff (Huff, 1964,1966) propone que la probabilidad de que un individuo elija un centro de servicio es igual a la ratio entre la utilidad de ese centro y la suma de las utilidades de todos los centros de servicio del mercado. En particular, Huff (1964, 1966) propone una función de utilidad basada en el tamaño del centro de servicio y la distancia que lo separa del nodo de demanda, esto es

$$P_{ij} = \frac{\frac{S_j}{(d_{ij})^\beta}}{\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{(d_{ik})^\beta}},$$

siendo P_{ij} la probabilidad de que los usuarios del nodo i acudan al centro de servicio j , S_j la superficie de ese centro de servicio, d_{ij} la distancia que separa el nodo i del centro de servicio j , β un parámetro estimado empíricamente que refleja el efecto de la distancia, o del tiempo de desplazamiento, sobre la probabilidad de comprar en un centro de servicio determinado, y n , el número total de establecimientos en el mercado.

Partiendo del modelo de Huff, Nakanishi y Cooper (1974) proponen el modelo de interacción competitiva multiplicativa (Multiplicative Competitive Interaction model (MCI)). En este modelo se propone una función de utilidad multiplicativa en la que se consideran los diferentes atributos que caracterizan a cada uno de los centros de servicio. Así, la probabilidad de que un individuo localizado en i elija el centro de servicio establecido en j viene determinada por

$$P_{ij} = \frac{\prod_{k=1}^q x_{kij}^{\beta_k}}{\sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^q x_{kij}^{\beta_k}},$$

donde x_{kij} representa el valor del atributo k -ésimo que describe el centro de servicio j para los individuos localizados en i , y β_k es el parámetro que determina la sensibilidad de P_{ij} con respecto al atributo k .

El problema de este método estriba de la complejidad que supone la estimación de los parámetros. En este trabajo, los autores proponen una estimación por mínimos cuadrados para los parámetros β_k . Posteriormente, Nakanishi y Cooper (1982), obtienen una estimación de las probabilidades P_{ij} .

El MCI ha sido utilizado en gran cantidad de trabajos, principalmente en el campo de la localización de comercios minoristas. A continuación se analizan algunos de estos trabajos en los que existen varias características comunes como puede ser, la utilización de las estimaciones dadas por Nakanishi y Cooper y el empleo de algoritmos heurísticos de intercambio (Teitz y Bart, 1968) para resolver el problema de localización. Generalmente, el conjunto de atributos que caracterizan a los establecimientos se dividen en dos grupos. Por un lado están los relacionados con las características propias del centro, como pueden ser el tamaño, la atención al público, el número de cajas, etc. En un segundo grupo se encuentran aquellos atributos relacionados con la localización, tales como la distancia a los clientes, a centros competidores, etc. En la mayoría de los casos, salvo en el trabajo de Achabal, Gorr y Mahajan (1982), sólo se toman decisiones ligadas a la localización, considerándose constantes los valores del resto de los atributos. Además, tanto las localizaciones como los niveles de atractivos, son elegidos en un conjunto discreto de posibilidades.

Partiendo del MCI, Achabal, Gorr y Mahajan (1982), desarrollan el modelo de localización múltiple de tiendas (Multiple Store Location model (MULTILOC)). Mientras la mayoría de los trabajos anteriores se plantean la localización de un único establecimiento, en este caso se resuelve un problema de localización múltiple.

Los individuos de cada uno de los nodos de demanda distribuyen sus compras entre los servicios atendiendo a la atracción ejercida por cada uno de ellos. El reparto de la demanda se hace según la siguiente proporción

$$P_{ij} = \frac{\prod_{k=1}^q A_{ijk}^{\beta_k}}{\sum_{j=1}^{p+r} \prod_{k=1}^q A_{ijk}^{\beta_k}},$$

donde $j = 1, \dots, p$, hace referencia a las localizaciones de la empresa establecida en el mercado y $j = p + 1, \dots, p + r$, a las de la empresa entrante. A_{ijk} es la atracción experimentada por los individuos del nodo de demanda i hacia el centro de servicio j respecto del atributo k ($k = 1, \dots, q$). Los β_k son los pesos asignados a cada uno de los atributos, estimados generalmente, a partir de datos históricos del mercado.

El objetivo será la elección de las r localizaciones de los nuevos centros de servicio, entre un conjunto finito de posibilidades, y sus niveles de atributos correspondientes, también de entre un conjunto finito, de forma que se maximicen los beneficios de la empresa entrante. Para ello, el MULTILOC se plantea como un programa entero donde se pretende maximizar los beneficios esperados, teniendo en cuenta los costes asociados a los atributos que caracterizan a los nuevos centros.

Este programa requiere de un gran esfuerzo computacional cuando el número de variables es elevado ya que la función objetivo no es lineal ni cóncava. Además, la resolución exhaustiva del problema requiere un gasto computacional muy alto ya que el número de posibles escenarios para cada nuevo centro, cuando varían los niveles de atributos, es muy elevado. Para la resolución del problema, los autores proponen un procedimiento heurístico de intercambio.

El trabajo de Ghosh y McLafferty (1982) también se desarrolla partiendo del MCI. Su aportación más importante es la incorporación de incertidumbre en el modelo. Como apuntan los autores, la situación del mercado en muy raras ocasiones es estática ya que pueden darse cambios en la distribución de la demanda o de la competencia. De ahí que una decisión tomada a partir de la situación actual no ha de ser necesariamente la más idónea en el futuro. Como no se sabe de antemano los posibles cambios, lo más adecuado parece ser plantear posibles escenarios y decidir en función de éstos. Para resolver el problema de localización, dados los valores de los atributos y las ponderaciones de cada escenario, plantean un algoritmo de intercambio.

También utilizando el MCI, Kaufmann y Rangan (1990) abordan el problema del $(1|X_p)$ -medianoide desde el punto de vista de las franquicias. En este caso, la empresa entrante ya dispone de establecimientos que operan en el mercado. El objetivo es maximizar la cuota de mercado total de la firma, reduciendo el canibalismo, es decir, se busca que la pérdida de cuota de mercado de los centros ya establecidos pertenecientes a la firma entrante en manos del nuevo centro sea mínima. En este caso se considera que los atractivos para los centros de una misma firma son iguales.

Para calcular la probabilidad de que los consumidores de un nodo acudan a un establecimiento, los autores tienen en cuenta tanto la probabilidad de que el viaje haya sido exclusivamente con ese objetivo, o bien, que se haya acudido al establecimiento aprovechando un viaje con otro destino. La probabilidad de que los consumidores de un nodo de demanda acudan a un centro de servicio es la suma ponderada de las probabilidades de los dos tipos de viajes.

En un trabajo reciente de Colomé y Serra (2000) se realiza un estudio, utilizando una versión del MAXCAP en la que se hace un reparto de las asignaciones siguiendo el método MCI, para resolver un problema de localización de supermercados. Para ello toman dos escenarios distintos, uno en España (Barcelona) y otro en Gran Bretaña (Milton Keynes). A través de encuestas se estiman los atributos que caracterizan a los supermercados y que determinan la elección de los consumidores.

Varios autores han estudiado el problema del $(1|X_p)$ -medianoide en el plano considerando la influencia del atractivo en el proceso de decisión. En todos estos casos los servicios estudiados son esenciales y la demanda se encuentra discretizada en un número finito de puntos. Además, los niveles de atractivo para cada uno de los centros de servicio son constantes.

En Drezner (1994b) se considera que la cantidad de demanda de un nodo que es captada por un centro de servicio es inversamente proporcional a la distancia que

los separa y directamente proporcional al nivel de atractivo del centro de servicio. Bajo estas condiciones, se halla la localización que maximiza la cuota de mercado captada por la firma entrante y se señalan algunas de sus propiedades.

En este trabajo, también se estudia el escenario en el que la firma que establece el nuevo centro de servicio ya estaba implantada en el mercado. El objetivo de la empresa es maximizar la cuota de mercado captada por la totalidad de sus centros de servicio, minimizando el canibalismo entre los centros de la misma firma.

El problema de maximizar la cuota de mercado del centro de servicio entrante resulta ser un programa no lineal que resuelve utilizando un algoritmo basado en el gradiente. La función objetivo es multiextremo y por lo tanto, este procedimiento no asegura que el óptimo obtenido sea global. Por ello, el autor propone repetir el procedimiento varias veces partiendo de soluciones iniciales distintas. Asegura que si se repite el proceso un número suficiente de veces y se elige la mejor opción de entre los óptimos locales alcanzados, es muy probable obtener el óptimo global.

Como conclusión indica que, tanto la cuota de mercado captada por el nuevo centro de servicio, como su localización, dependen del nivel de atractivo que se le asocia. Por otro lado, estos parámetros también varían si el nuevo centro es único para la firma o pertenece a una cadena de centros de servicio ya establecidos.

El problema anterior es extendido por Drezner, Drezner y Salhi (2001) al caso en el que la empresa entrante pretende establecer varios centros de servicio. Para resolver el problema, se aplica una variante del algoritmo empleado en el trabajo descrito anteriormente. Dado que la función objetivo no es cóncava, los autores resuelven el problema partiendo de distintas soluciones iniciales.

Con el fin de incorporar funciones de utilidad diferentes para clientes situados en el mismo nodo, Drezner y Drezner (1996) proponen la función de utilidad

$$U(Q, d) = \sum_{i=1}^M w_i Q_i - d$$

donde Q_i y w_i son el nivel y el peso del i -ésimo atributo, respectivamente, y d es la distancia. El valor de w_i es constante mientras que tanto los atributos como la distancia siguen una distribución normal, por lo que, en definitiva, la función de utilidad también se distribuye según una normal.

Estos autores plantean que la proporción de demanda de un nodo captada por un punto puede ser aproximada por una función exponencial de la distancia de la forma

$$f(d) = f(0)e^{-d(\alpha+\beta d)}$$

donde α y β son constantes positivas.

Para resolver el problema de localización, utilizando la expresión aproximada de la cuota de mercado, emplean un algoritmo basado en el gradiente, resolviéndolo con 100 localizaciones iniciales distintas y eligiendo el mejor óptimo local obtenido.

Este trabajo es ampliado por Drezner, Wesolowsky y Drezner (1998) donde transforman el modelo anterior en un modelo logit. El desarrollo se presenta para el caso en el que todos los centros de servicio son igualmente atractivos, aunque puede ser modificado para diferenciar los centros.

Peeters y Plastria (1998) plantean el problema del $(1|X_p)$ -medianoide en redes, considerando funciones de atracción entre el nodo de demanda i y el centro de servicio localizado en x de la forma

$$\phi(i, x) = \frac{w_x}{g(d_{ix})},$$

siendo g una función cóncava y creciente, y w_x el nivel del atractivo, cuyo valor viene dado. Bajo estos supuestos, si la demanda se distribuye de acuerdo al modelo de Huff, concluyen que existe una solución nodal del problema. Para resolver el problema plantean un algoritmo de complejidad $O(n^2 \log n)$, donde n es el número de nodos de la red.

Además del modelo de Huff, estos autores consideran otra forma para la distribución de la demanda, el modelo Pareto-Huff. Este modelo se basa en la suposición de que un usuario acudirá a un centro de servicio más distante sólo si éste es más atractivo. Por lo tanto, el reparto de la demanda de un nodo ya no se hace entre todos los centros de servicio, como se imponía en el modelo de Huff, sino entre aquellos para los cuales no existe otra localización que lo mejore en atractivo o en distancia. Como la función objetivo presenta discontinuidades, pueden darse casos en los que la solución no exista y se tenga que obtener una ε -solución. Definen lo que llaman puntos isodistantes, es decir puntos que equidistan de un vértice y de un centro de servicio ya existente. Finalmente, concluyen que la ε -solución se encuentra en los vértices o en puntos muy próximos a los puntos isodistantes. Para resolver este problema proponen un algoritmo de complejidad $O(n^2 \log n + peb^2)$, siendo p y e el número de centros existentes y de aristas de la red, respectivamente.

Utilizando la función de atracción

$$\phi(i, x) = \frac{w_x}{d_{ix}},$$

Eiselt y Laporte (1989b) emplean el MAXCAP para resolver el $(1|X_p)$ -medianoide con atractivo discreto. En este caso se considera que los centros de servicio pueden tener distintos pesos, siendo éstos una medida de su atractivo. El problema es formulado como un programa no lineal entero con el que, además de la localización del nuevo centro de servicio, se obtiene su peso. Este modelo se puede ampliar para r nuevas localizaciones pero sus autores lo tachan de computacionalmente intratable.

Una visión diferente del $(r|X_p)$ -medianoide discreto ha sido presentada por Benati (1999). En este caso, aunque las empresas imponen los mismos precios para los bienes, existen ciertas diferencias entre las características de los productos. Estas diferencias son percibidas por los consumidores, quienes manifiestan distintos

gustos sobre ellas, expresándolas en forma de una función de utilidad con respecto al establecimiento. Se supone que las firmas que operan en el mercado no conocen con exactitud estas funciones de utilidad, por lo que utilizan funciones estimadas. La función de utilidad que manifiesta un usuario localizado en un nodo v con respecto a la firma i viene dada por

$$U_v(i) = a_{iv} - \beta d(v, Y_i),$$

donde a_{iv} es una constante positiva que representa la utilidad percibida por el usuario con respecto a las compras efectuadas en la firma i , Y_i es el conjunto de centros de servicio de la firma i , $d(v, Y_i)$ es la distancia del nodo v donde se encuentra el consumidor al establecimiento más próximo de la firma i , y β es una ponderación del efecto que tiene esta distancia sobre la utilidad del usuario. Como se supone que los valores de a_{iv} son individuales y específicos de cada usuario y no son observables, las empresas no disponen de una expresión determinista, aunque sí conoce la utilidad media, a_i , para cada empresa i . En particular, consideran la siguiente función aditiva de utilidad aleatoria

$$\tilde{U}_v(i) = a_i - \beta d(v, Y_i) + \varepsilon_{iv},$$

donde ε_{iv} es una variable aleatoria continua.

Los resultados presentados en este trabajo son obtenidos utilizando una distribución doble exponencial para la función anterior. Reformula el problema como un problema de máxima captura y plantea dos procedimientos de solución para el programa entero basados en ramificación y acotación. En un caso utiliza la submodularidad de la función y en el otro, la relajación Lagrangiana.

En Santos, Suárez y Dorta (1999b) se aborda el problema del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales considerando asignaciones proporcionales. En este caso, la atracción que experimentan los usuarios del nodo i con respecto al centro de servicio j viene determinada por la función

$$a_{ij} = a_j f(d_{ij})$$

donde a_j es el nivel de atractivo del establecimiento j , d_{ij} es la distancia que separa al nodo de demanda i del centro de servicio j , y f es una función positiva y decreciente. Se pretende que la empresa entrante elija las localizaciones y sus correspondientes niveles de atractivo que maximicen sus beneficios expresados en función de los ingresos obtenidos a partir de la demanda captada y los costes asociados a los niveles de atractivo. Bajo estas condiciones, los autores proponen un programa no lineal entero para resolver el problema conjunto (localización-atractivo). En el caso de que las funciones de coste fueran continuas y convexas, el programa resultante de obtener los niveles de atractivo para la nueva empresa, fijadas sus localizaciones, sería cóncavo con lo que se aseguraría la globalidad de cualquier óptimo local.

2.3 El $(r|X_p)$ -medianoide con atractivos

En este capítulo se modifica el problema del $(r|X_p)$ -medianoide descrito en el capítulo anterior en dos aspectos. Por un lado, se considera que la elección de los usuarios no se basa exclusivamente en la distancia, sino que también tiene en cuenta las características del centro de servicio. Por otro lado, la función objetivo no es la cuota de mercado captada por la empresa entrante sino los beneficios obtenidos por ésta. La empresa, además de las localizaciones para los nuevos centros de servicio, ha de elegir los niveles óptimos de atractivo para cada uno de ellos, teniendo en cuenta que un aumento de estos niveles normalmente lleva asociado un aumento del coste.

La atracción que experimenta un usuario en v hacia un centro de servicio ubicado en x_j viene dada por la función

$$a_{vj} = a_{vj}(\bar{a}_j, d(v, x_j)),$$

con $\bar{a}_j \in \mathbb{R}^s$ el vector s -dimensional de los valores de los s atributos que caracterizan la localización x_j y $d(v, x_j)$ la distancia entre el vértice $v \in V$ y el centro de servicio x_j .

Para simplificar el modelo se supone que los distintos atributos que caracterizan los centros de servicio se pueden asociar en uno. Así el vector \bar{a}_j queda representado por el valor a_j . Por otro lado, se asume que la función de utilidad, o de atracción, que experimenta un usuario en v respecto al servicio x_j debe ser creciente con respecto al nivel de atractivo y decreciente con respecto de la distancia $d(v, x_j)$. En este trabajo se considera la siguiente función de atracción

$$a_{vj} = \frac{a_j}{f_v(d(v, x_j))}$$

donde f_v es una función creciente y positiva y $a_j \in A \subseteq \mathbb{R}^+$, el nivel de atractivo del centro x_j , con A cerrado y acotado.

En lo sucesivo se considerarán las siguientes condiciones.

Condiciones

1. Las funciones de la distancia, $f_v : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, son cóncavas y crecientes $\forall v \in V$.
2. Se asume que para cada centro x_j (nuevo o existente) el valor de su atractivo está en el intervalo $[I, S]$, donde $0 < I < S$.
3. Existe una función de coste del atractivo, $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, continua y creciente.

Dados los conjuntos de las localizaciones $Y_r = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ y $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, para la empresa entrante (F_Y) y la ya establecida (F_X), respectivamente, los conjuntos $A_{Y_r} = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ y $A_{X_p} = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ son

los niveles de atractivo de los centros de Y_r y X_p . Los beneficios obtenidos por la empresa entrante vienen dados por

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V} w_Y(v) - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j),$$

con $w_Y(v)$ la parte del poder de compra de v captado por F_Y .

El par $(Y_r^*, A_{Y_r}^*) \in N^r \times [I, S]^r$ es un $(r|X_p)$ -medianoide si verifica

$$W(Y_r^*, A_{Y_r}^* | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r \subset N, A_{Y_r} \subset [I, S]^r} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

2.3.1 Preferencias binarias y servicios esenciales

Para cualquier conjunto $X \subseteq N$ con niveles de atractivo A_X , se define $G(v, X) = \max\{a_{vx} : x \in X\}$, donde a_{vx} es la atracción experimentada por los usuarios del nodo v con respecto al centro de servicio localizado en x con nivel de atractivo a_x , en nuestro caso

$$a_{vx} = \frac{a_x}{f_v(d(v, x))}.$$

El conjunto de vértices captados por F_Y , dado X_p y A_{X_p} , viene determinado por

$$V(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \{v \in V : G(v, Y_r) > G(v, X_p)\},$$

por lo que los beneficios obtenidos por ésta serán,

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p})} w(v) - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j).$$

En las demostraciones que aparecen en el resto del capítulo, con el fin de simplificar su desarrollo, se utilizará la siguiente notación:

$$V(Y_r, A_{Y_r}) = V(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) \text{ y } W(Y_r, A_{Y_r}) = W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

Ejemplo. Dada la red de la figura 2.1, se trata de obtener el nivel óptimo de atractivo para $Y_1 = v_2$, suponiendo que el nivel de atractivo para X_1 es 1. El atractivo del nuevo centro de servicio puede tomar valores comprendidos en el intervalo $[0.1, 1]$.

Tomando como función de la distancia $f_v(x) = 1 + x$, la atracción experimentada por cada uno de los vértices con respecto a X_1 es: $a_{v_1, X_1} = 1$, $a_{v_2, X_1} = 0.5$ y $a_{v_3, X_1} = 0.5$.

Para que Y_1 capte la demanda de un nodo v se ha de verificar que $a_{vY_1} > a_{vX_1}$. Como $a_{vY_1} = \frac{a_1}{1+d(v,Y_1)}$, siendo a_1 el atractivo asociado a Y_1 , se tiene que

$$\begin{aligned} a_{v_1Y_1} &> a_{v_1X_1} \iff a_1 > 2, \\ a_{v_2Y_1} &> a_{v_2X_1} \iff a_1 > 0.5, \\ a_{v_3Y_1} &> a_{v_3X_1} \iff a_1 > 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $a_1 \in [0.1, 0.5]$, Y_1 no capta la demanda de ningún nodo. Sin embargo, si a_1 es un poco superior a 0.5 ($a_1 = 0.5 + \delta$, $\delta > 0$) captaría la demanda del nodo v_2 . Además, en el intervalo $[0.5, 1]$, no se capta a ningún otro nodo, teniendo que tomar un valor superior a 1 ($a_1 = 1 + \delta$, $\delta > 0$) para que Y_1 también capte la demanda de v_3 . Para captar la demanda del nodo v_1 , a_1 tendría que ser superior a 2. Por lo tanto, la captura máxima que alcanzaría Y_1 , teniendo en cuenta que a_1 ha de ser elegido en $[0.1, 1]$, es de una unidad (la captada del nodo v_2).

Si la función de costes es $F(a_1) = 0.5a_1$, la función de beneficios es la que se representa en la figura 2.2. Como se aprecia en la gráfica, esta función presenta una discontinuidad en $a_1 = 0.5$, siendo decreciente en los intervalos $[0.1, 0.5]$ y $[0.5, 1]$. Como consecuencia de la discontinuidad, la función de beneficios no tiene máximo en el intervalo $[0.1, 1]$ ya que no se alcanza el supremo de la función objetivo, que en este caso es 0.75. Sin embargo, se puede elegir un punto a_ε próximo a $a_1 = 0.5$ tal que, $|W(a_\varepsilon) - 0.75| < \varepsilon$. Es decir, se puede obtener una ε -solución.

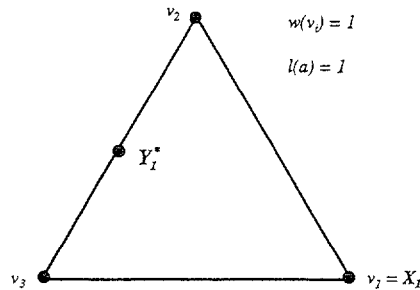


Figura 2.1: Red utilizada en los ejemplos

El razonamiento anterior es utilizado para demostrar que se puede hallar una ε -solución para el problema de calcular los niveles óptimos para los atractivos de los r centros de servicio entrantes, investigando un conjunto finito de puntos de la red.

Proposición 2.1 *Dados X_P y A_{X_P} y fijado Y_r , existe una ε -solución para*

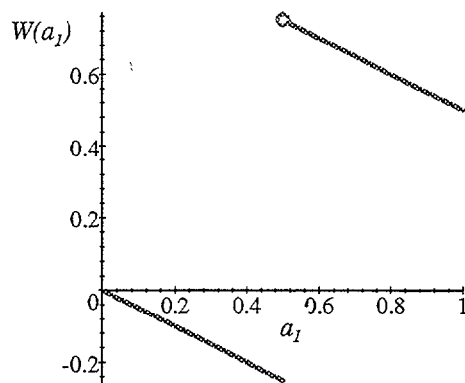


Figura 2.2: Beneficios para el $(1|X_P)$ -medianoide binario-esencial cuando varía a_1

el problema de obtener los atractivos óptimos en el $(r|X_P)$ -medianoide binario-esencial.

Dem. Para cada localización y_j , $j = 1, 2, \dots, r$, se consideran los vértices v tales que

$$I \leq a_v^j = G(v, X_P) f_v(d(v, y_j)) < S,$$

y se reordenan estos valores en orden creciente. Sea

$$I \leq a_{v_1}^j, a_{v_2}^j, \dots, a_{v_l}^j < S$$

dicha reordenación.

El conjunto de vértices captados por y_j en $(a_{v_k}^j, a_{v_{k+1}}^j)$ no varía, mientras que el coste representado por F es creciente en dicho intervalo, por tanto, no interesa tomar valores que se alejen de $a_{v_k}^j$. Algo similar ocurre con los intervalos $(I, a_{v_1}^j)$ y $(a_{v_l}^j, S)$. Obsérvese que si $I < a_{v_1}^j$, el máximo en el intervalo $[I, a_{v_1}^j)$ se da en I , coincidentes con el supremo en ese intervalo.

Consecuentemente, puede obtenerse una ε -solución para el atractivo de y_j investigando el conjunto $\{I \text{ (ó } I + \delta)\} \cup \{a_{v_i}^j + \delta : I < a_{v_i}^j < S\}$, con $\delta > 0$, suficientemente pequeño. ■

De la demostración de la proposición anterior se deduce que para obtener una ε -solución para el conjunto A_{Y_r} , fijado Y_r , basta con evaluar un conjunto finito de

valores. Para cada localización y_j , el conjunto $\{I \text{ (ó } I + \delta)\} \cup \{a_v^j + \delta : I < a_v^j < S\}$ tiene como máximo $|V|+1$ elementos, y por lo tanto, para determinar una ε -solución para A_{Y_r} , habrá que evaluar un máximo de $(|V| + 1)^r$ candidatos.

Considérese ahora el problema de determinar las localizaciones para el $(r|X_p)$ -medianoide cuando los atractivos de los nuevos centros son dados. En este caso, para que un centro de servicio y_j capte la demanda del nodo v se ha de verificar que

$$f_v(d(v, y_j)) < \frac{a_j}{G(v, X_p)}.$$

Definición 2.2 Dado un nivel de atractivo $a_x \in A_{X_p}$, con $X_p \subset N(V, A)$, se dice que un punto $x \in N(V, A)$ es (v, X_p, a_x) -**isoatractivo** si verifica que

$$f_v(d(v, x)) = \frac{a_x}{G(v, X_p)}.$$

Así se definen los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned} ISOA(v, X_p, a_x) &= \{x \in N(V, A) : x \text{ es un punto } (v, X_p, a_x)\text{-isoatractivo}\}, \\ ISOA(X_p, a_x) &= \bigcup_{v \in V} ISOA(v, X_p, a_x), \\ ISOA_{ij}(X_p, a_x) &= ISOA(X_p, a_x) \cap [v_i, v_j], \text{ con } [v_i, v_j] \in A. \\ ISOA(X_p) &= \bigcup_{a_x \in A_{X_p}} ISOA(X_p, a_x). \end{aligned}$$

A los elementos de $ISOA(X_p)$ les denominaremos puntos isoatractivos.

Para el problema de obtener las localizaciones que maximicen los beneficios, dados los niveles de atractivo, los resultados son similares a los obtenidos cuando no se consideraban los atractivos (sección 1.2.1).

Mientras que en aquella situación, la cuota de mercado presentaba discontinuidades en los puntos isodistantes, en este caso, las discontinuidades aparecen en los puntos isoatractivos. Lo único que diferencia a ambos casos es la distancia a partir de la cual un centro de servicio deja de captar demanda de un determinado nodo. Si para el caso sin atractivo, la demanda de v es captada por y_1 si $d(v, y_1) < D(v, X_p)$, en este caso, se ha de verificar que

$$f_v(d(v, y_1)) < \frac{a_x}{G(v, X)}.$$

Además, como los niveles de atractivo para los nuevos centros de servicio son constantes, el comportamiento de la cuota de mercado es el mismo que el de la función de beneficios, y por lo tanto, se pueden aplicar los resultados obtenidos para el caso sin atractivos.

Proposición 2.3 El conjunto $V(\{y_1, \dots, y_j, \dots, y_r\}, A_{Y_r}|X_p, A_{X_p})$, dados A_{Y_r}, X_p y A_{X_p} , es constante cuando y_j se mueve en un segmento (s, t) , tal que

$$(s, t) \cap ISOA(X_p, a_j) = \emptyset \text{ y } \{s, t\} \subset V \cup ISOA(X_p, a_j).$$

Dem. Sea $Y_r = \{y_j\}_{j=1}^r$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que la localización que se mueve en (s, t) es y_1 . Si $V(Y_r, A_{Y_r})$ no es constante cuando y_1 varía en (s, t) , existirán $y'_1, y''_1 \in (s, t)$, tales que

$$V(\{y'_1, y_2, \dots, y_r\}, A_{Y_r}) \neq V(\{y''_1, y_2, \dots, y_r\}, A_{Y_r}).$$

En consecuencia, existe $v_0 \in V$, tal que

$$v_0 \in V(\{y'_1, y_2, \dots, y_r\}, A_{Y_r}) \text{ y } v_0 \notin V(\{y''_1, y_2, \dots, y_r\}, A_{Y_r}) \text{ (o al revés).}$$

Entonces,

$$G(v_0, \{y'_1, y_2, \dots, y_r\}) > G(v_0, X_p) \geq G(v_0, \{y''_1, y_2, \dots, y_r\}),$$

de lo que se infiere que $G(v_0, X_p) \geq G(v_0, \{y_2, \dots, y_r\})$, y por lo tanto

$$\frac{a_1}{f_v(d(v_0, y'_1))} > G(v_0, X_p) > \frac{a_1}{f_v(d(v_0, y''_1))}.$$

Como la función $f_v(d(v_0, y))$ es continua cuando $y \in (s, t)$, se tiene que existe $z \in (y'_1, y''_1)$ tal que

$$\frac{a_1}{f_v(d(v_0, z))} = G(v_0, X_p),$$

esto es, z es un punto (v_0, X_p, a_1) -isoatractivo. Pero esto no puede ocurrir ya que por hipótesis no hay puntos (v, X_p, a_1) -isoatractivo en (s, t) . Por tanto, $V(Y_r, A_{Y_r})$ es constante en (s, t) . ■

Para cada $a_k \in A_{Y_r}$ y cada arista $[v_i, v_j]$ se considera

$$\{x_{ijk}^1, x_{ijk}^2, \dots, x_{ijk}^{q_{ijk}}\},$$

los puntos de $ISOA_{ij}(X_p, a_k)$ ordenados en orden creciente de la distancia a v_i . Considerando los segmentos

$$(v_i, x_{ijk}^1), (x_{ijk}^l, x_{ijk}^{l+1}), l = 1, 2, \dots, q_{ijk} - 1, \text{ y } (x_{ijk}^{q_{ijk}}, v_j)$$

se construye un conjunto $C_{ij}(a_k)$ tal que

$$C_{ij}(a_k) = \{v_i, v_j\} \cup \{x_{ijk}^l\}_{l=0}^{q_{ijk}}$$

con $x_{ijk}^0 \in (x_{ijk}^l, x_{ijk}^{l+1})$, donde $v_i = x_{ijk}^0$ y $v_j = x_{ijk}^{q_{ijk}+1}$. Claramente, este conjunto no es único. Sea entonces, $C(a_k) = \bigcup_{i,j} C_{ij}(a_k)$.

Proposición 2.4 *Dados los conjuntos A_{Y_r}, X_p y A_{X_p} , existe un conjunto $Y_r =$*

$\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ que es un $(r|X_P)$ -medianoide binario-esencial en $N(V, A)$ donde $y_j \in C(a_j)$, $\forall j = 1, 2, \dots, r$.

Dem. Sea $Y_r^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*\}$ una solución del problema en la que existe $y_k^* \notin C(a_k)$. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $y_1^* \notin C(a_1)$, y que $y_1^* \in [s, t]$, con $[s, t] \subset [v_i, v_j]$, tal que $s, t \in V \cup ISOA_{ij}(X_p, a_1)$ y $(s, t) \cap ISOA_{ij}(X_p, a_1) = \emptyset$.

Si $y_1^* \notin ISOA_{ij}(X_p, a_1)$, por la proposición 2.3, puede trasladarse hasta un punto de $C(a_1)$ en (s, t) sin que cambie $V(Y_r^*, A_{Y_r})$, esto es, y_1^* puede sustituirse por $y_{ij1}^l \in C(a_1) \cap (s, t)$ y $V(\{y_{ij1}^l, y_2^*, \dots, y_r^*\}, A_{Y_r}) = V(Y_r^*, A_{Y_r})$.

Si $y_1^* \in ISOA_{ij}(X_p, a_1)$, por la construcción de $[s, t]$, se tiene que $y_1^* = s$ o $y_1^* = t$. Además, existe $v_0 \in V$, tal que $G(v_0, X_p) = \frac{a_1}{f_v(d(v_0, y_1^*))}$, esto es, y_1^* es un punto (v_0, X_p, a_1) -isoatractivo. Supóngase que $y_1^* = s$ (el otro caso sería simétrico), entonces:

- i. Si $\frac{a_1}{f_v(d(v_0, y))} \leq G(v_0, X_p)$, para $y \in (s, t)$, se tiene que ningún punto de $[s, t]$ capta a v_0 , por lo que y_1^* puede ser sustituido por $y_{ij1}^l \in C(a_1) \cap (s, t)$ y $V(\{y_{ij1}^l, y_2^*, \dots, y_r^*\}, A_{Y_r}) = V(Y_r^*, A_{Y_r})$.
- ii. Si $\frac{a_1}{f_v(d(v_0, y))} > G(v_0, X_p)$, para $y \in (s, t)$, el nodo v_0 será captado por cualquier punto de (s, t) , por lo que un movimiento desde s hacia t implica que se captaría a v_0 , sin dejar de captar a ninguno de los ya captados, y por lo tanto, si se elige $y_{ij1}^l \in C(a_1) \cap (s, t)$, se tiene que $V(Y_r^*, A_{Y_r}) \subset V(\{y_{ij1}^l, y_2^*, \dots, y_r^*\}, A_{Y_r})$. Esto sería un absurdo ya que entonces Y_r^* no sería un $(r|X_P)$ -medianoide. ■

Puesto que, como se deduce de la demostración anterior, los puntos (v, X_p, a_k) -isoatractivo no están en la solución, en el conjunto $C(a_k)$ se puede eliminar los vértices que no pertenecen a $ISOA(X_p, a_k)$.

Además, en una arista $[v_i, v_j]$ donde $v_i \notin ISOA(X_p, a_k)$, se hace $y_{ijk}^0 = v_i$, y si $v_j \notin ISOA(X_p, a_k)$, se toma $y_{ijk}^{a_{ij}k} = v_j$. Si en $[v_i, v_j]$ no existen puntos isodistantes, $C_{ij}(a_k) = \{v_i\}$ o $C_{ij}(a_k) = \{v_j\}$. De esta forma, $C_{ij}(a_k)$ está formado por $1 + |ISOA_{ij}(X_p, a_k)|$ elementos.

En definitiva, como en cada arista pueden existir como máximo dos puntos (v, X_p, a_k) -isodistantes para cada $v \in V$, se tiene que el número máximo de candidatos para localizar y_k , dado a_k , es $2|V||A| + |A|$.

Utilizando los resultados de la sección 1.2.1 se puede concluir que el problema de elegir las localizaciones de un $(r|X_P)$ -medianoide binario-esencial en redes, dados sus niveles de atractivo, no tiene que tener solución nodal. Obsérvese que el ejemplo de dicha sección es un caso particular en el que se considera que todos los niveles de atractivo son igual a uno.

2.3.2 Preferencias binarias y servicios no esenciales

Al igual que para los servicios esenciales, el conjunto de vértices captados por la empresa entrante, dado X_p y su niveles de atractivo A_{X_p} , viene determinado por

$$V(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \{v \in V : G(v, Y_r) > G(v, X_p)\}.$$

Como el servicio es no esencial, la demanda satisfecha para cada uno de los vértices captados es proporcional a la atracción que experimentan éstos con respecto al centro de servicio que les sirve. Por lo tanto, los beneficios obtenidos son

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p})} w(v) G(v, Y_r) - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j).$$

Para que $w(v) G(v, Y_r)$ sea una parte de la demanda del nodo v , se ha de verificar que $G(v, Y_r) \leq 1$.

El par $(Y_r^*, A_{Y_r}^*) \in N^r \times [I, S]^r$ es un $(r|X_p)$ -medianoide si verifica

$$W(Y_r^*, A_{Y_r}^* | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r \subset N, A_{Y_r} \subset [I, S]^r} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

Considérese el problema de obtener los niveles de atractivo para los nuevos centros de servicio, conocidas sus localizaciones, de forma que se maximicen los beneficios.

Para que un centro de servicio y_1 capte la demanda de v , se ha de verificar que

$$a_{v1} = \frac{a_1}{f_v(d(v, y_1))} > G(v, X_p) \text{ esto es } a_1 > G(v, X_p) f_v(d(v, y_1)).$$

Se define $a_v^1 = G(v, X_p) f_v(d(v, y_1))$, siendo éste el nivel de atractivo que ha de superar el centro de servicio y_1 para empezar a captar parte de la demanda de v .

El problema de obtener el nivel de atractivo para un centro de servicio, cuando su localización viene dada, puede no tener solución. Considérese la red de la figura 2.1, tomando como función $f_v(x) = 1.5 + x$ y como función de costes para el atractivo $F(x) = 0.8x^2$. En estas condiciones, la atracción experimentada por cada nodo con respecto a X_1 es:

$$a_{v_1, X_1} = \frac{10}{15}, a_{v_2, X_1} = a_{v_3, X_1} = 0.4.$$

Si $Y_1 = v_2$, los niveles que ha de superar a_1 para captar cada uno de los nodos de la red son:

$$a_{v_1}^1 = \frac{25}{15}, a_{v_2}^1 = 0.6 \text{ y } a_{v_3}^1 = 1.$$

La cuota de mercado captada por Y_1 es cero cuando $a_1 \in [0.1, 0.6]$ y es creciente en el intervalo $(0.6, 1]$, donde capta demanda de v_2 . Tomando valores mayores que

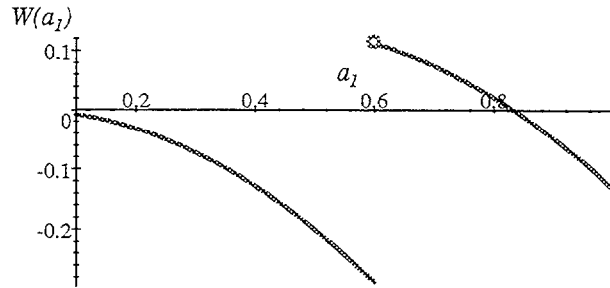


Figura 2.3: Beneficios para el $(1|X_1)$ -medianoide cuando $Y_1 = v_2$ (Binario-no esencial)

1, empezaría a captar parte de la demanda de v_2 y tendría ser superior a $\frac{25}{15}$ para captar demanda de v_3 .

Si el atractivo varía en el intervalo $[0.1, 1]$, la función de beneficios viene dada por

$$W(Y_1, \{a_1\}) = \begin{cases} -0.8(a_1)^2 & \text{si } 0.1 \leq a_1 \leq 0.6 \\ \frac{a_1}{1.5} - 0.8(a_1)^2 & \text{si } 0.6 < a_1 \leq 1 \end{cases}$$

Como se observa en la figura 2.3, esta función presenta una discontinuidad de salto finito en $a_1 = 0.6$. En este caso, la función de beneficios no tiene máximo en el intervalo $[0.1, 1]$, ya que no se alcanza el supremo de la función objetivo, que en esta ocasión es 0.112. Sin embargo, se puede seleccionar un punto a_ε , un poco superior a $a_1 = 0.6$ tal que $|W(a_\varepsilon) - 0.112| < \varepsilon$. Es decir, se puede obtener una ε -solución.

Proposición 2.5 *Dada la arista $[v_i, v_j]$, sea $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ los puntos de $ISO_{ij}(X_p, a_j)$ ordenados en orden creciente de la distancia al vértice v_i . Sea $x_0 = v_i$ y $x_{q+1} = v_j$. Entonces, dados los conjuntos A_{Y_r}, X_p y A_{X_r} , la función $W(y) = W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_r})$, con $y \in Y_r$, es cóncava en (x_{k-1}, x_k) , $k = 1, 2, \dots, q + 1$.*

Dem. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que y_1 es la localización que varía en (x_{k-1}, x_k) , para algún $k \in \{1, 2, \dots, q + 1\}$, y que el resto de las

localizaciones no cambian. En este caso, la cuota de mercado captada por Y_r es una función de y_1 dada por

$$W(y_1) = \sum_{v \in V(\{y_1, \dots, y_r\} | X_p)} w(v) G(v, \{y_1, \dots, y_r\}).$$

El conjunto $V(\{y_1, \dots, y_r\} | X_p)$ es constante en (x_{k-1}, x_k) (proposición 2.3), por lo tanto, se trata de demostrar que cada uno de los sumandos es convexo en (x_{k-1}, x_k) .

Dado $v \in V(\{y_1, \dots, y_r\} | X_p)$, $G(v, \{y_1, \dots, y_r\}) = \max \left\{ \frac{a_1}{f_v(d(v, y_1))}, G_v \right\}$, con $G_v = \max \left\{ \frac{a_j}{f_v(d(v, y_j))} : j = 2, \dots, r \right\}$. Como $d(v, y_1)$ es cóncava a lo largo de (x_{k-1}, x_k) , la función $\frac{a_j}{f_v(d(v, y_j))}$ es convexa (lemas 1.21 y 1.22). Aplicando el lema 1.24 se tiene que $G(v, \{y_1, \dots, y_r\})$ es convexa y por lo tanto $W(y_1)$ también lo es, por ser suma de funciones convexas en (x_{k-1}, x_k) . ■

Proposición 2.6 *Dado el conjunto $A_{Y_r} = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, existe un conjunto $Y_r^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*\}$ que es una ε -solución para el problema del $(r|X_p)$ -medianoide binario-no esencial en la red $N(V, A)$, de tal forma que y_j^* es un vértice o un punto próximo a un elemento del conjunto $ISOA(X_p, a_j)$, $\forall j = 1, 2, \dots, r$.*

Dem. Resulta de la convexidad de la función $W(Y_r, A_{Y_r})$ cuando $y_j \in Y_r$ varía en (s, t) , donde s, t son vértices o puntos pertenecientes a $ISOA(X_p, a_j)$ consecutivos en una misma arista. Además si el extremo donde se alcanza el máximo es un vértice que no pertenece a $ISOA(X_p, a_j)$, como la función objetivo es continua en ese punto, el supremo coincidirá con el máximo y por lo tanto, ese vértice será la solución óptima. ■

Como en cada arista puede existir como máximo dos puntos (v, X_p, a_j) -isoatractivo, $\forall v \in V$, y teniendo en cuenta que los candidatos para la localización de y_j son los vértices y los puntos próximos a los isoatractivo, uno a cada lado, el número máximo de puntos a evaluar sería $2|V| |A| + |V|$.

2.3.3 Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales

En el modelo de preferencias parcialmente binarias se considera que la demanda total en cada nodo es asignada a los centros de cada una de las firmas hacia los que experimenta mayor atracción. La demanda se reparte proporcionalmente entre las firmas de acuerdo a la atracción que experimentan los usuarios del nodo con respecto a estos centros.

Sean X_p, A_{X_p} e Y_r, A_{Y_r} los conjuntos de las localizaciones y niveles de atractivo de F_X y F_Y , respectivamente. Como el servicio es esencial, la demanda tiene que

ser totalmente satisfecha. Así, si $w_X(v)$ y $w_Y(v)$ son las cantidades de demanda del nodo v que son captadas por X_p e Y_r , respectivamente, se ha de verificar que

$$w(v) = w_X(v) + w_Y(v), \quad \forall v \in V.$$

La demanda se distribuye entre las firmas de forma que

$$\frac{w_Y(v)}{w_X(v)} = \frac{G(v, Y_r)}{G(v, X_p)},$$

siendo $G(v, X) = \max\{\frac{a_x}{f_v(d(v, x))} : x \in X\}$. Combinando las igualdades anteriores, se obtiene

$$w_Y(v) = w(v) \frac{G(v, Y_r)}{G(v, Y_r) + G(v, X_p)},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) &= \sum_{v \in V} w_Y(v) - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j) = \\ &= \sum_{v \in V} \frac{w(v)G(v, Y_r)}{G(v, Y_r) + G(v, X_p)} - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j). \end{aligned}$$

Proposición 2.7 *Bajo las condiciones (1) y (2) la función de ingresos para el $(\tau|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial, es creciente del atractivo en $[I, S]^r$. Además, esta función es cóncava por componentes con respecto al atractivo en $[I, S]$.*

Dem. La función de ingresos, fijadas las localizaciones, viene dada como

$$ING(\{a_1, a_2, \dots, a_r\}) = \sum_{v \in V} w_Y(v),$$

donde

$$w_Y(v) = \frac{w(v)G(v, Y_r)}{G(v, Y_r) + G(v, X_p)} = h_v(G(v, Y_r)),$$

con $h_v(x) = \frac{w(v)x}{x + G(v, X_p)}$.

La función $G(v, Y_r)$ es creciente en $[I, S]^r$ y h_v es estrictamente creciente para $x > 0$, por lo tanto, $w_Y(v)$ es creciente en $[I, S]^r$ por ser una composición de funciones crecientes.

Supóngase que a_1 varía en $[I, S]$ y que el resto de los atractivos permanecen fijos. En este caso,

$$G(a_1) = G(v, Y_r) = \max\left\{\frac{a_1}{f_{v1}}, G_v\right\}, \quad \text{con } G_v = \max\left\{\frac{a_j}{f_{vj}} : j = 2, \dots, r\right\}.$$

De esta forma,

$$w_Y(v) = \frac{w(v)G(a_1)}{G(a_1) + G(v, X_p)} = \begin{cases} \frac{w(v)G_v}{G_v + G(v, X_p)} & \text{si } \frac{a_1}{f_{v1}} \leq G_v \\ \frac{w(v)a_1}{a_1 + f_{v1}G(v, X_p)} & \text{si } \frac{a_1}{f_{v1}} > G_v \end{cases}$$

La primera parte de la definición de $w_Y(v)$ es constante y la segunda es una función continua, cóncava y creciente. Por lo tanto, la función $w_Y(v)$ es cóncava y creciente.

De lo anterior se deduce que $ING(A_{Y_r})$ es creciente en $[I, S]^r$ y cóncava por componentes en $[I, S]$, por ser suma de funciones que también lo son. ■

Proposición 2.8 *Bajo la condición (1) la función de beneficios del $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial, $W(Y_r, A_{Y_r}|X_p, A_{X_p})$, es convexa con respecto a $y \in Y_r$, cuando y varía en una arista de la red y los atractivos y el resto de las localizaciones permanecen fijas.*

Dem. La función de beneficios es

$$W(Y_r, A_{Y_r}|X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V} \frac{w(v)G(v, Y_r)}{G(v, Y_r) + G(v, X_p)} - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j).$$

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que la localización que varía es y_1 . Entonces, la función W puede expresarse como

$$W(y_1) = \sum_{v \in V} \frac{w(v)G_v(y_1)}{G_v(y_1) + K_v} - F = \sum_{v \in V} w(v) \left(1 - \frac{K_v}{G_v(y_1) + K_v} \right) - F,$$

donde $K_v = G(v, X_p)$ y $F = \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j)$, son constantes, mientras que

$$G_v(y_1) = \max \left\{ \frac{a_1}{f_v(d(v, y_1))}, G_v^* \right\}, \text{ siendo } G_v^* = \max \left\{ \frac{a_j}{f_v(d(v, y_j))} : j = 2, 3, \dots, r \right\}.$$

Supóngase que la localización y_1 en la arista $[s, t]$ viene dada por la variable z que representa la distancia entre el centro de servicio y el vértice s . La distancia entre cualquier vértice $v \in V$ y la localización y_1 es una función cóncava de z que se representará como $\delta_v(z)$.

Como f_v es cóncava y creciente y $\delta_v(z)$ es cóncava, se tiene que $f_v(\delta_v(z))$ es cóncava (lema 1.21) y por lo tanto

$$\frac{K_v}{\frac{a_1}{f_v(\delta_v(z))} + K_v}$$

es una función cóncava de z (lema 1.23). Entonces,

$$\frac{K_v}{G_v(y_1) + K_v} = \min \left\{ \frac{K_v}{G_v^* + K_v}, \frac{K_v}{\frac{a_1}{f_v(\delta_v(z))} + K_v} \right\}$$

es cóncava (lema 1.25).

Por lo tanto,

$$1 - \frac{K_v}{G_v(y_1) + K_v}$$

es convexa en $[s, t]$, $\forall v \in V$, de donde resulta que $W(y_1)$ es convexa en $[s, t]$. ■

Como consecuencia inmediata se puede concluir que el problema del $(r|X_p)$ -medianoide con atractivos para servicios esenciales y asignaciones parcialmente binarias en red tiene solución nodal.

Teorema 2.9 *Bajo las condiciones (1) a (3) existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, que es solución del $(r|X_p)$ -medianoide con atractivos para servicios esenciales y asignaciones parcialmente binarias en $N(V, A)$.*

Dem. El resultado se obtiene aplicando la proposición anterior. Como la función de beneficios es convexa cuando una localización varía en una arista $[s, t]$ y el resto de las localizaciones se mantienen fijas, se deduce que la función W alcanza el valor máximo cuando esa localización se sitúa en alguno de los extremos de la arista, para cualquiera que sean el resto de las localizaciones y los valores de los atractivos. ■

2.3.4 Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales

A continuación se hace un desarrollo similar al realizado por Hakimi (1990) para el caso parcialmente binario-no esencial en el que sólo se consideraba la distancia como criterio de decisión. A diferencia del caso esencial, ahora la demanda de un nodo no tiene que ser satisfecha completamente. Se tiene que

$$w(v) \geq w_X(v) + w_Y(v), \forall v \in V,$$

y la cantidad captada por cada empresa viene dada por las relaciones

$$\begin{aligned} w_Y(v) &= (w(v) - w_X(v)) G(v, Y_r), \\ w_X(v) &= (w(v) - w_Y(v)) G(v, X_p). \end{aligned}$$

Para que las expresiones anteriores tengan sentido se ha de verificar que $G(v, Y_r), G(v, X_p) \leq 1$, ya que de lo contrario, la cantidad captada sería superior a la disponible.

De estas igualdades se deduce la demanda captada por cada empresa

$$\begin{aligned} w_Y(v) &= \frac{w(v) G(v, Y_r) [G(v, X_p) - 1]}{[G(v, Y_r) G(v, X_p)] - 1}, \\ w_X(v) &= \frac{w(v) G(v, X_p) [G(v, Y_r) - 1]}{[G(v, Y_r) G(v, X_p)] - 1}, \end{aligned}$$

donde $G(v, Y_r), G(v, X_p) < 1, \forall v \in V$. La función de beneficios vendrá dada por

$$\begin{aligned} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) &= \sum_{v \in V} w_Y(v) - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j) = \\ &= \sum_{v \in V} \frac{w(v) G(v, Y_r) [G(v, X_p) - 1]}{[G(v, Y_r)G(v, X_p)] - 1} - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j). \end{aligned}$$

Proposición 2.10 *Bajo la condiciones (1) y (2), si $G(v, Y_r), G(v, X_p) < 1, \forall v \in V$, la función de ingresos para el $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial es creciente y estrictamente convexa con respecto al atractivo en $[I, S]^r$.*

Dem. La función de ingresos, dadas las localizaciones, viene dada como

$$ING(A_{Y_r}) = \sum_{v \in V} w_Y(v)$$

donde

$$w_Y(v) = \frac{w(v) G(v, Y_r) [G(v, X_p) - 1]}{[G(v, Y_r)G(v, X_p)] - 1} = w(v)h_v(G(v, Y_r)),$$

$$\text{con } h_v(x) = \frac{x(G(v, X_p) - 1)}{xG(v, X_p) - 1}.$$

La función $G(v, Y_r)$ es creciente y convexa con respecto a los atractivos de A_{Y_r} por ser el máximo de funciones convexas y crecientes. Además, para $0 < x < 1$, $h_v(x)$ es una función estrictamente creciente y estrictamente convexa. Por lo tanto, $w_Y(v)$ es una función creciente y convexa por ser una composición de funciones crecientes y convexas (lema 1.26), y por tanto, también lo será $ING(A_{Y_r})$ por ser suma de funciones crecientes y convexas. ■

En el siguiente teorema se demuestra que también en el caso no esencial, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes tiene solución nodal.

Teorema 2.11 *Sea $N(V, E)$ una red. Se asume que $f_v(0) > S, \forall v \in V$. Entonces, bajo las condiciones (1) a (3), existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, y atractivos A_{V_r} , tal que*

$$W(V_r, A_{V_r} | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r \subset N, A_{Y_r} \subset [I, S]^r} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

Dem. Supóngase que existe $Y_r^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_r^*\}$ con atractivos asociados $A_{Y_r^*} = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*\}$, un $(r|X_p)$ -medianoide con no todas las localizaciones nodales. Entonces

$$W(Y_r^*, A_{Y_r^*} | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r, A_{Y_r}} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que y_1^* no es un nodo y que está en la arista $[s, t]$. Se probará que la localización y_1^* puede trasladarse a uno de los vértices, manteniendo el resto de las localizaciones y todos los atractivos fijos, sin que con ello se reduzca el valor de $W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p})$. Como $f_v(0) > S$, $\forall v \in V$, se tiene que $G(v, Y_r), G(v, X_p) < 1$, $\forall v \in V$, y por lo, tanto la función W viene dada como

$$W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V} \frac{w(v) G(v, Y_r^*) [G(v, X_p) - 1]}{[G(v, Y_r^*) G(v, X_p)] - 1} - \sum_{a_j^* \in A_{Y_r^*}^*} F(a_j^*).$$

Supóngase que la localización y_1^* en $[s, t]$ viene dada por la variable z que representa la distancia entre el centro de servicio y el vértice s . Además, la distancia entre cualquier vértice $v \in V$ y la localización y_1^* a lo largo de $[s, t]$ es una función cóncava de z que se representará como $\delta_v(z)$.

Así, cuando el resto de las localizaciones y los atractivos están fijos, la función $G(v, Y_r^*)$ también puede expresarse en función de z ,

$$G_v(z) = G(v, Y_r^*) = \max \left\{ \frac{a_1^*}{f_v(\delta_v(z))}, \frac{a_j^*}{f_v(d(v, x_j^*))} : j = 2, \dots, r \right\}.$$

Esta función es convexa con respecto a z ya que es el máximo entre una función convexa y constantes (lema 1.24). En consecuencia, W puede expresarse en función de z de la siguiente forma

$$W_1(z) = \sum_{v \in V} \frac{w(v) G_v(z) [G(v, X_p) - 1]}{[G_v(z) G(v, X_p)] - 1} - F$$

con $F = \sum_{a_j^* \in A_{Y_r^*}^*} F(a_j^*)$.

Como $G_v(z)$ es convexa y $h_v(x) = \frac{w(v)x[G(v, X_p)-1]}{[xG(v, X_p)]-1}$ es estrictamente creciente y convexa para $0 < x < 1, \forall v \in V$, aplicando el lema 1.26, se tiene que cada uno de los sumandos de la función de beneficios es estrictamente convexo. Consecuentemente, $W_1(z)$ es estrictamente convexa para $0 \leq z \leq l$, con l la longitud del arista $[s, t]$, por ser suma de funciones estrictamente convexas. Por lo tanto $\max_z W_1(z) = \max\{W_1(0), W_1(l)\}$. Esto significa que el centro de servicio y_1^* puede moverse a uno de los vértices sin que con ello se reduzca el valor de $W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p})$.

Si este proceso se realiza con todas aquellas localizaciones no nodales de Y_r^* , se concluye que existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que

$$W(V_r, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p})$$

y por lo tanto $V_r, A_{Y_r^*}^*$, sería la solución del problema planteado. ■

2.3.5 Preferencias proporcionales y servicios esenciales

En esta sección se amplían los estudios realizados por Hakimi (1990) sobre el $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y preferencias proporcionales. Cuando las preferencias son proporcionales, la demanda de cada nodo es repartida entre todos los centros de servicios que operan en el mercado de acuerdo con la atracción percibida por los usuarios.

Para simplificar la notación se definen los conjuntos $X_{p+r} = \{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{p+r}\}$ formado por el conjunto de las r localizaciones correspondientes a la empresa entrante, $Y_r = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ y las p correspondientes a la empresa ya establecida en el mercado, $X_p = \{x_{r+1}, \dots, x_{p+r}\}$. De la misma forma, se define el conjunto $A_{X_{p+r}} = \{a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_{p+r}\}$, formado por los niveles de atractivo asociados a Y_r , (A_{Y_r}) y X_p (A_{X_p}) . Se denotará por $w_i(v)$ a la parte de la demanda de v captada por el centro de servicio x_i con atractivo a_i , $i = 1, 2, \dots, p+r$. Se llamará $f_{vj} = f_v(d(v, x_j))$, $\forall v \in V, \forall x_j \in X_{p+r}$.

Por ser el servicio esencial se tiene que la demanda de cada nodo es totalmente repartida entre los $p+r$ centros de servicio que operan en el mercado,

$$w(v) = w_1(v) + w_2(v) + \dots + w_{p+r}(v), \quad \forall v \in V,$$

de manera que

$$\frac{w_i(v)}{w_j(v)} = \frac{a_{vi}}{a_{vj}}, \quad \forall v \in V, \forall x_i, x_j \in X_{p+r},$$

con $a_{vi} = \frac{a_i}{f_v(d(v, x_i))}$.

De la condición de proporcionalidad anterior se tiene que $w_i(v) = \frac{w_j(v)a_{vi}}{a_{vj}}$ $\forall v \in V, \forall x_i, x_j \in X_{p+r}$, por lo que $w(v)$ podría expresarse de la siguiente forma

$$\frac{w_j(v)a_{v1}}{a_{vj}} + \dots + w_i(v) + \dots + \frac{w_j(v)a_{vp+r}}{a_{vj}} = w(v).$$

De la igualdad anterior resulta

$$\frac{w_j(v)}{a_{vj}} \sum_{k=1}^{p+r} a_{vk} = w(v)$$

de donde se puede obtener la expresión de $w_j(v)$,

$$w_j(v) = \frac{w(v)a_{vj}}{\sum_{k=1}^{p+r} a_{vk}}, \quad \forall v \in V, \forall x_j \in X_{p+r}.$$

Así, $w_j(v)$ puede expresarse como $w(v)P_{vj}$, donde

$$P_{vj} = \frac{a_{vj}}{\sum_{k=1}^{p+r} a_{vk}}.$$

Los valores P_{v_j} dependen tanto de las localizaciones como de sus niveles de atractivo y cumplen la igualdad $\sum_{x_j \in X_{p+r}} P_{v_j} = 1$, $\forall v \in V$. Obsérvese que el modelo de Huff es un caso particular del estudiado aquí.

El $(r|X_p)$ -medianoide es el par $(Y_r^*, A_{Y_r^*}^*) \in N^r \times [I, S]^r$ que maximiza

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V} \sum_{j=1}^r w_j(v) - \sum_{j=1}^r F(a_j).$$

A continuación se demuestra la existencia de solución nodal para el problema del $(r|X_p)$ -medianoide bajo las condiciones (1) a (3).

Teorema 2.12 *Sea $N(V, A)$ una red. Se asume que $p+r \leq |V|$. Entonces, bajo las condiciones (1) a (3), existe un par $(V_r, A_{V_r}) \in N(V, A)^r \times [I, S]^r$, con $|V_r| = r$, que es un $(r|X_p)$ -medianoide para el caso proporcional-esencial con atractivos en $N(V, A)$.*

Dem. Supóngase que existe $Y_r^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*\}$ y $A_{Y_r^*}^* = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*\}$, un $(r|X_p)$ -medianoide, con no todas las localizaciones nodales. Entonces,

$$W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r, A_{Y_r}} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que x_1^* no es un nodo de la arista $[s, t]$ donde se encuentra. A continuación se prueba que la localización x_1^* puede trasladarse a uno de los vértices de la arista, manteniendo el resto de las localizaciones y todos los atractivos fijos, sin que con ello se reduzca el valor de $W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p})$, o lo que es equivalente por tratarse de servicios esenciales y estar los atractivos fijos, sin que se produzca un incremento en los beneficios del rival, $W(X_p, A_{X_p} | Y_r^*, A_{Y_r^*}^*)$.

$$W(X_p, A_{X_p} | Y_r^*, A_{Y_r^*}^*) = \sum_{v \in V} \sum_{j=r+1}^{p+r} w(v) \frac{\frac{a_j}{f_{vj}}}{\sum_{k=1}^r \frac{a_k}{f_{vk}} + \sum_{k=r+1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk}}} - \sum_{j=r+1}^{p+r} F(a_j).$$

Como todos los atractivos y las localizaciones menos x_1^* están fijadas, la función anterior puede expresarse como

$$W(X_p, A_{X_p} | Y_r^*, A_{Y_r^*}^*) = \sum_{v \in V} \sum_{j=r+1}^{p+r} w(v) \frac{\frac{a_j}{f_{vj}}}{\frac{a_1}{f_{v1}} + K_v} - F,$$

$$\text{con } F = \sum_{j=r+1}^{p+r} F(a_j) \text{ y } K_v = \sum_{k=2}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk}}, \forall v \in V.$$

Supóngase que la localización x_1^* en $[s, t]$ viene dada por la variable z que representa la distancia entre x_1^* y el vértice s . La distancia entre cualquier vértice $v \in V$ y la localización x_1^* es una función cóncava de z que se representará como $\delta_v(z)$.

Así cuando el resto de las localizaciones y los atractivos están fijos, la función $W(X_p, A_{X_p} | Y_r^*, A_{Y_r^*}^*)$ puede expresarse en función de z como

$$W_1(z) = \sum_{v \in V} \sum_{j=r+1}^{p+r} w(v) \frac{\frac{a_j}{f_{vj}}}{\frac{a_1}{f_v(\delta_v(z))} + K_v} - F$$

Aplicando los lemas 1.21, 1.23 y 1.20 se tiene que la función $W_1(z)$ es cóncava en el intervalo $0 \leq z \leq l$, siendo l la longitud de la arista $[s, t]$. Por lo tanto, $\min_z W_1(z) = \min\{W_1(0), W_1(l)\}$. Esto significa que el centro de servicio x_1^* puede moverse a uno de los vértices sin que con ello aumente el valor de $W(X_p, A_{X_p} | Y_r^*, A_{Y_r^*}^*)$, o lo que es lo mismo, sin que se reduzca $W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p})$.

Si este proceso se realiza con todas aquellas localizaciones no nodales de Y_r^* , se concluye que existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que

$$W(V_r, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p})$$

y por lo tanto $(V_r, A_{Y_r^*}^*)$ sería la solución del $(r|X_p)$ -medianoide. ■

Desafortunadamente, esta demostración no sería válida cuando las funciones f_v fueran convexas ya que en ese caso no se podría asegurar la concavidad de $W_1(z)$ a lo largo de la arista $[s, t]$.

A continuación se demuestra que bajo los supuestos de este trabajo, la función de ingresos para la empresa entrante es cóncava con respecto a los atractivos. Este resultado es utilizado en el proceso de acotación del algoritmo de búsqueda global de ramificación y acotación propuesto en el capítulo 3 para resolver el problema de localización-atractivo.

Proposición 2.13 *Si las funciones f_v son reales y estrictamente positivas, la función de ingresos para la empresa entrante, fijadas sus r localizaciones, es creciente y estrictamente cóncava con respecto a los atractivos en $[I, S]^r$.*

Dem. La función de ingresos, fijado Y_r , es

$$ING(A_{Y_r}) = \sum_{v \in V} w(v) ING_v(A_{Y_r}),$$

con

$$ING_v(A_{Y_r}) = \frac{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}}}{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}} + \sum_{j=r+1}^{p+r} \frac{a_j}{f_{vj}}} = \frac{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}}}{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}} + K_v},$$

siendo $K_v = \sum_{j=r+1}^{p+r} \frac{a_j}{f_{vj}}$.

La función ING_v puede ponerse como la composición $ING_v = F_v \circ g_v$, donde

$$g_v(A_{Y_r}) = \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}} \text{ y } F_v(x) = \frac{x}{x + K_v}.$$

La función g_v es lineal y por lo tanto creciente y cóncava. Por otro lado, si $x > 0$, F_v es creciente y estrictamente cóncava. La función $ING_v(A_{Y_r})$ es creciente por ser composición de funciones crecientes y, aplicando el lema 1.21 se tiene que es estrictamente cóncava. Por lo tanto, $ING(A_{Y_r})$ es estrictamente cóncava por ser una suma de funciones estrictamente cóncavas. ■

Por la proposición 2.13, si la función de costes para los atractivos es convexa, el problema de determinar los atractivos óptimos, fijadas las localizaciones, sólo tiene óptimos globales. Si la globalidad no estuviese asegurada, se tendrá que emplear algoritmos de optimización global para obtener la solución del problema.

2.3.6 Preferencias proporcionales y servicios no esenciales

Cuando la demanda es no esencial se tiene que

$$w(v) \geq w_1(v) + w_2(v) + \dots + w_{p+r}(v), \forall v \in V.$$

Bajo la hipótesis de preferencias proporcionales, la parte de demanda del nodo v captada por el centro de servicio x_j viene determinada por

$$w_j(v) = \frac{w(v) - \sum_{k=1, k \neq j}^{p+r} w_k(v)}{f_{vj}} a_j,$$

donde, para forzar que la cantidad de demanda de v captada por x_j sea una parte de la que no ha sido captada por el resto de los centros, esto es para que

$$w_j(v) \leq w(v) - \sum_{k=1, k \neq j}^{p+r} w_k(v),$$

se impone que $a_j \leq f_{vj}$. De la igualdad anterior, considerando que se debe cumplir para cada uno de los centros de servicio, resulta que

$$w_j(v) \frac{f_{vj}}{a_j} + \sum_{k=1, k \neq j}^{p+r} w_k(v) = w(v), \quad \forall x_j \in X_{p+r}.$$

Como consecuencia, si $f_{vj} > a_j$, $\forall x_j \in X_{p+r}$, se tiene un sistema compatible determinado cuya matriz ampliada es la siguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{v1}}{a_1} & 1 & 1 & \dots & 1 & w(v) \\ 1 & \frac{f_{v2}}{a_2} & 1 & \dots & 1 & w(v) \\ 1 & 1 & \frac{f_{v3}}{a_3} & \dots & 1 & w(v) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{f_{vp+r}}{a_{p+r}} & w(v) \end{bmatrix}.$$

Restando la primera fila al resto, se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{v1}}{a_1} & 1 & 1 & \dots & 1 & w(v) \\ 1 - \frac{f_{v1}}{a_1} & \frac{f_{v2}}{a_2} - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 - \frac{f_{v1}}{a_1} & 0 & \frac{f_{v3}}{a_3} - 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 - \frac{f_{v1}}{a_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{f_{vp+r}}{a_{p+r}} - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando cada fila k por $\frac{a_k}{f_{vk} - a_k}$, con $k = 2, \dots, p+r$, resulta el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{v1}}{a_1} & 1 & 1 & \dots & 1 & w(v) \\ \frac{a_1 - f_{v1}}{a_1} \frac{a_2}{f_{v2} - a_2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_1 - f_{v1}}{a_1} \frac{a_3}{f_{v3} - a_3} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_1 - f_{v1}}{a_1} \frac{a_{p+r}}{f_{vp+r} - a_{p+r}} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Restándole a la primera el resto de las filas, queda la siguiente expresión para $w_1(v)$

$$\left(\frac{f_{v1}}{a_1} - \frac{a_1 - f_{v1}}{a_1} \sum_{k=2}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k} \right) w_1(v) = w(v).$$

Y por lo tanto,

$$w_1(v) = \frac{w(v)}{\frac{f_{v1}}{a_1} - \frac{a_1 - f_{v1}}{a_1} \sum_{k=2}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}}.$$

Procediendo de forma análoga con el resto de las filas, se obtienen las expresiones

$$w_j(v) = \frac{w(v)}{\frac{f_{vj}}{a_j} - \frac{a_j - f_{vj}}{a_j} \sum_{k=1, k \neq j}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}}.$$

De la igualdad anterior se obtiene la siguiente expresión para $w_j(v)$,

$$\begin{aligned} w_j(v) &= \frac{w(v)}{\frac{f_{vj}}{a_j} - \frac{a_j - f_{vj}}{a_j} \left(\sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k} - \frac{a_j}{f_{vj} - a_j} \right)} = \frac{w(v)}{\frac{f_{vj}}{a_j} - 1 - \frac{a_j - f_{vj}}{a_j} \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}} = \\ &= \frac{w(v)}{\frac{f_{vj} - a_j}{a_j} - \frac{a_j - f_{vj}}{a_j} \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}} = \frac{w(v) \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $f_{vj} > a_j$, $\forall v \in V$, $\forall x_j \in X_{p+r}$, se tiene que

$$w_j(v) = \frac{w(v) \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}}, \quad \forall v \in V, \quad \forall x_j \in X_{p+r}.$$

Si se considera que todos los centros de servicio tienen el mismo nivel de atractivo e igual a uno, la expresión resultante para los $w_j(v)$ es

$$w_j(v) = \frac{w(v) \frac{1}{f_{vj} - 1}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{1}{f_{vk} - 1}}, \quad \forall v \in V, \quad \forall x_j \in X_{p+r}.$$

Esta expresión coincide con la dada por Hakimi (1990) para el caso de servicios no esenciales y asignaciones proporcionales.

A continuación se prueba que las expresiones obtenidas para las demandas captadas están bien definidas siempre que se verifique que $a_j < f_{vj}$, $\forall v \in V$, $\forall x_j \in X_{p+r}$.

Proposición 2.14 Si $a_j < f_{vj}$, $\forall v \in V$, $\forall x_j \in X_{p+r}$, entonces se tiene que:

- $0 \leq w_j(v) \leq w(v)$, $\forall v \in V$, $\forall x_j \in X_{p+r}$
- $\sum_{j=1}^{p+r} w_j(v) \leq w(v)$, $\forall v \in V$.

Dem.

a. $0 \leq w_j(v) \leq w(v), \forall v \in V, \forall x_j \in X_{p+r}$.

Se tiene que $0 < \frac{a_j}{f_{vj}-a_j} < \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk}-a_k}$, y por lo tanto,

$$0 \leq \frac{w(v) \frac{a_j}{f_{vj}-a_j}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk}-a_k}} \leq w(v).$$

b. $\sum_{j=1}^{p+r} w_j(v) \leq w(v), \forall v \in V$.

Como $a_1 < f_{v1}$ se tiene que

$$w_1(v) + \dots + w_{p+r}(v) < w_1(v) \frac{f_{v1}}{a_1} + \dots + w_{p+r}(v) = w(v), \forall v \in V. \blacksquare$$

Imponiendo que $a_j < f_{vj}, \forall v \in V, \forall x_j \in X_{p+r}$, la función de beneficios de la empresa entrante para el caso de servicios no esenciales y asignaciones proporcionales viene dada por

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V} w(v) \frac{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}-a_j}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk}-a_k}} - \sum_{j=1}^r F(a_j)$$

A continuación se demuestra que el problema de $(r|X_p)$ -medianoide para el caso no esencial y asignaciones proporcionales tiene solución nodal.

Teorema 2.15 *Sea $N(V, A)$ una red. Se asume que $f_v(0) > S, \forall v \in V$, y que $p+r \leq |V|$. Entonces, bajo las condiciones (1) a (3), existe un par $(V_r, A_{V_r}) \in N(V, A)^r \times [I, S]^r$, con $|V_r| = r$, que es un $(r|X_p)$ -medianoide proporcional-no esencial en $N(V, A)$.*

Dem. Supóngase que existe $Y_r^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*\}$ con $A_{Y_r^*}^* = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*\}$, una solución del $(r|X_p)$ -medianoide para el caso proporcional-no esencial. Entonces

$$W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r \subset N, A_{Y_r} \in [I, S]^r} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

Se trata de demostrar que el conjunto Y_r^* está formado por nodos de v . Si los valores de $A_{Y_r^*}^*$ se consideran fijos, entonces

$$W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r \subset N} W(Y_r, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}).$$

Del teorema 1.54 se concluye que existe un conjunto $V_r \subset V$, con $|V_r| = r$, tal que

$$W(V_r, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = \max_{Y_r \subset N} W(Y_r, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}) = W(Y_r^*, A_{Y_r^*}^* | X_p, A_{X_p}). \blacksquare$$

A diferencia del caso esencial, no se puede llegar a ninguna conclusión general sobre la forma de la función de ingresos dadas las localizaciones. Por un lado, se puede asegurar que nunca es estrictamente cóncava, mientras que cuando $r = 1$ o, bajo ciertas condiciones cuando $r = 2$, sí que se puede asegurar su convexidad.

Proposición 2.16 *Si las funciones f_v son reales y positivas verificando que $a_j < f_{vj}$, $\forall v \in V$, $\forall x_j \in X_{p+r}$, entonces, cuando $r=1$, fijados Y_1 , X_p y A_{X_p} , la función de ingresos para la empresa entrante en el caso de servicios no esenciales y asignaciones proporcionales es estrictamente convexa respecto al atractivo en $[I, S]$.*

Dem. Para $r = 1$, los ingresos de la empresa entrante vienen dados por la suma de las siguientes funciones:

$$ING_v(a_1) = \frac{w(v) \frac{a_1}{f_{v1}-a_1}}{1 + \frac{a_1}{f_{v1}-a_1} + k_v} = \frac{w(v) a_1}{f_{v1} + (f_{v1} - a_1) k_v},$$

$$\text{con } k_v = \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_j}{f_{vj}-a_j}, \forall v \in V.$$

Sin más que calcular las derivadas se puede comprobar que la función es estrictamente creciente y estrictamente convexa respecto de los atractivos

$$ING'_v(a_1) = \frac{w(v) f_{v1} (1 + k_v)}{(f_{v1} + (f_{v1} - a_1) k_v)^2} > 0,$$

$$ING''_v(a_1) = \frac{w(v) 2f_{v1} (1 + k_v) k_v}{(f_{v1} + (f_{v1} - a_1) k_v)^3} > 0. \blacksquare$$

Proposición 2.17 *Sean $k_1, k_2, d_1, d_2 > 0$, con $k_2 > k_1$. Si $k_2 \geq (>) 2$ la función*

$$f(x, y) = \frac{\frac{x}{d_1-x} + \frac{y}{d_2-y} + k_1}{k_2 + \frac{x}{d_1-x} + \frac{y}{d_2-y}}$$

es convexa (estrictamente convexa) en $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / x < d_1, y < d_2\}$.

Dem. La matriz Hessiana de f es

$$H(x, y) = \frac{2(k_2 - k_1)}{\left(k + \frac{x}{d_1-x} + \frac{y}{d_2-y}\right)^3} H^*(x, y),$$

donde el primer factor es positivo y

$$H^*(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{d_1(d_1-x)\left(\frac{y}{d_2-y} + k_2 - 1\right)}{(d_1-x)^4} & \frac{-d_1 d_2}{(d_1-x)^2 (d_2-y)^2} \\ \frac{-d_1 d_2}{(d_1-x)^2 (d_2-y)^2} & \frac{d_2(d_2-y)\left(\frac{x}{d_1-x} + k_2 - 1\right)}{(d_2-y)^4} \end{bmatrix}.$$

Aplicando el criterio de los menores principales, se tiene

$$H_1^* = \frac{d_1 (d_1 - x) \left(\frac{y}{d_2 - y} + k_2 - 1 \right)}{(d_1 - x)^4} > 0$$

y

$$H_2^* = \frac{d_1 d_2}{(d_1 - x)^4 (d_2 - y)^4} (y + (k_2 - 1)(d_2 - y))(x + (k_2 - 1)(d_1 - x)) - d_1 d_2.$$

Además,

$$\begin{aligned} x + (k_2 - 1)(d_1 - x) &\geq d_1 \Leftrightarrow k_2 \geq 2 \frac{(d_1 - x)}{(d_1 - x)} = 2 \\ y + (k_2 - 1)(d_2 - y) &\geq d_2 \Leftrightarrow k_2 \geq 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $k_2 \geq 2$, $H_2^* \geq 0$ y se tiene que $f(x, y)$ es convexa. Además si se da la desigualdad estricta, entonces $H_2^* > 0$ y la función sería estrictamente convexa. ■

Proposición 2.18 Si las funciones f_v son reales y positivas, verificando que $a_j < f_{vj}$, $\forall v \in V$, $\forall x_j \in X_{p+r}$, entonces, cuando $r=2$, fijados Y_2 , X_p y A_{X_p} , si $k_v = \sum_{j=3}^{p+2} \frac{a_j}{f_{vj}-a_j} \geq (>) 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, la función de ingresos para la empresa entrante en el caso de servicios no esenciales y asignaciones proporcionales es (estrictamente) convexa en $[I, S]^2$.

Dem. Para $r = 2$, los ingresos de la empresa entrante vienen dados por la suma de las siguientes funciones:

$$ING_v(a_1, a_2) = \frac{w(v) \frac{a_1}{f_{v1}-a_1} + \frac{a_2}{f_{v2}-a_2}}{1 + k_v + \frac{a_1}{f_{v1}-a_1} + \frac{a_2}{f_{v2}-a_2}}$$

$$\text{con } k_v = \sum_{j=3}^{p+2} \frac{a_j}{f_{vj}-a_j}.$$

Por la proposición 2.17 se tiene que estas funciones son convexas bajo estas hipótesis y por tanto, la función de ingresos también lo será. ■

Cuando k_v es menor que uno, no se puede asegurar que la función sea convexa ya que en el caso del $(2|X_1)$ -medianoide de la figura 2.4 no se verifica esta condición. Obsérvese que en este caso $k_v = 0.25$ y el segundo menor $H_2^*(0.1, 0.1) = -0.67$, por lo que la función no es convexa en $(a_1, a_2) \in [0.1, 1]^2$. Analizando las primeras derivadas de la función de ingresos,

$$\frac{\partial ING_v}{\partial a_s} = \frac{w(v) f_{vs} (k_v + 1)}{(f_{vs} - a_s)^2 \left(1 + k_v + \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}-a_j} \right)^2} > 0,$$

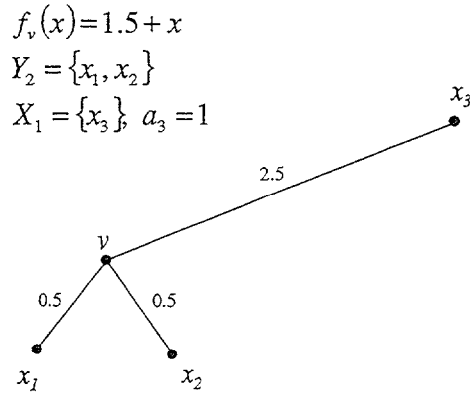


Figura 2.4: Red en la que la función de ingresos no es convexa con respecto al atractivo

se comprueba que son positivas, y por lo tanto, esta función es creciente por componentes, independientemente de la concavidad de las funciones f_v . Las segundas derivadas parciales de la función de ingresos para el nodo v , vienen dadas por

$$\frac{\partial ING_v}{\partial a_s \partial a_t} = \frac{-w(v) 2f_{vs} f_{vt} (k_v + 1)}{(f_{vs} - a_s)^2 (f_{vt} - a_t)^2 \left(1 + k_v + \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 ING_v}{\partial a_s^2} = \frac{w(v) 2f_{vs} (k_v + 1) \left(k_v + \sum_{j=1, j \neq s}^r \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}\right)}{(f_{vs} - a_s)^4 \left(1 + k_v + \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}\right)^3}.$$

Esto implica que la función de ingresos nunca será cóncava ya que el término H_{11} de la matriz Hessiana siempre es positivo.

Estas propiedades sobre la función de ingresos son de gran importancia a la hora de plantear el problema de localización-atractivo. Evidentemente, la forma de la función de beneficios dependerá de las funciones de costes. Dependiendo de los ingresos y costes, se tendrá que resolver el problema mediante alguno de los métodos de optimización global que se plantean en el siguiente capítulo.

2.4 El $(r|X_p)$ -medianoide discreto con atractivos

En algunos casos los nuevos centros de servicio tan sólo pueden estar localizados en determinados puntos de la red, o incluso, tal y como se demostró en la sección anterior, bajo ciertas condiciones, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario y proporcional en redes puede ser discretizado. En estas condiciones se puede encontrar una solución para este problema resolviendo un programa en el que existe un conjunto finito de localizaciones candidatas. En esta sección se formula un programa matemático para el $(r|X_p)$ -medianoide discreto para cada uno de los escenarios descritos en la sección 2.3.

Para simplificar la notación se utilizará i para denotar al vértice $v_i \in V$, siendo w_i su poder de compra. El conjunto finito de posibles ubicaciones en la red para los nuevos centros de servicio se denota J , utilizándose el subíndice j para representar una localización perteneciente a J . Además, $f_{ij} = f_i(d(i, j))$.

El problema general es determinar el conjunto de las r localizaciones (Y_r) y sus correspondientes niveles de atractivo (A_{Y_r}) , solución del siguiente problema

$$\max_{Y_r \subseteq J, A_{Y_r} \in [I, S]^r} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}),$$

donde la función W dependerá del tipo de preferencia y servicio analizado.

Se definen las siguientes variables,

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se establece un centro de servicio en } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es servido por el centro de servicio } j \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.4.1 Preferencias binarias y servicios esenciales

En este caso, los beneficios obtenidos por F_Y cuando se localiza en Y con niveles de atractivo A_Y , vienen dados por

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{i \in V(Y, A_Y)} w_i - \sum_{a_j \in A_Y} F(a_j),$$

donde

$$V(Y_r, A_{Y_r}) = V(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \{v \in V : G(v, Y_r) > G(v, X_p)\}.$$

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto con atractivos puede ser formulado

como el siguiente programa no lineal mixto:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} w_i x_{ij} - \sum_{j \in J} F(a_j) y_j \\ \text{s.a} \quad & \\ & a_j \leq S y_j \quad \forall j \in J \quad (2.1) \\ & a_j \geq I y_j \quad \forall j \in J \quad (2.2) \\ & \sum_{j \in J} y_j = r \quad (2.3) \\ & x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in V, \forall j \in J \quad (2.4) \\ & \frac{a_j}{f_{ij}} - \varepsilon - G(i, X_p) \geq (x_{ij} - 1) M \quad \forall i \in V, \forall j \in J \quad (2.5) \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in V \quad (2.6) \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in J \quad (2.7) \end{aligned}$$

En los conjuntos de restricciones (2.1) y (2.2) se impone que los niveles de atractivo para los nuevos centros de servicio se encuentren en el intervalo $[I, S]$. Obsérvese que el nivel de atractivo para una localización j en la que no se implante un centro de servicio, esto es si $y_j = 0$, es cero ya que se tendría que $0 \leq a_j \leq 0$. En la restricción (2.3) se determina el número de nuevos centros de servicio que se van a implantar. Las restricciones (2.4) hacen que la demanda de i sólo se asigne a j si existe un centro en j . En (2.5) se determina que un nodo i sólo asigna demanda a un centro en j si $\frac{a_j}{f_{ij}} > G(i, X_p)$. Si $\frac{a_j}{f_{ij}} - G(i, X_p) - \varepsilon < 0$ (e.d. $\frac{a_j}{f_{ij}} - G(i, X_p) \leq 0$), entonces $x_{ij} = 0$. Si $\frac{a_j}{f_{ij}} - G(i, X_p) - \varepsilon \geq 0$, entonces x_{ij} puede ser 0 ó 1. El valor de M debe ser suficientemente grande, pudiéndose tomar $M = [\max_i G(i, X_p)] + \varepsilon$. En las restricciones (2.6) se impone que la demanda del nodo i , en caso de que sea captada por la empresa entrante, sea asignada a uno sólo de los nuevos centros. Finalmente, en (2.7) se impone que las variables que determinan las asignaciones y las localizaciones de los nuevos centros de servicio han de ser binarias.

2.4.2 Preferencias binarias y servicios no esenciales

Procediendo de forma similar que en la sección 2.4.1, se propone el siguiente programa no lineal mixto para formular el $(r|X_p)$ -medianoide discreto con

atractivos en el caso binario-no esencial.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} w_i \frac{a_j}{f_{ij}} x_{ij} - \sum_{j \in J} F(a_j) y_j \\
 \text{s.a} \quad & \\
 & a_j \leq S y_j \quad \forall j \in J \\
 & a_j \geq I y_j \quad \forall j \in J \\
 & \sum_{j \in J} y_j = r \\
 & \frac{a_j}{f_{ij}} - \varepsilon - G(i, X_p) \geq (x_{ij} - 1) M \quad \forall i \in V, \forall j \in J \quad (2.8) \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in V \\
 & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in J
 \end{aligned}$$

con M suficientemente grande.

Obsérvese que el conjunto de restricciones (2.4) ya no es necesario. El objetivo de estas restricciones es imponer que $x_{ij} = 0$ si $y_j = 0$. En este caso, si $y_j = 0$ se tiene que $a_j = 0$ y por lo tanto, $-\varepsilon - G(i, X_p) < 0$. Aplicando (2.8) se tiene que $x_{ij} = 0$.

2.4.3 Preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales

Siguiendo la notación establecida en los apartados anteriores, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto para preferencias parcialmente binarias y servicios esenciales puede ser formulado como sigue:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} \frac{w_i \frac{a_j}{f_{ij}}}{\frac{a_j}{f_{ij}} + G(v, X_p)} x_{ij} - \sum_{j \in J} F(a_j) y_j \\
 \text{s.a} \quad & \\
 & a_j \leq S y_j \quad \forall j \in J \\
 & a_j \geq I y_j \quad \forall j \in J \\
 & \sum_{j \in J} y_j = r \\
 & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (2.9) \\
 & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in J
 \end{aligned}$$

Con las restricciones (2.9) se obliga a que cada nodo esté asignado a un nuevo centro de servicio, aquel con el que se consigán mayores beneficios.

Obsérvese que en este caso, tampoco hace falta el grupo de restricciones (2.4). Como un vértice i tiene que ser asignado a un único centro, $x_{ij} = 1$ para el centro j con $y_j = 1$ con mayor valor de

$$\frac{w_i \frac{a_k}{f_{ik}}}{\frac{a_k}{f_{ik}} + G(v, X_p)}$$

asociado.

La solución de este programa mixto, cuando $J = V$, se corresponde con una solución para el $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial en redes (teorema 2.9).

2.4.4 Preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales

El programa no lineal mixto correspondiente al problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto para preferencias parcialmente binarias y servicios no esenciales es similar al caso esencial. La única diferencia se encuentra en la función de ingresos.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in J} \frac{w_i \frac{a_j}{f_{ij}} [G(v, X_p) - 1]}{\left[\frac{a_j}{f_{ij}} G(v, X_p) \right] - 1} x_{ij} - \sum_{j \in J} F(a_j) y_j \\ \text{s.a.} \quad & a_j \leq S y_j \quad \forall j \in J \\ & a_j \geq I y_j \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} y_j = r \\ & \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in J \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, el conjunto de restricciones (2.4).

La resolución de este programa mixto, cuando $J = V$, es una solución para el $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-no esencial en redes (teorema 2.11).

2.4.5 Preferencias proporcionales y servicios esenciales

El programa propuesto para resolver el problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} w_i \frac{\sum_{j \in J} \frac{a_j}{f_{ij}}}{\sum_{j \in J} \frac{a_j}{f_{ij}} + \sum_{j \in X_p} \frac{b_j}{f_{ij}}} - \sum_{j \in J} F(a_j) y_j \\ \text{s.a} \quad & \\ & a_j \leq S y_j \quad \forall j \in J \\ & a_j \geq I y_j \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} y_j = r \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

donde b_j es el nivel de atractivo asociado al centro de servicio $j \in X_p$.

La solución de este programa mixto, cuando $J = V$, se corresponde con una solución para el $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial en redes (teorema 2.12).

2.4.6 Preferencias proporcionales y servicios no esenciales

Para resolver el problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto con atractivos en el caso proporcional-no esencial se puede utilizar el programa no lineal mixto utilizado en el caso anterior, cambiando únicamente la función objetivo.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} w_i \frac{\sum_{j \in J} \frac{a_j}{f_{ij} - a_j}}{1 + \sum_{j \in J} \frac{a_j}{f_{ij} - a_j} + \sum_{j \in X_p} \frac{b_j}{f_{ij} - b_j}} - \sum_{j \in J} F(a_j) y_j \\ \text{s.a} \quad & \\ & a_j \leq S y_j \quad \forall j \in J \\ & a_j \geq I y_j \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} y_j = r \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

La solución de este programa mixto, cuando $J = V$, se corresponde con una solución para el $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial en redes (teorema 2.15).

Obsérvese que si la función de costes para los atractivos verifican que $F(0) = 0$, la función objetivo de los programas no lineales anteriores admiten una simplificación al eliminar las variables y_j en los costes.

2.4.7 Extensiones

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto puede extenderse teniendo en cuenta las siguientes generalizaciones:

- Como el número de posibles localizaciones es finito, se puede considerar que los rangos para los niveles de atractivo puedan depender de las localizaciones. Por ejemplo, si a_j representa la superficie del centro, puede ocurrir que ésta pueda estar limitada por ley, o que las predisposiciones de inversión de la empresa entrante con respecto a una zona determinada tengan un límite o que la disponibilidad de superficie en las localizaciones no sean iguales en todas ellas. De esta forma puede considerarse que $a_j \in [I_j, S_j]$, $\forall j \in J$.
- Como las posibles ubicaciones constituyen un conjunto finito, se puede asumir que la función de costes para los atractivos no sea la misma en todas ellas, sino que esta función pueda depender de la localización. Con ello se reflejaría las posibles diferencias de costes que pudieran estar originadas por cuestiones de localización. Se podría considerar, por tanto, distintas funciones de costes fijos F_j , $\forall j \in J$.
- Las funciones f_i reflejan la percepción que los usuarios del nodo i tienen de la distancia a cualquier centro de servicio. Sin embargo, parece más lógico pensar que los vecinos de un determinado nodo no perciben de igual forma invertir 30 minutos en llegar a una tienda de ultramarinos que invertirlos en desplazarse hasta un hipermercado. Consecuentemente, la percepción de la distancia no sólo depende de donde están los usuarios, sino también de las características del centro de servicio al que tienen que desplazarse. Por lo tanto, podría modificarse el modelo introduciendo funciones de atracción que incorporaran estas diferencias.

2.5 Conclusiones

En este capítulo se hace un repaso de los resultados más destacables con respecto al modelo $(r|X_p)$ -medianoide considerando que la elección de los consumidores atiende a criterios de calidad del centro de servicio.

Además, se plantea una generalización del modelo del $(r|X_p)$ -medianoide propuesto por Hakimi (1990) en el que se consideran atractivos. La firma entrante pretende determinar las localizaciones y sus correspondientes niveles de atractivo de forma que se maximicen sus beneficios. Los beneficios son los ingresos asociados a la demanda capturada menos los costes asociados al nivel de atractivo.

Este nuevo problema ha sido analizado en los diferentes escenarios “preferencia-servicio” considerados en este trabajo. En los casos parcialmente binario y proporcional, esencial y no esencial, se demuestra la existencia de solución nodal para los problemas en redes. Sin embargo, para el caso binario no se puede asegurar que exista de este tipo de solución.

En el caso binario-esencial, a pesar de que no tiene que existir solución nodal, se ha demostrado que cuando los niveles de atractivos son dados, el problema en redes puede ser discretizado. Así, se puede obtener una solución del problema eligiendo las localizaciones y_j entre los puntos de un conjunto finito $C(a_j)$. Cada conjunto $C(a_j)$ se formaría eligiendo un punto en cada uno de los segmentos (s, t) , donde s y t son vértices o puntos (v, X_p, a_j) -isoatractivos, $v \in V$, consecutivos en una misma arista. La elección de este conjunto no es única, pero en cualquier caso, el número de candidatos para un nuevo centro de servicio, dado su nivel de atractivo, es menor o igual que $2|V||A| + |A|$.

En el caso binario-no esencial en red, cuando los atractivos son dados, puede que el supremo de la función objetivo no se alcance en ningún punto de la red, por que tan sólo se obtendría una ε -solución. Este problema ha sido discretizado, demostrando que se puede obtener una ε -solución donde las localizaciones y_j son vértices o puntos muy próximos a puntos (v, X_p, a_j) -isoatractivos, $v \in V$. En este caso, el número máximo de candidatos posibles para localizar un centro de servicio es $2|V||A| + |V|$.

El número de candidatos para localizar un nuevo centro de servicio, dado su nivel de atractivo, en el caso binario esencial y no esencial puede ser reducido, aunque nuestro objetivo se ha centrado en demostrar la posible discretización del problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes.

También en el caso binario, esencial y no esencial, cuando se pretende determinar los atractivos óptimos, dadas las localizaciones, no siempre se puede determinar la solución exacta. Mientras que en el caso binario siempre se ha de recurrir a una ε -solución, para el caso binario-no esencial esta circunstancia depende de la función de costes. Para obtener una ε -solución para A_Y , en el caso binario-esencial, basta con evaluar un máximo de $(|V| + 1)^r$ candidatos.

También se ha analizado las propiedades de la función de ingresos con respecto a los atractivos cuando las localizaciones son dadas. Estas propiedades son de gran utilidad en el diseño del algoritmo de búsqueda global empleado en la obtención de los atractivos óptimos de los nuevos centros de servicio. Así se demuestra que en los casos binarios esta función presenta discontinuidades de salto finito mientras que para el resto es continua. En todos los casos la función es creciente.

Por otro lado, se ha demostrado que en el caso proporcional-esencial y parcialmente binario-esencial la función de ingresos es cóncava (por componente en el caso parcialmente binario). Sin embargo, en el caso parcialmente binario-no esencial y en el proporcional-no esencial, cuando $r = 1$ y, bajo ciertas condiciones cuando $r = 2$, se demuestra que esta función es convexa. En general, se puede

asociar funciones de ingresos cóncavas a servicios esenciales y convexas a los no esenciales.

Por último, para cada uno de los escenarios estudiados, se formula el problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto como un programa no lineal mixto.

Capítulo 3

Algoritmos empleados en la resolución del $(r|X_p)$ -medianoide



En este capítulo se describen los algoritmos utilizados en esta tesis para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto. En los capítulos anteriores se demostró que, bajo ciertas condiciones, para la mayor parte de estos problemas puede determinarse una solución resolviendo el problema discreto correspondiente.

Para el caso sin atractivos, cuando las asignaciones son parcialmente binarias y proporcionales, en los casos esencial y no esencial, el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes tiene solución nodal. Sin embargo, aunque este tipo de solución no puede asegurarse en el caso binario, se demostró que puede obtenerse una solución para el problema en redes evaluando un conjunto finito de puntos, pudiéndose tratar de una ε -solución en el caso binario-no esencial.

En el caso con atractivo, también se ha demostrado la existencia de solución nodal en los problemas parcialmente binario y proporcional, esencial y no esencial. Por lo tanto, se puede obtener una solución de este problema en redes utilizando un programa no lineal mixto en el que las posibles localizaciones para los nuevos centros de servicio son los vértices de la red.

Para resolver el problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando no interviene el atractivo, se ha utilizado un algoritmo de búsqueda de tipo greedy, uno de intercambio y uno de búsqueda tabú para determinar las localizaciones que maximizan el beneficio. Cuando se incorpora el atractivo al problema, la situación es mucho más compleja ya que, además de utilizar estos algoritmos de búsqueda combinatoria para determinar las localizaciones, se ha tenido que emplear un algoritmo de optimización global para determinar los niveles óptimos de atractivo.

De los algoritmos de búsqueda combinatoria se analiza con más detalle el de

búsqueda tabú, por ser el más reciente y el que presenta un diseño más particular. También se describen los algoritmos de búsqueda global que se podrían emplear para obtener los niveles de atractivo, especialmente el de ramificación y acotación.

3.1 Algoritmos de búsqueda combinatoria

3.1.1 Algoritmo greedy

El **algoritmo greedy (GR)** (Kuehn y Hamburger, 1963) consiste en localizar inicialmente el centro de servicio que optimice la función objetivo. Posteriormente, se añade la localización que aporte la mayor mejora, y así consecutivamente hasta alcanzar el número de localizaciones buscado.

3.1.2 Algoritmo de intercambio

El **algoritmo de intercambio (TB)** fue inicialmente propuesto por Teitz y Bart (1968). Partiendo de una solución inicial, se sustituye la primera de las localizaciones que forman parte de ella por cada uno de los posibles candidatos que no pertenecen a la solución actual. Si en alguno de esos intercambios se consigue una mejora en el objetivo esta localización saldría de la solución y entraría aquella con la que se consiguió la mayor mejora. Este proceso se repite para cada una de las localizaciones que forman parte de la solución hasta que se produzca una iteración completa en la que no se consigue ninguna mejora.

3.1.3 Algoritmo de búsqueda tabú

La **búsqueda tabú (TS)** (Glover, 1993) es un método heurístico para la resolución de problemas de optimización basado en la búsqueda por entornos. Partiendo de una solución factible inicial, el algoritmo utiliza distintos mecanismos para realizar movimientos entre las soluciones factibles de su entorno con el fin de encontrar soluciones que mejoren la actual. Este algoritmo introduce diversas estrategias para evitar el estancamiento en óptimos locales. Así, durante la búsqueda permite la selección de soluciones en las que no se producen mejoras y almacenando el óptimo local como posible solución, el algoritmo puede continuar por otras zonas aún no estudiadas.

En el TS se utilizan dos estructuras de memoria. Por un lado se tiene la memoria a corto plazo, en la que se almacenarían las localizaciones utilizadas en las soluciones más recientemente. Con ello se busca evitar de forma sistemática dos de los grandes inconvenientes de los heurísticos de búsqueda local, que el proceso entre en un ciclo o que se vuelva a un óptimo local ya evaluado. Cuando alguna localización ha sido desechada en un movimiento de una solución a otra, es etiquetada como *tabú*, lo que impide que vuelva a ser considerada hasta que cambie su estado. El estado tabú puede ser obviado si durante el proceso de búsqueda se

observa que la introducción de la localización produce una mejora significativa. Este procedimiento se conoce como *aspiración*.

Por otro lado, existe una estructura de memoria a largo plazo en la que se almacena la frecuencia con la que una localización ha formado parte de la solución. Esta información es utilizada en los procesos de *intensificación* y *diversificación*. Aquellas soluciones que se consideran potencialmente buenas pueden ser punto de partida para una intensificación de la búsqueda en su entorno. Cuando el proceso no proporciona mejoras con la frecuencia deseada se puede aplicar una intensificación, o se puede *diversificar* la búsqueda reorientándola hacia otra zona eligiendo una nueva solución inicial.

Para controlar el proceso de diversificación se utiliza el parámetro *tmax*, con el que se indica el número máximo de movimientos que se pueden realizar partiendo de una solución inicial antes de llevar a cabo la diversificación. Por otro lado, se pueden imponer criterios con los que provocar una diversificación sin tener que realizar los *tmax* movimientos prefijados inicialmente. Para este fin, se utiliza el parámetro *cambio*, con valores entre 0 y 1 (ambos incluidos), que determina el número máximo de movimientos de no mejora ($cambio \times tmax$) a partir de una solución inicial que son permitidos, llevándose a cabo un cambio de solución inicial si este umbral es rebasado. El parámetro *smax* indica el número de veces que se puede reiniciar el proceso de búsqueda con una nueva solución de partida. Por tanto, la regla de parada de este algoritmo viene determinada por el número máximo de movimientos ($smax \times tmax$) que se pueden realizar.

Una adecuada elección de las estrategias de aspiración, intensificación y diversificación, proporcionan una mayor eficacia en la obtención de la solución óptima del problema. En los ejemplos aquí presentados se intensifica sobre las soluciones obtenidas a partir de cada solución inicial que alcancen al menos un 90 % de la mejor solución obtenida hasta el momento.

En la figura 3.1 se muestra el organigrama del algoritmo de búsqueda tabú desarrollado para obtener las localizaciones de los nuevos centros de servicio. El proceso se puede estructurar en dos fases, una fase local en la que, partiendo de una solución inicial, se busca mejorar la solución moviéndose entre los vecinos. Los resultados obtenidos de esta búsqueda local son actualizados a un contexto global donde se comparan las soluciones locales. Es en este ámbito es donde se decide si se ha de intensificar sobre alguna solución local, bien por mejorar la solución actual o bien por estar muy próxima a ella. Por último, se ha de decidir si se inicia una nueva fase de búsqueda local y cuál debe ser la solución de partida, en ese caso.

Cada una de las posibles localizaciones viene etiquetada por dos parámetros. Por un lado, la *frecuencia* con la que ha formado parte de la solución a lo largo del proceso y por otro, la *etiqueta tabú*. El moverse de una solución a otra supone desechar una localización y reemplazarla por otra distinta de las que ya forman parte de la solución. La localización que sale pasa a ser etiquetada como tabú, lo que significa que no puede volver a formar parte de la solución hasta que no cambie ese estado, cuya duración se llama *tenencia tabú* (*t-tabú*).

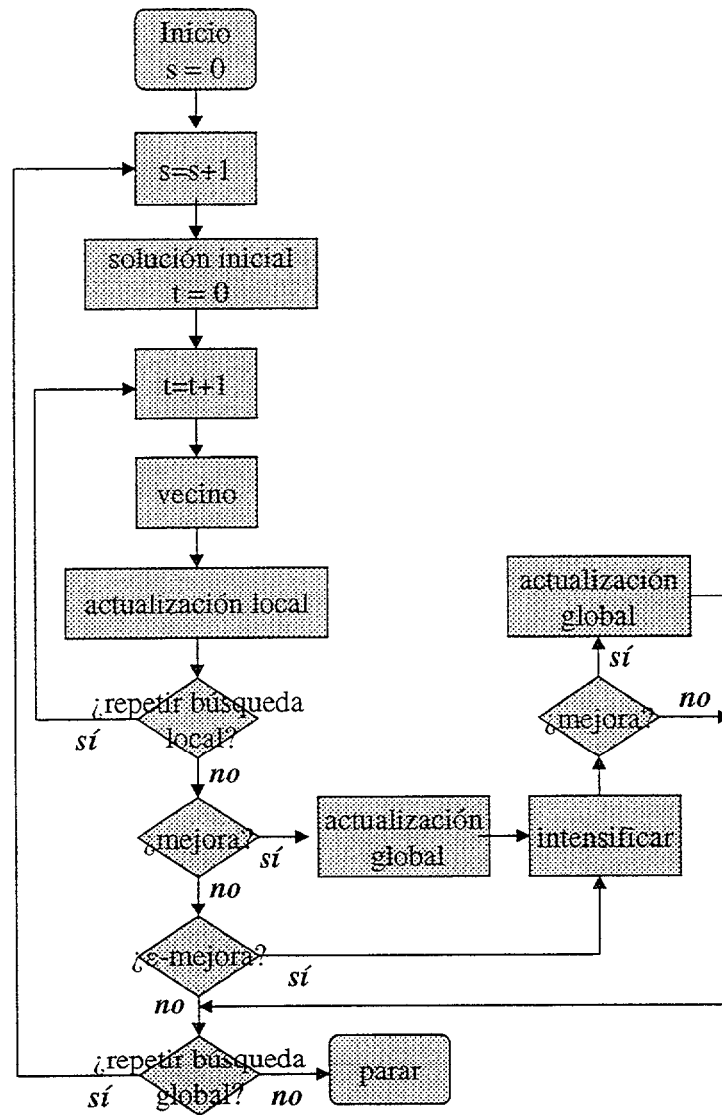


Figura 3.1: Organigrama del algoritmo de búsqueda tabú

En algunos trabajos se recomienda que la duración de este período esté entre cinco y diez movimientos. Aunque el valor de $t\text{-tabú}$ puede ser constante durante todo el proceso, ha resultado ser más efectivo que este valor sea calculado aleatoriamente en cada momento. En este trabajo se han tomado valores aleatorios comprendidos entre 3 y 11 ($t\text{-tabú} \in [3, 11]$).

Otro factor importante para implementar un algoritmo de búsqueda tabú es la elección del número máximo de movimientos a realizar partiendo de una solución inicial, $tmax$, así como el máximo de veces que el proceso puede ser reinicializado partiendo de una nueva solución inicial, $smax$. El valor de $tmax$, para los casos de localización combinatoria, como es el estudiado en este trabajo, suele ser función del número de nodos.

A continuación se presenta el algoritmo propuesto para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide con atractivos. El mismo algoritmo es válido cuando no se incorporan los atractivos, basta modificarlo eliminando la búsqueda del atractivo.

Algoritmo 3.1 (búsqueda tabú)

Paso 0 Hacer $X_{opt} = A_{opt} = \emptyset$, $V_{opt} = -\infty$ (solución global). Inicializar $s = 0$, $no_mejora = 0$. Todas las localizaciones son etiquetadas como $no_tabú$ y sus frecuencias se inicializan a 0.

Paso 1 1. Hacer $s = s + 1$, $t = 1$.

2. Elegir una solución inicial, X_s^t y actualizar sus frecuencias. Obtener sus niveles de atractivo, A_s^t , y el valor objetivo, V_s^t , tales que

$$V_s^t = W(X_s^t, A_s^t | X_p, A_{X_p}) = \max_{A_{Y_r}} W(X_s^t, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}).$$

3. Hacer $V_s^{opt} = V_s^t$, $X_s^{opt} = X_s^t$ y $A_s^{opt} = A_s^t$ (óptimo local).

Paso 2 1. Hacer $t = t + 1$.

2. Elegir un vecino X_s^t y actualizar sus frecuencias y la etiqueta tabú de la localización que salió de X_s^{t-1} . Calcular A_s^t y V_s^t , como se indicó en el paso 1.2.

3. Actualización local/global.

– Si $V_s^t \leq V_s^{opt}$, $no_mejora = no_mejora + 1$.

– En otro caso, hacer $no_mejora = 0$, $V_s^{opt} = V_s^t$, $X_s^{opt} = X_s^t$ y $A_s^{opt} = A_s^t$ (actualización local). Si $V_s^{opt} > V_{opt}$, hacer $V_{opt} = V_s^{opt}$, $X_{opt} = X_s^{opt}$ y $A_{opt} = A_s^{opt}$ (actualización global).

4. Si $t < tmax$ ó $no_mejora \leq cambio * tmax$ volver a 2.1. En otro caso, ir a paso 3.

- Paso 3**
1. Si $V_s^{opt} \geq \beta V_{opt}$, ir al paso 4.
 2. Si $s < smax$, volver al paso 1. En otro caso, parar. La solución es X_{opt}, A_{opt} , y V_{opt} .
- Paso 4** Intensificar sobre X_s^{opt} . Sean X_{int}, A_{int} , y V_{int} , los resultados de la intensificación. Actualizar las frecuencias y las etiquetas tabú.
1. Si $V_{int} > V_{opt}$, hacer, $V_{opt} = V_{int}$, $X_{opt} = X_{int}$ y $A_{opt} = A_{int}$.
 2. Ir a 3.2.

En el paso 0, se inicializan las soluciones globales, el conjunto de las r localizaciones X_{opt} , sus niveles de atractivo A_{opt} y su correspondiente valor V_{opt} . Además, se inicializa el contador de cambios de entorno, o de nuevas soluciones iniciales, $s = 0$. Todas las localizaciones son etiquetadas como no tabú y sus frecuencias son 0.

El procedimiento para etiquetar una localización como tabú es el siguiente. Cada vez que una localización es desechada de la solución, ésta pasa a ser tabú durante t -tabú movimientos. Se calcula aleatoriamente el valor de t -tabú y en la etiqueta tabú de esa localización se almacena la iteración hasta la cual no puede entrar a formar parte de la solución. Así, el valor almacenado en la etiqueta tabú de una localización que ha sido catalogada como tal en la iteración correspondiente a s^* y t^* será, $(s^* - 1)t^* + t$ -tabú.

Cada localización, además de la etiqueta tabú, viene caracterizada por la frecuencia con que ha intervenido en la solución durante el proceso. Así, en cada momento se irá contando las participaciones de cada nodo y se almacenará en su correspondiente etiqueta de frecuencia.

En el paso 1 se inicializa el contador de búsqueda local (t) y se actualiza el de búsqueda global (s). A continuación se elige una solución inicial a partir de la cual se desarrollará el proceso de ámbito local. El óptimo local es inicializado con los valores obtenidos para la solución inicial.

La elección de la solución inicial en cada reinicialización del proceso está basada en el criterio de dispersión. Con el fin de que las nuevas soluciones iniciales no reincidan en zonas ya investigadas, se elegirán aquellas localizaciones etiquetadas con menor frecuencia.

Una vez se han elegido las localizaciones que forman parte de la s -ésima solución inicial, X_s^1 , se obtienen sus niveles de atractivo, A_s^1 , y el valor objetivo correspondientes, V_s^1 , tal y como se indica en el paso 1.2, donde W es la función de beneficios correspondiente.

La búsqueda local comienza partiendo de esta solución inicial. En cada movimiento se desplaza de la solución actual a un vecino. Para ello, cada localización de la solución actual es intercambiada por sus nodos adyacentes, mientras no estén etiquetados como *tabú* o formen parte de la solución actual,

manteniendo el resto de las localizaciones de la solución fijas. El vecino elegido será aquella solución que resulte del intercambio con el que se proporcione el mayor beneficio. Cuando todos los posibles candidatos a vecino sean tabú, se lleva a cabo un proceso de aspiración permitiendo elegir la localización con etiqueta tabú más baja.

En el paso 2.3 se actualizan los óptimos locales y globales. Con el fin de cambiar de solución inicial cuando el proceso degenere y no se obtengan mejoras con la frecuencia deseada, se contabilizan los casos de no mejora. Así, en el punto 2.4, para la regla de parada del proceso local se tiene en cuenta, además del límite de iteraciones $tmax$, la condición de que se produzca una mejora local en al menos $cambio * tmax$ iteraciones.

En el paso 3 se decide intensificar las soluciones locales que sean al menos un $(\beta \times 100)$ % del actual óptimo global. En los ejemplos analizados en este trabajo se han considerado valores de β de 0.8 y 0.9. Por lo tanto, serán intensificadas aquellas soluciones locales que sean al menos un 80% - 90 % de la solución actual. Si el resultado de la intensificación mejora la solución global, se actualiza este óptimo y, si aún no se ha llegado al nivel máximo de nuevas soluciones iniciales, se reinicia el proceso. Si $s = smax$, el proceso termina con la correspondiente solución global.

3.2 Optimización global

3.2.1 Introducción

En esta sección se presentan algunos métodos para resolver el problema de obtener los niveles de atractivo que maximicen los beneficios, dadas las localizaciones donde se implantan los nuevos centros de servicio. El planteamiento general del problema es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in D \subset \mathbb{R}^r \end{array}$$

y se desea encontrar el óptimo global, esto es, una solución $x^* \in D$, tal que $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$.

La complejidad de este problema reside en que existen casos en los que la función objetivo tiene varios óptimos locales y no se puede asegurar la globalidad de éstos. En estas situaciones, el empleo de algoritmos que utilizan herramientas tales como las derivadas, el gradiente o subgradiente, puede desembocar en un óptimo local. El problema es bastante complejo ya que no existen criterios locales para discernir de forma generalizada si la solución local encontrada es global.

En este trabajo, para la obtención de los niveles óptimos para los atractivos asociados a los nuevos centros de servicios, cuando sus localizaciones son dadas, se plantea la resolución de varios tipos de programas no lineales. Por ejemplo, la función de ingresos en el caso proporcional-esencial, dadas las localizaciones, es

cóncava, y por lo tanto, si la función de costes para los atractivos es convexa, la función de beneficios es cóncava. Esto da lugar a un programa de maximización cóncavo definido sobre un conjunto compacto. Este problema puede ser resuelto utilizando herramientas convencionales ya que los posibles óptimos locales son globales. Como alternativa para resolver este tipo de problemas, se puede utilizar el programa informático LINGO que utiliza un algoritmo basado en el método del gradiente reducido.

Por otro lado, bajo ciertas condiciones, los ingresos para el caso proporcional no esencial son convexos, y por lo tanto, si las funciones asociadas a los costes de los atractivos son cóncavas, se tiene un programa no lineal convexo definido sobre un poliedro. Estas funciones pueden tener más de un óptimo local pero, se puede asegurar que la solución global del problema de maximización se encuentra en uno de los vértices. Para resolver este caso particular, se propone un sencillo algoritmo que evalúa la función objetivo en todos los vértices de la región factible.

Si la situación no es ninguna de las expuestas anteriormente, el problema es mucho más complejo. Para resolver este tipo de problemas se ha utilizado un algoritmo de búsqueda global basado en técnicas de ramificación y acotación.

A continuación se describen los algoritmos de búsqueda global propuestos para la obtención de los niveles óptimos de atractivos, dadas las localizaciones.

3.2.2 Método del gradiente reducido

Para describir este método se sigue el desarrollo presentado en el Bazaraa, Shera y Shetty (1993). El problema a resolver es el siguiente

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \\ \text{s.a.} & x \geq 0, x \in \mathbb{R}^r \end{array}$$

donde A es una matriz de orden $m \times n$, b un vector de orden n y f una función de clase C^1 en el dominio. Además, se supone que cualquier conjunto de m columnas de A es linealmente independiente, y que cualquier punto extremo de la región factible tiene al menos m componentes positivas.

Sea x una solución factible del problema. Por las características de A , ésta se puede expresar como $[B, N]$ donde B es una matriz invertible de orden $m \times m$, y x^t se expresa como $[x_B^t, x_N^t]$, siendo $x_B > 0$. El vector gradiente tendrá una descomposición similar, $\nabla f(x)^t = [\nabla_B f(x)^t, \nabla_N f(x)^t]$.

El proceso se basa en la búsqueda de direcciones factibles de mejora para f en el punto x , esto es, vectores d tales que $\nabla f(x)^t d < 0$ y $Ad = 0$, con $d_i \geq 0$ si $x_i = 0$. Si $d^t = [d_B, d_N]$, entonces $0 = Ad = Bd_B + Nd_N$, de donde $d_B = -B^{-1}Nd_N$. Así, se define el vector gradiente reducido $r^t = [r_B^t, r_N^t] = \nabla f(x)^t - \nabla_B f(x)^t B^{-1}N = [0, \nabla_N f(x)^t - \nabla_B f(x)^t B^{-1}N]$. Por lo tanto, sin más que operar, se tiene que $\nabla f(x)^t d = r_N^t d_N$.

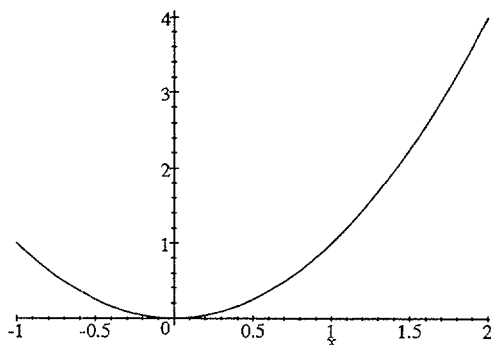


Figura 3.2: Función convexa con dos máximos locales

Basándose en los cálculos anteriores y denotando por I al conjunto de índices de las componentes básicas ($B = \{a_i / i \in I\}$), se propone como dirección factible de mejora

$$d_i = \begin{cases} -r_i & \text{si } i \notin I \text{ y } r_i \leq 0 \\ -x_i r_i & \text{si } i \notin I \text{ y } r_i > 0 \end{cases}$$

$$d_B = -B^{-1} N d_N.$$

Bajo los supuestos establecidos en esta sección se puede demostrar (teorema 10.6.1, Bazaraa et al (1993)) que la dirección obtenida anteriormente es una dirección factible de mejora. Además, el punto factible x es un punto de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) si y sólo si $d = 0$. En Bazaraa et al (1993) se puede encontrar una descripción más detallada del algoritmo.

3.2.3 Programación convexa

Se trata de resolver el problema

$$\begin{aligned} \max & \quad f(x) \\ \text{s.a.} & \quad x \in D \subset \mathbb{R}^r \end{aligned}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^r$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo, y f es una función convexa en D . Es un problema de los llamados multiextremo, ya que se pueden encontrar ejemplos con varios extremos locales en D . Por ejemplo, si $D = [-1, 2]$ y $f(x) = x^2$, existen dos óptimos locales, en $x = -1$ y $x = 2$ (figura 3.2).

En lo sucesivo y como en el problema que deseamos resolver el conjunto factible es un r -rectángulo, se consideramos que D es un r -rectángulo.

Teorema 3.1 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y D un conjunto convexo y compacto no vacío de \mathbb{R}^r , entonces, el máximo global de f en D se alcanza en un vértice de D .

Un r -rectángulo puede ser caracterizado utilizando sus vértices inferior izquierdo y superior derecho. Sean $a, b \in \mathbb{R}^r$, con $a < b$. En adelante se denotará por $D(a, b)$ al r -rectángulo cuyos vértices inferior izquierdo y superior derecho son a y b , respectivamente, $D(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^r : a \leq x \leq b\}$. El número de vértices de un r -rectángulo es 2^r , y éste será entonces el número de evaluaciones necesarias para obtener la solución del problema.

Los vértices de $D(a, b)$ pueden obtenerse mediante un proceso enumerativo. Se toma la primera componente de a y b , y cada una de ellas se combina con cada una de las segundas componentes. Los puntos resultantes se combinan con las terceras componentes y así sucesivamente hasta completar las r componentes. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 , para obtener los vértices de $D(a, b)$, siendo $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$, el procedimiento serían el siguiente

$$\begin{array}{rcl}
 & & a_3 \quad (a_1, a_2, a_3) \\
 & / & \\
 & a_2 < & b_3 \quad (a_1, a_2, b_3) \\
 a_1 & & \\
 & \backslash & \\
 & & a_3 \quad (a_1, b_2, a_3) \\
 & b_2 < & b_3 \quad (a_1, b_2, b_3) \\
 & & a_3 \quad (b_1, a_2, a_3) \\
 & / & \\
 & a_2 < & b_3 \quad (b_1, a_2, b_3) \\
 b_1 & & \\
 & \backslash & \\
 & & a_3 \quad (b_1, b_2, a_3) \\
 & b_2 < & b_3 \quad (b_1, b_2, b_3)
 \end{array}$$

Por lo tanto, para resolver el problema

$$\begin{array}{l}
 \max \quad f(x) \\
 \text{s.a.} \quad x \in D(a, b) \quad ,
 \end{array}$$

con $a, b \in \mathbb{R}^r$, $a < b$, se puede emplear el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.2 (Maximización convexa)

Paso 1. Hallar $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2^r}\}$, conjunto de todos los vértices de $D(a, b)$.

Paso 2. Encontrar v^* tal que $f(v^*) = \max_{v \in V(D)} f(v)$. El vértice v^* será la solución buscada.

3.2.4 Método de ramificación y acotación.

Los procedimientos de búsqueda global basado en la técnica de ramificación y acotación consisten en dividir la región factible en subconjuntos, generando particiones cada vez más finas, con el fin de localizar el subconjunto donde se encuentre la solución óptima. El algoritmo converge a la solución óptima, aceptándose ε -soluciones para reducir los tiempos de computación. A continuación, siguiendo el Horst y Tuy (1993), se hace una breve descripción de esta técnica.

Supóngase que el problema a resolver es

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in D \subset \mathbb{R}^r \end{array}$$

donde se asume que existe el máximo de la función f en D .

Inicialmente se lleva a cabo una partición del conjunto factible en un número finito de subconjuntos D_i , $i \in I$ ($D = \cup_{i \in I} D_i$).

Para cada uno de los conjuntos D_i , se calcula una cota superior, $\alpha(D_i)$, y otra inferior, $\beta(D_i)$, del $\sup f(x)$ en D_i ,

$$\beta(D_i) \leq \sup_{x \in D_i} f(x) \leq \alpha(D_i).$$

Se toman como cotas globales $\beta = \max_{i \in I} \beta(D_i)$ y $\alpha = \max_{i \in I} \alpha(D_i)$, y por lo tanto

$$\beta \leq \max_{x \in D} f(x) \leq \alpha.$$

Si $\alpha = \beta$, éste será el máximo buscado. En caso contrario, se elige un subconjunto D_i y se repiten los pasos anteriores hasta obtener el óptimo.

Para reducir el tiempo de computación, se considera suficiente encontrar una ε -solución, para ello, la regla de parada pasa a ser $\alpha - \beta \leq \varepsilon$, con lo que se asegura que el error cometido no sea superior a ε . Otras reglas de parada utilizadas son $\beta(1 + \varepsilon) \geq \alpha$ o $\frac{|\alpha - \beta|}{\alpha} \leq \varepsilon$.

Las cotas pueden ser aprovechadas para descartar algunos subconjuntos D_i sin tener que particionarlos. Si la cota superior de D_i es inferior a la cota inferior global, es decir si

$$\beta(D_i) \leq \sup_{x \in D_i} f(x) \leq \alpha(D_i) < \beta \leq \max_{x \in D} f(x),$$

este subconjunto D_i puede ser eliminado ya que no contiene la solución óptima.

El algoritmo propuesto en este trabajo se puede considerar como una adaptación del algoritmo general propuesto por Horst y Tuy (1993) para la resolución de problemas de optimización global mediante ramificación y acotación.

Algoritmo 3.3 (Ramificación y acotación)

.

Paso 0.

Hacer $D_0 = D$, $k = 0$. Hallar $P_0 = \{D_i : i \in I_0\}$ una partición de D_0 .

Para cada $D_i \in P_0$ calcular $V(D_i)$, conjunto de vértices de D_i , y las cotas

- $\beta(D_i) = \max_{v_i \in V(D_i)} f(v_i)$, cota inferior de $\sup f$ en D_i que se alcanza en el vértice x_i .
- $\alpha(D_i)$ cota superior de f en D_i .

Calcular las cotas globales $\alpha_0 = \max\{\alpha(D_i) : D_i \in P_0\}$ y $\beta_0 = \max\{\beta(D_i) : D_i \in P_0\}$, con x_0 el punto donde se obtuvo β_0 .

Si $\frac{|\alpha_0 - \beta_0|}{\alpha} = 0$ ($\leq \varepsilon$) parar. La solución óptima (ε -solución) es x_0 . En otro caso, ir al paso 1.

Paso 1.

- i. Eliminar de la partición actual P_k todos los subconjuntos tales que $\alpha(D_i) < \beta_k$, $D_i \in P_k$.
- ii. Elegir $D \in P_k$ y hacer $k = k + 1$.
Hallar P'_k , partición de D y actualizar la lista de subconjuntos cambiando el elegido por su partición, $P_k = P'_k \cup (P_{k-1} - D)$.
- iii. Calcular, siguiendo el mismo procedimiento que en el paso 0, las cotas para los elementos de P'_k ($\alpha'(D'_i)$, $\beta'(D'_i) : D'_i \in P'_k$). Hacer $\alpha(D'_i) = \min\{\alpha'(D'_i), \alpha(D)\}$.
- iv. Actualizar las cotas globales

$$\alpha_k = \max\{\alpha(D_i) : D_i \in P_k\} \text{ y } \beta_k = \max\{\beta(D) : D_i \in P_k\},$$

con x_k el punto donde se obtuvo β_k . Si $\frac{|\alpha_k - \beta_k|}{\alpha} = 0$ ($\leq \varepsilon$) parar. La solución óptima (ε -solución) es x_k . En otro caso, repetir el paso 1.

Para aplicar el algoritmo se han de definir tres elementos: la elección del tipo de partición, el cálculo de las cotas y la elección del conjunto de P_k a partir del cual se continúa con el proceso de partición.

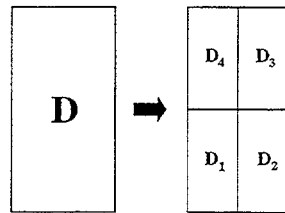
Elección de la partición

Como la región factible del problema tratado es un r -rectángulo, la elección más sencilla es la partición de esos conjuntos en rectángulos.

Definición 3.2 Una subdivisión de un r -rectángulo es por **bisección** si en cada paso este conjunto es dividido en dos al cortarlo por un hiperplano que pase por el punto medio de la arista de mayor longitud del rectángulo.

Definición 3.3 Una subdivisión se denota **2^r -partición** si resulta de dividir un r -rectángulo en 2^r nuevos rectángulos de dimensión r , obtenidos al cortar cada arista del conjunto padre con un hiperplano perpendicular que pasa por su punto medio.

Por ejemplo si D es un rectángulo en \mathbb{R}^2 , su partición vendría dada por



La ventaja de la utilización de este tipo de partición es que cada uno de los r -rectángulos queda determinado por sus vértices inferior izquierdo (a) y superior derecho (b) (ver el procedimiento enumerativo de la sección 3.2.3).

Por otro lado, cada uno de los hijos de $D(a, b)$ puede ser obtenido a partir del elemento inferior izquierdo, es decir de $D_1 = D(a, a + \frac{b-a}{2})$. Sea $V(D_1) = \{a = v_1, v_2, \dots, v_{2^r}\}$ los vértices de D_1 , entonces los rectángulos de la partición de D se corresponden con

$$D_j = D\left(v_j, v_j + \frac{b-a}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, 2^r.$$

Definición 3.4 Dado un r -rectángulo D , se define el **diámetro** de D , $\delta(D)$, como la longitud de la mayor de sus aristas.

Definición 3.5 Una subdivisión es **exhaustiva** si el diámetro de cualquier secuencia decreciente de elementos de la partición generada por la subdivisión tiende a cero.

Lema 3.6 (Horst y Tuy, 1993) La partición por bisección es exhaustiva.

Lema 3.7 La 2^r -partición es exhaustiva.

Dem. Se puede demostrar de forma similar a la bisección (Horst y Tuy, 1993). ■

El resultado del lema anterior es intuitivo si se considera que la 2^r -partición da lugar a conjuntos de diámetro menor que la bisección. Este tipo de subdivisión ha sido utilizado por otros autores como Plastria (1992) y Hansen, Peeters y Thisse (1995,1997).

Para acotar el error máximo permitido para los valores de las variables se define el parámetro *diámetro mínimo* (dm). Este parámetro determina el valor mínimo que puede tener el diámetro de un subconjunto para continuar particionándolo. Así,

si $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*)$ es la solución óptima del problema y $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$ es la mejor solución obtenida por el algoritmo, se tiene que $|x_i^* - x'_i| \leq dm, \forall i = 1, 2, \dots, r$. Cuanto menor sea este valor, mayor precisión se tendrá y a cambio se producirá un mayor coste computacional.

Elección de las cotas

Para la elección de las cotas se han propuesto varias alternativas dependiendo de la forma de las funciones que intervienen en los beneficios (ingresos y costes de atractivos). El cálculo de la *cota 1* se basa en el crecimiento de las funciones, tanto la de ingresos como la de costes de los atractivos. La *cota 2*, puede ser utilizada en aquellos casos en los que la función de beneficios puede descomponerse como diferencias de funciones convexas. Esta cota podría ser aplicada, por ejemplo al caso proporcional-no esencial cuando la función de costes fijos de los atractivos admite una descomposición de este tipo. Por último, la *cota 3* se utiliza cuando los beneficios pueden expresarse como diferencias de funciones cóncavas y crecientes. Esta cota podría ser empleada, por ejemplo, en el caso proporcional-esencial, ya que la función de ingresos en estas circunstancias es cóncava.

Cota 1 (diferencia de funciones crecientes)

Cuando la función objetivo se puede expresar como $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, donde f_1 y f_2 son funciones crecientes y continuas, el cálculo de una cota superior para f puede hacerse siguiendo el siguiente razonamiento.

Sea $D(a, b)$ el r -rectángulo para el cual se desea calcular la cota superior. Como las funciones f_1 y f_2 son crecientes y continuas en $D(a, b)$ se sabe que

$$f_1(b) = \max_{x \in D(a,b)} f_1(x) \text{ y } f_2(a) = \min_{x \in D(a,b)} f_2(x),$$

y por lo tanto,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \leq f_1(b) - f_2(a)$$

y se puede tomar $\alpha(D(a, b)) = f_1(b) - f_2(a)$.

Cota 2 (funciones dc.)

Definición 3.8 Una función de variable real f definida sobre un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^r$ se dice *dc.* sobre D si f puede ser expresada de la siguiente forma

$$f(x) = f_1(x) \div f_2(x), \forall x \in D,$$

siendo f_1 convexa y f_2 cóncava.

En este caso, la función f puede ser expresada como diferencia de funciones convexas (dc \equiv diferencia de convexas).

Sea f una función dc., tal que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, con f_1 convexa y f_2 cóncava y diferenciable. Como, toda función cóncava está acotada superiormente por un hiperplano tangente a la función en cualquier punto del dominio, se tiene que

$$f_2(x) \leq f_2(x^*) + \nabla f_2(x^*)(x - x^*), \quad \forall x \in D(a, b),$$

siendo $x^* \in D(a, b)$ un punto factible. Por lo tanto,

$$f(x) \leq f_1(x) + f_2(x^*) + \nabla f_2(x^*)(x - x^*), \quad \forall x \in D(a, b).$$

Además, como $f_1(x)$ es convexa, alcanzará su máximo en uno de los vértices de $D(a, b)$, y en consecuencia,

$$\alpha(D(a, b)) = \max_{x \in V(D(a, b))} \{f_1(x) + f_2(x^*) + \nabla f_2(x^*)(x - x^*)\}$$

es una cota superior de f en $D(a, b)$.

La bondad de esta cota depende del punto factible x^* elegido, por lo que se ha calculado en tres puntos distintos del rectángulo $D(a, b)$.

Cota 3 (suma de funciones cóncavas y crecientes)

Cuando la función objetivo puede descomponerse como $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, donde f_1 es una función cóncava y diferenciable y f_2 es continua y creciente, el cálculo de una cota superior en $D(a, b)$ se puede llevar a cabo combinando los procedimientos utilizados en las dos cotas anteriores.

Como f_1 es cóncava, se verifica que

$$f_1(x) \leq f_1(x^*) + \nabla f_1(x^*)(x - x^*), \quad \forall x \in D(a, b),$$

siendo $x^* \in D(a, b)$ un punto factible, y por lo tanto,

$$f_1(x) \leq \max_{x \in V(D(a, b))} \{f_1(x^*) + \nabla f_1(x^*)(x - x^*)\}, \quad \forall x \in D(a, b).$$

Como además

$$f_2(a) = \min_{x \in D(a, b)} f_2(x),$$

se tiene que una cota superior para la función f puede venir dada por

$$\alpha(D(a, b)) = \max_{x \in V(D(a, b))} \{f_1(x^*) + \nabla f_1(x^*)(x - x^*)\} - f_2(a).$$

La precisión de esta cota, al igual que para la cota 2, depende en gran medida del punto factible x^* elegido. Como f_1 está siendo acotada por un hiperplano tangente en ese punto, la cota será mejor cuanto más horizontal sea el hiperplano, y por lo tanto, cuanto más próximo a cero sea el $\nabla f_1(x^*)$. En consecuencia, lo que

se ha hecho es determinar tres puntos factibles y elegir aquel cuyo vector gradiente esté más próximo a cero (la suma de sus componentes más próxima a cero).

En el paso 1.iii del algoritmo 3.3, se elige la mejor cota superior de entre la calculada para el hijo y la que ya se conocía del padre, ya que, como $D' \subset D$, la cota superior de D , $\alpha(D)$, también lo será de D' .

Para calcular la cota inferior del conjunto D , se toma el punto factible, de los utilizados en el cálculo de las cotas superiores (vértices y puntos factibles utilizados para los hiperplanos tangentes), con el que se obtenga el mayor valor objetivo.

Elección del conjunto a particionar

La elección del conjunto a particionar en la siguiente iteración es muy importante en relación con la velocidad de convergencia del algoritmo. El algoritmo general propuesto por Horst y Tuy (1993) sugiere elegir una lista de subconjuntos a particionar, aunque esta opción conlleva un elevado esfuerzo computacional. Esta regla fue utilizada por Hansen (1985) en el método BSSS (Big Square Small Square) para resolver el problema de localización minisum. Este algoritmo fue posteriormente generalizado por Plastria (1992), aunque él optó por dividir el conjunto en el que se había obtenido la mayor cota superior global. Esta modificación tiene como objetivo incrementar la profundidad de la búsqueda del algoritmo, y por lo tanto su rapidez. En este caso, se ha aplicado el procedimiento propuesto por Plastria (1992) y que también ha sido utilizado por Hansen, Peeters y Thisse (1995,1997).

Definición 3.9 Una operación de elección es de mejora si al menos un elemento de la partición donde se obtuvo la cota superior actual es elegido para seguir con el proceso de subdivisión.

La operación de elección utilizada en este trabajo es de mejora ya que el elemento a dividir es precisamente el de mayor cota superior.

Convergencia del algoritmo de ramificación y acotación

Definición 3.10 Una operación de acotación es consistente si en cualquier paso, cualquier elemento M_k de la partición puede ser "refinado" y cualquier secuencia decreciente $\{M_{k_q}\}$ de elementos de particiones sucesivas satisface

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (\alpha_{k_q} - \beta(M_{k_q})) = 0,$$

siendo α_{k_q} y $\beta(M_{k_q})$ las cotas superior e inferior del conjunto M_{k_q} .

Proposición 3.11 Si la función objetivo f es la suma de las funciones continuas

f_1 y f_2 y la subdivisión es exhaustiva, entonces la cota 1 es una operación de acotación consistente.

Dem. Sea el conjunto $M_{k_q} = D(a_q, b_q)$, entonces sus cotas vienen dadas por

$$\begin{aligned}\alpha(D(a, b)) &= f_1(b_q) - f_2(a_q) \text{ y} \\ \beta(D(a_q, b_q)) &= f_1(x) - f_2(x), \text{ con } x \in D(a_q, b_q).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha(D(a_q, b_q)) - \beta(D(a_q, b_q)) = f_1(b_q) - f_1(x) + f_2(x) - f_2(a_q).$$

Como la partición es exhaustiva se tiene que

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \delta(D(a_q, b_q)) = 0,$$

y por lo tanto $x \rightarrow a_q$ y a la vez $x \rightarrow b_q$. Como f_1 y f_2 son continuas se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow b_q} f_1(x) = f_1(b_q) \text{ y} \\ \lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow a_q} f_2(x) = f_2(a_q),\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} \alpha(D(a_q, b_q)) - \beta(D(a_q, b_q)) = 0. \blacksquare$$

Proposición 3.12 Si la función objetivo $f = f_1 + f_2$ es dc. siendo f_1 convexa y f_2 cóncava y diferenciable, y la subdivisión es exhaustiva, entonces la cota 2 es una operación de acotación consistente.

En este caso, si $M_{k_q} = D(a_q, b_q)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha(D(a_q, b_q)) &= \max_{x \in V(D(a_q, b_q))} \{f_1(x) + f_2(x^*) + \nabla f_2(x^*)(x - x^*)\} \\ &= f_1(v^*) + f_2(x^*) + \nabla f_2(x^*)(v^* - x^*), \\ \beta(D(a_q, b_q)) &= f_1(x) + f_2(x),\end{aligned}$$

con $x^*, x \in D(a_q, b_q)$. Por lo tanto,

$$\alpha(D(a_q, b_q)) - \beta(D(a_q, b_q)) = f_1(v^*) - f_1(x) + \nabla f_2(x^*)(v^* - x^*) + f_2(x^*) - f_2(x).$$

Como $\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0$, se tiene que $x \rightarrow v^*$ y $x^* \rightarrow v^*$. Como f_1 y f_2 son continuas,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow v^*} f_1(x) = f_1(v^*) \text{ y} \\ \lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow x^*} f_2(x) = f_2(x^*),\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} \alpha(D(a_q, b_q)) - \beta(D(a_q, b_q)) = 0. \blacksquare$$

Proposición 3.13 *Si la función objetivo es $f = f_1 - f_2$ donde funciones f_1 es cóncava y diferenciable y ∇f_1 es acotado, f_2 es continua y creciente, y la subdivisión es exhaustiva, entonces la cota 3 es una operación de acotación consistente.*

Dem. En este caso, si $M_{k_n} = D(a_q, b_q)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(D(a_q, b_q)) &= f_1(x^*) + \nabla f_1(x^*)(v - x^*) - f_2(a_q), \\ \beta(D(a_q, b_q)) &= f_1(x) - f_2(x), \end{aligned}$$

con $x^*, x \in D(a_q, b_q)$ y $v \in V(D(a_q, b_q))$ tal que $g(v) = \max_{x \in V(D(a_q, b_q))} g(x)$, con $g(x) = f_1(x^*) + \nabla f_1(x^*)(x - x^*)$. Por lo tanto,

$$\alpha(D(a_q, b_q)) - \beta(D(a_q, b_q)) = f_1(x^*) - f_1(x) + \nabla f_1(x^*)(v - x^*) + f_2(x) - f_2(a_q).$$

Como $\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0$, se tiene que $x \rightarrow a_q$, $x \rightarrow x^*$ y a la vez, $x^* \rightarrow v$. Como f_1 y f_2 son continuas,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} f_1(x) &= \lim_{x \rightarrow x^*} f_1(x) = f_1(x^*) \text{ y,} \\ \lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow a_q} f_2(x) = f_2(a_q), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{\delta(D(a_q, b_q)) \rightarrow 0} \alpha(D(a_q, b_q)) - \beta(D(a_q, b_q)) = 0. \blacksquare$$

Teorema 3.14 (Horst y Tuy, 1993) *Un procedimiento de ramificación y acotación en el que la operación de acotación es consistente y la elección de la cota es de mejora, es convergente.*

El algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación) para obtener los niveles óptimos de atractivo cuando las localizaciones vienen dadas en el problema del $(r|X_P)$ -medianoide, utilizando las cotas 1, 2 ó 3 (dependiendo de las que se puedan utilizar) es convergente en los casos parcialmente binario y proporcional. Cuando las asignaciones son binarias, como la función objetivo no es continua no se puede asegurar la existencia de solución óptima por lo que se tendrá que obtener una ε -solución.

3.3 Ramificación y acotación. Experiencias computacionales

A continuación se muestran los resultados computacionales obtenidos al utilizar el algoritmo de ramificación y acotación para determinar los niveles de atractivo óptimos en el $(r|X_p)$ -medianoide, cuando las localizaciones Y_r vienen dadas, utilizando las tres cotas propuestas anteriormente. En primer lugar este algoritmo es aplicado al caso proporcional-no esencial utilizando la cota 1. Estos resultados son comparados con los obtenidos utilizando la cota dc. (cota 2), ya que en ese caso la función de beneficios puede ser descompuesta como diferencia de convexas. Por último, se aplica la cota 3 para obtener los niveles de atractivo en el caso proporcional-esencial ya que la función de ingresos en este caso es cóncava.

El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \max & ING(A_{Y_r}) - C(A_{Y_r}) \\ \text{s.a.} & a_i \in [I, S] \quad i = 1, 2, \dots, r \end{array}$$

donde ING y C , son las funciones de ingreso y costes, respectivamente. Obsérvese que $C(A_{Y_r}) = \sum_{a_i \in A_{Y_r}} F(a_i)$ es continua y creciente ya que la condición (3) impone que la función F también lo sea.

En los distintos casos estudiados, se han considerado redes de 50 y 75 nodos, generadas aleatoriamente e inscritas en un cuadrado de 10 unidades de lado. El grado de cada nodo de estas redes varía entre cuatro y ocho. Se considera además, demanda unitaria para todos los nodos ($w(v) = 1, \forall v \in V$). Para obtener los resultados que se presentan se han resuelto el problema cuando se localizan dos y tres nuevos centros de servicio.

Se han evaluado los tiempos medios de computación cuando varía, tanto la forma de la función objetivo, como la precisión exigida a la solución. Para analizar la sensibilidad de los resultados con respecto a la precisión, se varían los parámetros ε (*error máximo permitido*) y dm (*diámetro mínimo*), mientras que para modificar la función de beneficios se define un nuevo parámetro (*factor*) que multiplica a la función de costes C .

Para obtener los tiempos medios, en el caso de $r = 2$, se han resuelto 102 problemas, mientras que para los casos con tres variables, debido al mayor esfuerzo computacional requerido, el número de problemas resueltos ha sido de 53.

3.3.1 Ramificación y acotación utilizando la cota 1

La función objetivo para el caso proporcional-no esencial, cuando las localizaciones para los nuevos centros de servicio y los ya existentes son $Y_r = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ y $X_p = \{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+r}\}$, respectivamente, y sus correspondientes niveles de

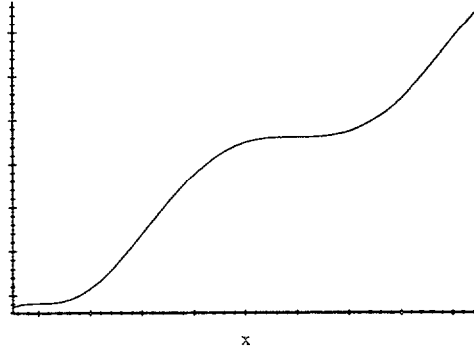


Figura 3.3: Función de costes para los atractivos (cotas 1 y 2)

atractivo son $A_{Y_r} = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ y $A_{X_p} = \{a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{p+r}\}$, viene dada por

$$\begin{aligned} W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) &= ING(A_{Y_r}) - C(A_{Y_r}) = \\ &= \sum_{v \in V} w(v) \frac{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj} - a_j}}{1 + \sum_{k=1}^{p+r} \frac{a_k}{f_{vk} - a_k}} - \sum_{j=1}^r F(a_j) \end{aligned}$$

Como se vio en la sección 2.3.6, bajo la condición (1) la función ING es creciente con respecto a los niveles de atractivo cuando $f_{vj} > a_j$, $\forall v \in V$ y $\forall x_j \in X_{p+r}$. Por otro lado, como la función de costes C es una suma separable de funciones crecientes y continuas, $\alpha(D(a, b)) = ING(b) - C(a)$ es una cota superior del r -rectángulo $D(a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}^r$ y $a < b$.

La función de costes considerada en este caso es la representada en la figura 3.3, y se corresponde con

$$F(x) = \text{factor} \left(\frac{x^7}{7} - 2x^6 + \frac{58}{5}x^5 - 36x^4 + \frac{193}{3}x^3 - 66x^2 + 36x \right).$$

En la figura 3.4 se representa la función de beneficios en una red de 50 nodos cuando $\text{factor} = 9$ y $r = 2$. Los resultados computacionales presentados en esta sección se corresponden con la resolución de un $(r|X_2)$ -medianoide, utilizando un ordenador con un procesador de 166 Mhz.

En este caso se considera que los niveles de atractivo pueden variar en el intervalo $[0.9, 2.7]$, además, se ha utilizado $f_v(d(v, x_j)) = 3.5 + d(v, x_j)$. De esta forma, se verifica la condición necesaria para la existencia de asignaciones proporcionales para servicios no esenciales ($f_{vj} > a_j$). Como puede observarse en

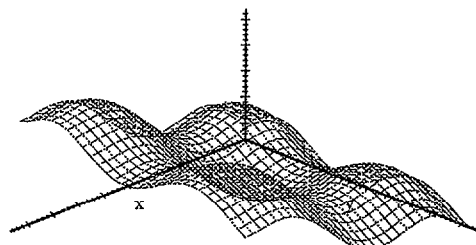


Figura 3.4: Función de beneficios con $factor=9$ (proporcional-no esencial)

la gráfica, la función de beneficios presenta varios óptimos locales, lo que hace que la aplicación de algoritmos basados en el gradiente no sea la idónea. Para resolver este inconveniente, se suele utilizar estos algoritmos partiendo de diferentes soluciones iniciales y eligiendo la mejor opción. Sin embargo, este proceso, aunque se repita muchas veces, no asegura que se obtenga la solución óptima.

En la figura 3.5 se muestran los tiempos medios (en segundos) obtenidos en los distintos casos estudiados para el parámetro $factor$. Para cada uno de los valores utilizados para $factor$ se ha variado el error máximo permitido entre el 2.5 % y el 0.1 %. El dm considerado en este caso es 0.001.

Para la resolución de los problemas en los que hay que determinar los niveles de atractivo para dos nuevos centros de servicio, los tiempos medios son siempre inferiores a los 0.8 segundos. Los tiempos invertidos para los dos tipos de redes, de 50 y 75 nodos, no difieren significativamente, aunque son un poco más elevados en el caso de las redes de 75 nodos. Cuando $factor = 3$, los problemas son resueltos muy rápidamente, produciéndose un fuerte incremento en el tiempo invertido cuando se utiliza $factor = 9$. Por último, a partir de $factor = 15$, los problemas tienden a ser más fáciles de resolver y los tiempos medios descienden. En estos casos, salvo para $factor = 9$, el descenso en los tiempos medios cuando aumenta el error máximo permitido muestra cierta linealidad. Cuando $factor = 9$ se produce un fuerte incremento en el esfuerzo computacional cuando el error permitido es inferior al 1.9 %.

Cuando se resuelve el problema con tres variables ($r = 3$) los tiempos medios invertidos experimentan un fuerte incremento. En el caso en el que el error permitido es el mínimo ($\varepsilon = 0.001$), los tiempos llegan a los 40 segundos en las redes de 50 nodos y a los 55 segundos en las de 75. En estos casos, los problemas más difíciles de resolver son los resultantes de utilizar $factor$ 9 y 12. A diferencia del

caso $r = 2$, los tiempos medios pierden la linealidad con respecto al error permitido. Cuando el ε es grande, los tiempos están entre los 10 y 15 segundos en todos los casos, mientras que si el error se reduce, el esfuerzo computacional experimenta un elevado incremento, aumentando la diferencia entre los distintos valores.

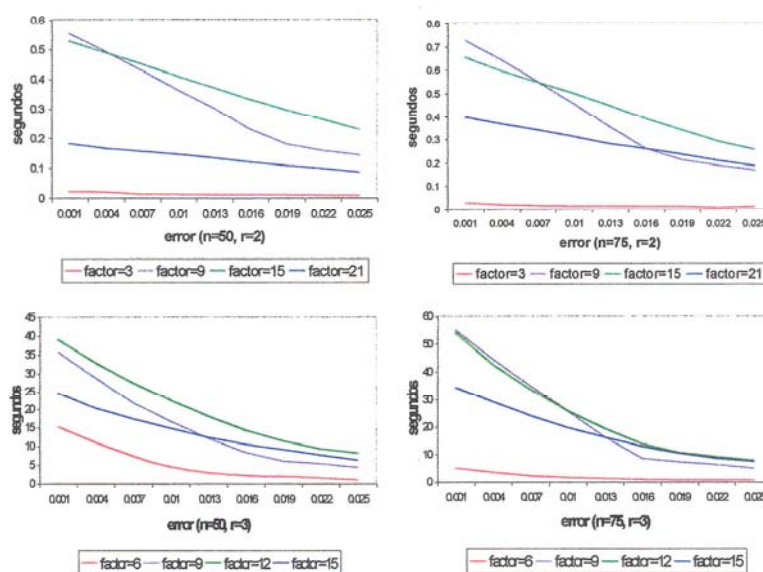


Figura 3.5: Tiempos medios (segs.) al variar ε y *factor* (cota 1)

En general, cuando el ε es alto, 2.2 - 2.5 %, los tiempos medios tienden a converger, independientemente del valor de *factor*. Sin embargo, cuando se exige mayor precisión, los tiempos invertidos experimentan un elevado incremento, acentuándose la diferencia entre los distintos valores de *factor*. Por otro lado, los tiempos empleados en obtener los niveles óptimos para los atractivos cuando $r = 2$, no difieren significativamente, siendo inferiores a un segundo, incluso cuando el error permitido es el mínimo (0.1 %). Sin embargo, cuando $r = 3$, las diferencias pueden llegar a estar en torno al minuto.

Para evaluar la sensibilidad del algoritmo con respecto al ε y al dm se han hecho varias pruebas en las que se han tomado valores para ε de 0.001, 0.013 y 0.025, mientras que el dm varía entre 0.001 y 0.05 unidades. Como se muestra en la figura 3.6, existe una gran diferencia entre los tiempos medios requeridos para $\varepsilon = 0.001$ y los otros dos casos. Sin embargo, cuando el dm aumenta, las tres situaciones convergen hacia tiempos muy similares. Por ejemplo, tomando $dm = 0.05$, el peor de los casos tiene asociado un tiempo medio de computación de 1.531 segundos ($n = 50$, $r = 3$).

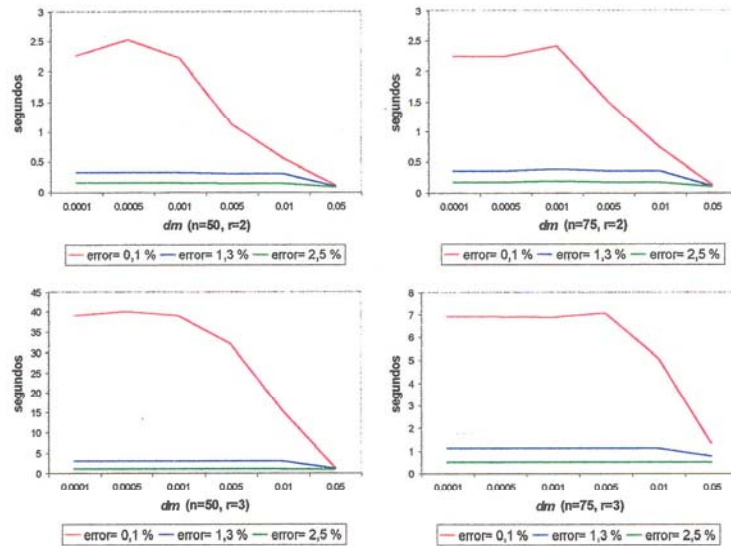


Figura 3.6: Tiempos medios (segs.) para distintos niveles de precisión (cota 1)

En los casos para los que se requiere mayor precisión ($\epsilon = 0.001$, $dm = 0.0001 - 0.001$), los tiempos invertidos son muy superiores en comparación con el resto. Cuando los valores de ϵ son los mayores, los tiempos de computación parecen ser los mismos para los distintos valores de dm .

3.3.2 Ramificación y acotación utilizando la cota 2

Como ejemplo de aplicación de la cota 2 se resuelve el mismo problema que en el caso anterior (proporcional-no esencial). Para ello, la función de ingresos debe descomponerse como diferencias de funciones convexas.

Proposición 3.15 Sean $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D convexo, $h : C \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C convexo, $f(D) \subseteq C$. Si $g(x)$ es una función convexa, $h(x)$ es cóncava, creciente y diferenciable en $C \subseteq \mathbb{R}$ y $h'(x)$ es acotada en C , entonces la función $h(g(x))$ puede descomponerse como suma de una función convexa y otra cóncava en D . Además la descomposición es

$$h(g(x)) = [h(g(x)) - Mg(x)] + Mg(x)$$

donde M es un número real positivo tal que $h'(x) - M \leq 0, \forall x \in D$.

Dem. La función $h(g(x))$ puede expresarse $h(g(x)) = f_1(x) + f_2(x)$, donde $f_1(x) = Mg(x)$ y $f_2(x) = [h(g(x)) - Mg(x)]$. Bastaría comprobar que f_1 es

convexa y f_2 cóncava. Como $g(x)$ es convexa, la función f_1 es convexa ya que es producto de una constante positiva por una función convexa.

La función f_2 puede expresarse como la siguiente composición de funciones

$$f_2(x) = t(g(x))$$

donde $t(x) = h(x) - Mx$. Como h es cóncava, al restarle una función lineal resulta que la nueva función t también lo es. Además, es decreciente ya que $t'(x) = h'(x) - M \leq 0$. Aplicando el lema 1.26, se tiene que $-f_2$ es convexa y por lo tanto f_2 es cóncava. ■

Corolario 3.16 *La función de ingresos del $(r|X_p)$ -medianoide con atractivos para el caso proporcional-no esencial, cuando las localizaciones de los nuevos centros de servicio vienen dadas y $f_{vj} > a_j$, $\forall v \in V$ y $\forall x_j \in X_{p+r}$, es dc.*

Dem. La función de ingresos puede expresarse como

$$ING(A_{Y_r}) = \sum_{v \in V} h_v(g_v(A_{Y_r})),$$

donde $h_v(x) = \frac{w(v)x}{1+k_v+x}$, $g_v(A_{Y_r}) = \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}-a_j}$ y $k_v = \sum_{j=r+1}^{p+r} \frac{a_j}{f_{vj}-a_j}$, $\forall v \in V$.

La matriz Hessiana de la función g_v viene dada por

$$H_{g_v}(A_{Y_r}) = \text{diag} \left(\frac{2f_{v1}}{(f_{v1} - a_1)^3}, \frac{2f_{v2}}{(f_{v2} - a_2)^3}, \dots, \frac{2f_{vr}}{(f_{vr} - a_r)^3} \right)$$

que es definida positiva ya que cada uno de los elementos de la diagonal es estrictamente positivo. Por lo tanto, las funciones g_v son estrictamente convexas.

Para $x > 0$, las funciones h_v son cóncava y crecientes ya que

$$h'_v = \frac{(1+k_v)w(v)}{(1+k_v+x)^2} > 0,$$

$$h''_v = \frac{-2(1+k_v)w(v)}{(1+k_v+x)^3} < 0.$$

Además, h'_v está acotada cuando $x > 0$ ya que

$$h'_v(x) = \frac{(1+k_v)w(v)}{(1+k_v+x)^2} \leq \frac{(1+k_v)w(v)}{(1+k_v)^2} \leq \frac{w(v)}{(1+k_v)},$$

y puede tomarse

$$M_v = \frac{w(v)}{(1+k_v)}.$$

Aplicando la proposición 3.18 se tiene que las funciones $h_v(g_v(A_{Y_r}))$ son dc. y por lo tanto, la función de ingresos también lo será por ser suma de funciones dc. ■

Si se considera una función de costes para los atractivos dc., la función de beneficios admitiría una descomposición dc. y por lo tanto, se podría emplear la cota 2 en el algoritmo 3.3 para obtener los niveles óptimos de atractivo. Obsérvese que esta opción incluye a las funciones de coste cóncavas y convexas.

A continuación se muestran los resultados obtenidos al resolver el problema del apartado anterior (proporcional-no esencial) utilizando la cota dc. en el algoritmo de ramificación y acotación. En la tabla 3.1 se presentan los tiempos medios obtenidos cuando $r = 2$, tomando $dm = 0.01$.

ε	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
$n = 50$					
<i>factor=3</i>	75.92	72.61	69.28	65.92	52.53
<i>factor=6</i>	106.03	104.32	120.57	100.80	99.03
<i>factor=9</i>	116.26	115.88	115.4	114.83	114.16
$n = 75$					
<i>factor=3</i>	91.06	85.65	80.40	75.34	70.53
<i>factor=6</i>	139.56	136.60	133.61	130.62	127.58
<i>factor=9</i>	163.39	161.56	159.59	157.56	155.48

Tabla 3.1: Tiempos medios (segs.) para $r = 2$ ($dm = 0.01$)

Lo más destacable en este caso son los tiempos tan elevados que se necesitan para resolver los problemas. Obsérvese que los errores máximos permitidos varían entre el 1 y el 9 %, cantidades muy superiores a las utilizadas con la cota 1. Los tiempos obtenidos para resolver estos problemas varían entre uno y dos minutos, siendo éstos muchos mayores que los logrados en la sección anterior.

Los tiempos invertidos en la resolución del problema cuando tiene tres variables se disparan. Por todo ello, los resultados parecen descartar la utilización de esta cota a favor de la cota 1.

3.3.3 Ramificación y acotación utilizando la cota 3

En este caso, se presenta un ejemplo en el que se obtienen los niveles de atractivo, dadas las localizaciones, para el $(r|X_p)$ -medianoide proporcional-esencial. La

funciones de ingresos y costes para este caso, viene dadas por

$$ING(A_{Y_r}) = \sum_{v \in V} \frac{w(v) \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}}}{\sum_{j=1}^r \frac{a_j}{f_{vj}} + k_v},$$

$$C(A_{Y_r}) = \sum_{j=1}^r F(a_j)$$

donde $k_v = \sum_{k=r+1}^{\tau+p} \frac{a_k}{f_{vk}}$, $v \in V$.

Como se demostró en la proposición 2.13, cuando las funciones f_v son cóncavas y estrictamente positivas, la función de ingresos es cóncava y como las funciones de costes son crecientes y continuas para los atractivos, se puede resolver el problema utilizando la cota 3 en el algoritmo 3.3. En este caso, dado un r -rectángulo $D(a, b)$, la función de ingresos está acotada superiormente por un hiperplano tangente en un punto de $D(a, b)$, mientras que la función de costes está acotada inferiormente por $C(a)$. Combinando estas dos cotas se consigue la cota 3.

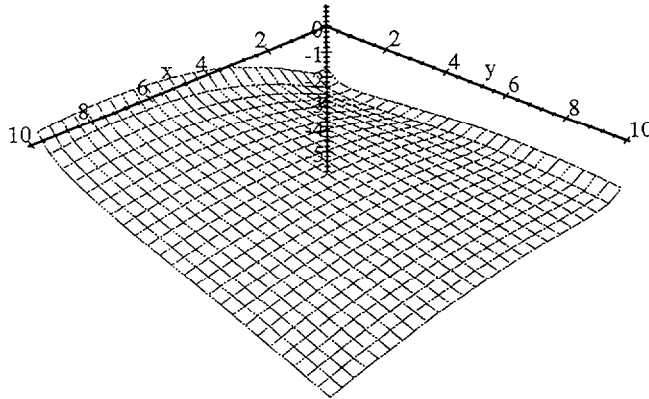


Figura 3.7: Función de beneficios para el caso proporcional-esencial ($n=50$, $r=2$)

Se ha considerado que los niveles de atractivo para los nuevos centros están en el intervalo $[0.9, 9.9]$ y se han utilizado las funciones $f_v(d(v, x_j)) = 10 + d(v, x_j)$ y $F(a_j) = \text{factor} (2\sqrt[3]{a_j} + a_j)$. El parámetro *factor*, al igual que en los casos

anteriores, es utilizado para modificar la función de costes y con ello, la de beneficios. En este caso, las pruebas se han realizado para un $(r|X_4)$ -medianoide, donde r puede ser dos o tres. Para resolver el problema se han utilizado ordenadores con microprocesadores de 350 Mhz.

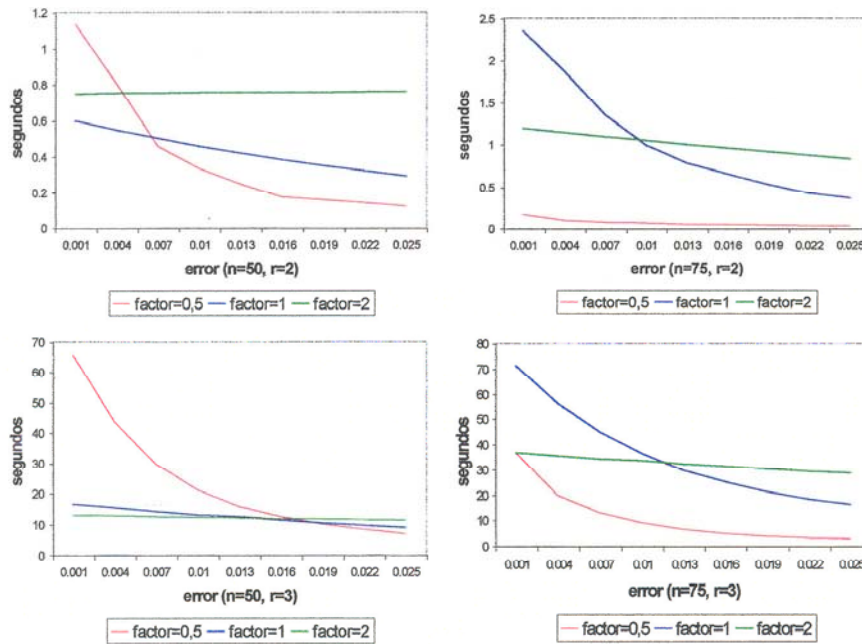


Figura 3.8: Tiempos medios (segs.) al variar ϵ y *factor* (cota 3)

Bajo las condiciones descritas, la función de beneficios, fijadas las localizaciones de los nuevos centros, es multiextremo como se observa en la figura 3.7. Para confirmar la ineficacia de programas comerciales que basan su búsqueda a través de métodos guiados por el gradiente, se han hecho pruebas con el LINGO que utiliza una versión del algoritmo generalizado del gradiente reducido. En estas pruebas, este algoritmo llegaba a distintas soluciones dependiendo de las soluciones iniciales elegidas.

En primer lugar se ha aplicado el algoritmo con varios valores de ϵ y dm . En la figura 3.8 se muestran los tiempos medios, en segundos, obtenidos en la resolución del problema en los distintos casos analizados. Todos estos problemas han sido resueltos con un dm de 0.0527. Puede observarse como el comportamiento del algoritmo presenta gran dependencia de la forma de la función objetivo. En las redes de 50 nodos, los tiempos invertidos cuando se utiliza el $factor = 0.5$ dependen

en gran medida del ϵ , mientras que para el resto de los valores, esta dependencia se hace mucho menor, sobre todo en los problemas de tres variables. En las redes de 75 nodos, el comportamiento del algoritmo es más variado. En este caso, la mayor sensibilidad con respecto al ϵ se presenta para $factor = 1$, aunque este efecto también se aprecia en los problemas de tres variables al tomar $factor = 0.5$, especialmente cuando los errores son menores.

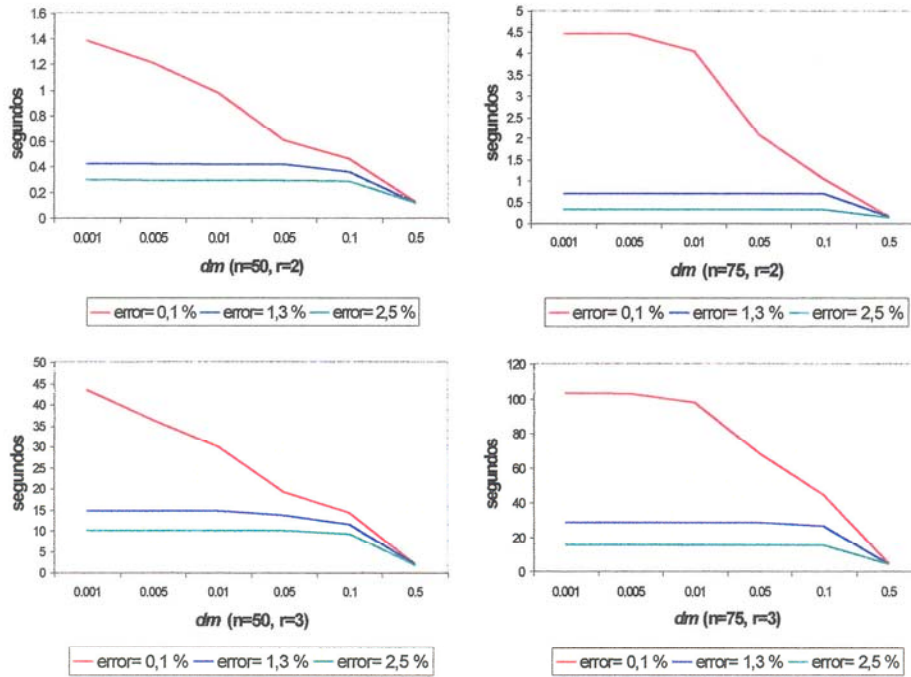


Figura 3.9: Tiempos medios (segs.) para diferentes niveles de precisión (cota 3)

También se ha hecho un análisis de los tiempos requeridos según el nivel de precisión exigido en la resolución del problema. Para ello, los problemas se han resuelto modificando el ϵ , que se ha hecho variar entre el 0.1 y el 2.5 %, y el dm , que oscila entre 0.00105 y 0.527. En la figura 3.9 se muestran los tiempos medios obtenidos para la resolución de estos problemas.

Puede observarse que los tiempos invertidos, cuando se resuelven problemas con dos variables, no superan el segundo y medio en las redes de 50 nodos, incluso si se exige la mayor precisión. Sin embargo, en las redes de 75 nodos, alcanzar ese nivel de precisión supone triplicar el esfuerzo. Cuando el valor del dm aumenta, los tiempos tienden a unificarse, independientemente del ϵ elegido o del número de nodos que forman la red. Los tiempos invertidos en el caso de tres variables

son muy superiores, llegándose en el peor de los casos a los 103.283 segundos ($n = 75$, $r = 3$).

La nota general es la gran diferencia en los tiempos invertidos entre los casos de media y baja precisión ($\varepsilon = 0.013$ y $\varepsilon = 0.025$) con el de mayor precisión ($\varepsilon = 0.001$). Además, esta diferencia se hace mucho más acentuada en los casos en los que se tomaba un valor bajo para dm . El comportamiento para $\varepsilon = 0.013$ y $\varepsilon = 0.025$ es muy parecido en los distintos escenarios estudiados. Sin embargo, cuando se impone el menor error, $\varepsilon = 0.001$, existen ciertas diferencias entre las redes de 50 y 75 nodos. En las redes de 50 nodos, en el caso de $\varepsilon = 0.001$, los tiempos van reduciéndose progresivamente con el aumento del dm , hasta converger con los tiempos obtenidos para los otros niveles de error. Sin embargo, en las redes de 75 nodos, los tiempos de computación elevados se mantienen hasta un dm de 0.01, produciéndose una brusca reducción a partir de este nivel hasta llegar a converger con los otros niveles de error.

3.3.4 Comentarios sobre los resultados obtenidos con la utilización del algoritmo de ramificación y acotación

Los resultados de las pruebas realizadas utilizando un algoritmo de ramificación y acotación con las tres cotas descritas en este capítulo sugieren las siguientes conclusiones.

- El algoritmo es muy sensible a la forma de la función objetivo (efecto del parámetro *factor*), lo que puede hacer que en determinados casos los tiempos requeridos para la resolución del problema puedan ser muy altos.
- La obtención de soluciones con niveles altos de precisión, valores bajos de ε ó dm , puede conllevar un esfuerzo computacional bastante elevado en comparación con casos menos exigentes.
- Entre las cotas propuestas en el estudio, la cota 1, a pesar de ser la más general, es la que proporciona mejores resultados. Los tiempos requeridos por la cota 2, significativamente mayores que para el resto de las cotas, sugiere prescindir de ella para resolver los problemas considerados.
- Se produce un gran aumento de los tiempos empleados en resolver los problemas cuando se pasa de dos a tres variables. También se produce un incremento, aunque no tan significativo, en los tiempos invertidos en la resolución del problema cuando aumenta el número de nodos de la red.
- La resolución del problema con cuatro o más variables implicaría un esfuerzo computacional muy elevado, incluso para las cotas 1 y 3, mucho mayor si se trata de la cota 2.

Capítulo 4

El $(r|X_p)$ -medianoide. Experiencia computacional

4.1 Introducción

En este capítulo se lleva a cabo un estudio del problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto atendiendo tanto al tipo de servicio (esencial o no esencial) como a la regla de asignación de la demanda (preferencias binarias, parcialmente binarias o proporcionales). Como se vio en el capítulo 1, para las asignaciones parcialmente binarias y proporcionales existe solución nodal para el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en redes, por lo que podría obtenerse una solución de este problema resolviendo el problema discreto correspondiente. Aunque en el caso binario no existe solución nodal, se demostró que puede obtenerse una solución del problema en redes considerando un conjunto finito de puntos candidatos. Una formulación matemática de cada uno de estos problemas se encuentra en la sección 1.3.

Para resolver estos problemas discretos se han aplicado varios algoritmos heurísticos. Los resultados obtenidos mediante estos procedimientos han sido comparados con la solución obtenida de forma exhaustiva, analizando así su comportamiento.

Para comparar los resultados obtenidos por los distintos algoritmos heurísticos se han resuelto una serie de problemas para los que se han utilizado trece redes distintas. Estas redes pueden ser clasificadas en dos grupos. Por un lado se ha generado aleatoriamente diez redes, cinco de 50 nodos y otras cinco de 75, y por otro lado se han tomado tres redes particulares ya utilizadas con anterioridad en otros trabajos publicados.

Las redes del primer grupo han sido generadas aleatoriamente en un cuadrado de 500×500 unidades. El grado de los nodos de estas redes varía entre cuatro y ocho. La longitud del arco que une cualquier par de nodos adyacentes es la distancia euclídea entre ambos puntos y la distancia entre cualquier par de nodos

es la longitud del camino más corto que los une a través de la red. En adelante, para referenciar a las redes de 75 nodos se utilizarán los números del (1) al (5) y para las de 50 del (6) al (10).

Las redes que forman parte del segundo grupo son casos particulares. Las redes (11) y (12) han sido utilizadas por Serra (Serra, 1989 y 1996) en varios trabajos anteriores. La red (11) está formada por 55 nodos y se inscribe en un cuadrado de 60×60 unidades, mientras que la (12) está formada por 79 nodos y se inscribe en un cuadrado de 7×7 . También se emplea una red de 32 nodos (13) basada en la red de carreteras de Gran Canaria (Suárez, Santos y Dorta, 2001) y que se encuentra inscrita en un cuadrado de 95×95 unidades.

El análisis se ha hecho variando tanto el número de nuevos establecimientos (r) como el de centros ya establecidos (p), tomando como posibles valores para estos dos parámetros $r, p \in \{1, 2, 3\}$. Además, se han considerado tres distribuciones de la demanda distintas. El caso denotado por $d = 0$ hace referencia a una situación donde la demanda es la misma e igual a 1 en todos los nodos. En el caso $d = 1$ se añade un poco de variabilidad a la demanda en los nodos tomando una distribución uniforme que asignan valores entre nueve y diez. Por último, $d = 2$ representa un caso con mayor variabilidad de la demanda distribuyéndose como una uniforme que toma valores entre cinco y quince.

En consecuencia, para cada par “preferencia-servicio” se estudian 27 escenarios distintos que son analizados a su vez en cada una de las 13 redes utilizadas en el trabajo. Todo ello da lugar a unas 351 situaciones distintas para cada par “preferencia-servicio”.

preferencia-servicio	$\alpha \rightarrow \infty$	$\alpha \rightarrow 0$
binario-esencial	$w(v)$	$w(v)$
binario-no esencial	0	$\frac{w(v)}{D(v, Y_r)}$
parcialmente binario-esencial	$\frac{w(v)}{2}$	$\frac{w(v)D(v, X_p)}{D(v, Y_r) + D(v, X_p)}$
parcialmente binario-no esencial	0	$\frac{w(v)D(v, X_p) - 1}{D(v, Y_r)D(v, X_p) - 1}$
proporcional-esencial	$\frac{w(v)r}{p+r}$	$\frac{w(v) \sum_{j=1}^r \frac{1}{d(v, x_j)}}{\sum_{j=1}^{p+r} \frac{1}{d(v, x_j)}}$
proporcional-no esencial	$\frac{w(v)r}{p+r+1}$	$\frac{w(v) \sum_{j=1}^r \frac{1}{d(v, x_j) - 1}}{1 + \sum_{j=1}^{p+r} \frac{1}{d(v, x_j) - 1}}$

Tabla 4.1: Variación de la demanda captada de un nodo al variar α

La función de la distancia elegida es $f(x) = \alpha + x$, con $\alpha = 3.5$ y $\alpha = 1.1$. Inicialmente se han resueltos todos los problemas tomando $\alpha = 3.5$, estudiando

posteriormente el caso $\alpha = 1.1$ con el fin de analizar la influencia de este parámetro sobre los resultados. El único caso en el que no afecta la variación del α es en el caso binario-esencial. En la tabla 4.1 se muestra la variación de la cantidad de demanda de un nodo captada por la empresa entrante al modificarse el parámetro α . Obsérvese que cuando α tiende a valores muy altos, la cantidad captada tiende a no depender de la distancia, mientras que en el caso contrario, esta cantidad depende exclusivamente de las distancias implicadas. Los casos más sensibles a las variaciones de este parámetro son los binario-no esencial y parcialmente binario-no esencial, en cuyo caso la cantidad de demanda captada por la empresa entrante puede ser muy pequeña. En los casos parcialmente binario-esencial y proporcional (esencial y no esencial) el incremento de este parámetro hace que la demanda de cada nodo tienda a ser repartida en función del número de centros que lo sirven.

Para la resolución de los problemas $(r|X_p)$ -medianoide se han utilizado tres algoritmos heurísticos, uno greedy (GR), uno de intercambio (TB) y uno de búsqueda tabú (TS). Previamente, cada problema es resuelto de forma exhaustiva evaluando los beneficios obtenidos por cada una de las posibles soluciones. Una vez conocida la solución óptima, ésta es comparada con la obtenida por los algoritmos heurísticos con el fin de evaluar el error cometido. Tanto para el TB como para el TS se han probado dos versiones. En la primera, los algoritmos parten de soluciones iniciales elegidas aleatoriamente, mientras que en una segunda versión, los algoritmos parten de la solución obtenida por el algoritmo GR (TB(GR) y TS(GR)).

En la sección 1.2 se demostró que la función objetivo del problema del $(r|X_p)$ -medianoide es submodular y creciente en todos los escenarios “preferencias-servicio”. Aplicando el teorema 1.32 se obtiene una cota del error producido por el algoritmo GR. De hecho, aunque con este teorema se puede asegurar que la solución GR alcanza al menos un 75 % del valor óptimo cuando $r = 2$, y un 70.37 % cuando $r = 3$, los resultados obtenidos en este trabajo reflejan aciertos muy superiores, siendo el error máximo encontrado del 1.538 %.

Con el fin de comparar los resultados obtenidos por cada uno de los algoritmos, se evalúan varios parámetros tales como el porcentaje medio de error cometido, el porcentaje de fallos, la ratio (% error / % fallos) y el número medio de posibles soluciones evaluadas (evaluaciones) por el algoritmo, así como su desviación típica.

Para la implementación del algoritmo de búsqueda tabú se han elegido valores de los parámetros similares a los empleados por Benati y Laporte (1994). Así, se ha tomado un valor de t_{max} igual a 20 y el rango para la *tenencia tabú* está comprendido entre tres y once ($t_{tabú} \in [3, 11]$). Como regla de parada se ha limitado el número de evaluaciones que puede realizar el algoritmo. En cada caso se ha impuesto que el algoritmo TS no supere en un 50 % el número medio de evaluaciones realizadas por el TB en esa misma situación. Es por esta razón, por la que no se ha limitado el número de soluciones iniciales (s_{max}) a partir de las cuales el algoritmo puede reiniciar la búsqueda en otro entorno. Para determinar el número medio de evaluaciones se ha procedido de la siguiente manera. En aquellos

problemas en los que el algoritmo encuentra el óptimo, se considera que el número de evaluaciones es aquel que se ha invertido hasta llegar a él. En el caso de que no encuentre la solución óptima, el número de evaluaciones considerado es la cantidad de evaluaciones que se han llevado a cabo hasta la parada de la búsqueda.

4.2 Binario-esencial

En esta sección se estudia el problema del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales cuando las asignaciones se llevan a cabo de forma binaria. Para la resolución del problema en cada una de las situaciones se han empleado los algoritmos GR, TB y TS, analizando los parámetros que describen su comportamiento. En un principio, los algoritmos TB y TS parten de una solución inicial aleatoria, sin embargo, la eficacia de estos algoritmos se ve sustancialmente incrementada cuando se toma como solución inicial la obtenida por el GR.

4.2.1 Algoritmo greedy

La utilización de este algoritmo ha sido habitualmente desaconsejada en los problemas de localización competitiva (Achabal et al, 1982) aunque como se verá en este trabajo, sus resultados en la resolución del $(r|X_p)$ -medianoide se podrían considerar bastante aceptables.

GR	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error ($r=2$)	1.2115	1.0751	3.2222	0	5.3481	1.5387
% error ($r=3$)	0.5939	0.7528	2.1143	0	0	0.6860
% error	0.9027	0.9139	2.6681	0	2.6740	1.1096
% fallos ($r=2$)	37.777	26.666	55.555	0	77.777	37.606
% fallos ($r=3$)	31.111	33.333	44.444	0	0	25.641
% fallos	34.444	30	50	0	38.888	31.624
ev. ($r=2$)	149	99	109	157	63	120.692
ev. ($r=3$)	222	147	162	234	93	179.538
ev.	185.50	123.0	135.50	195.50	78.0	150.115

Tabla 4.2: Resultados para el GR. Binario-esencial

La tabla 4.2 muestra el comportamiento del algoritmo en este caso. En dicha tabla se reflejan los porcentajes medios de error, los porcentajes de fallos cometidos y el número medio de evaluaciones necesarias para resolver la totalidad de los problemas planteados. Los resultados se muestran para cada red y para cada valor

de r . También para cada uno de estos datos, se muestra la media al considerar conjuntamente las situaciones con dos y tres nuevos centros de servicio. Las cifras referentes a las redes de 75 y 50 nodos se encuentran agrupadas.

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
(1,3,0)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2
(2,3,0)	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	3
(3,2,0)	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	7
(3,3,0)	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	4
fallos	1	3	2	0	2	3	0	0	4	0	3	0	1	19
(1,2,1)	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	4
(1,3,1)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	3
(2,2,1)	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	5
(2,3,1)	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	4
(3,2,1)	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	6
(3,3,1)	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	4
fallos	2	2	2	0	2	3	1	2	6	0	3	0	3	26
(1,2,2)	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	4
(1,3,2)	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	3
(2,2,2)	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	6
(2,3,2)	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	4
(3,2,2)	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	5
(3,3,2)	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	7
fallos	4	4	4	1	2	2	1	1	4	0	3	0	3	29
f. tot.	7	9	8	1	6	8	2	3	14	0	9	0	6	74

Tabla 4.3: Distribución de los fallos para el GR. Binario-esencial

El porcentaje de error cometido por el GR es del 1.1096 %, concentrándose la mayor parte en los problemas donde $r = 2$. El comportamiento es bastante desigual, dependiendo de la red. Mientras que existen redes en la que se alcanza el óptimo en todos los casos, en la red (11) se llega a un porcentaje de error del 5.3481 % cuando $r = 2$. Sin embargo, para esa misma red, no se comete ningún fallo para $r = 3$. Cuando se pretende implantar dos nuevos centros de servicio, el porcentaje de error cometido cuando no se llega al óptimo es muy superior al cometido cuando $r = 3$. En consecuencia se tiene que la ratio (% error / % fallos) en el caso de $r = 2$ es 0.0409, superior al 0.0267 correspondiente a $r = 3$.

Por último, en la tabla también se muestra el número de evaluaciones que necesita el algoritmo para cada tipo de red. Obsérvese que el número medio de evaluaciones para $r = 2$ es de 120.692, mientras que para $r = 3$, la media es de 179.538 evaluaciones.

La distribución de los fallos cometidos por este algoritmo en los problemas resueltos se presenta en la tabla 4.3, apareciendo un 0 en la casilla cuando el GR alcanza el óptimo y un 1 en caso de fallo. Se observa que el menor número de fallos se produce cuando la demanda es unitaria y el número de centros de servicio ya establecidos es menor o igual al número de nuevos centros a instalar. Esta tendencia ya no es tan apreciable cuando aumenta la variabilidad de la demanda de los nodos. Analizando la última fila, se puede apreciar que el número de fallos depende en gran medida de la red, ya que el número mínimo y el máximo de fallos se produce en el grupo de las redes de 50 nodos.

4.2.2 Algoritmo de intercambio

El algoritmo de intercambio ha sido implementado para resolver el problema del $(r|X_P)$ -medianoide para los casos en los que se desea implantar dos o tres nuevos centros de servicio. Inicialmente, para analizar su dependencia con respecto a la elección de la solución inicial, el algoritmo se ha aplicado para cada uno de los casos estudiados partiendo de 20 soluciones iniciales elegidas aleatoriamente. En un segundo paso, se ha tomado como solución de partida la obtenida mediante el algoritmo GR y se ha comprobado la mejora en los resultados que se pudiera obtener.

TB	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.496	0.181	0.124	0	0	0.284
% error (r=3)	0.432	0.095	0.712	0	0.048	0.268
% error	0.464	0.138	0.418	0	0.024	0.276
% fallos (r=2)	12.777	7.333	11.111	0	0	7.350
% fallos (r=3)	19.222	9.555	28.888	0	1.666	10.812
% fallos	16.0	8.444	20.0	0	0.833	9.081
ev. med. (r=2)	239.629	122.256	177.077	205.050	94.333	185.241
ev. med. (r=3)	368.60	191.880	270.244	279.666	120.867	281.927
ev. med.	304.114	157.068	223.661	242.358	107.60	233.584
sd (r=2)	31.323	18.50	28.215	5.594	15.322	24.365
sd (r=3)	46.963	24.794	48.176	0	13.462	34.247
sd	39.143	21.647	38.195	2.796	14.392	29.306

Tabla 4.4: Resultados del TB. Binario-esencial

En la tabla 4.4 se muestran los resultados obtenidos por el TB partiendo de las 20 soluciones iniciales distintas. En este caso, a los datos reflejados en la correspondiente tabla del GR se ha añadido la desviación típica existente para

el número de evaluaciones necesarias en cada situación. Con este parámetro se pretende analizar la influencia sobre los resultados de la solución inicial elegida.

Desde una perspectiva global, se puede observar que tanto el porcentaje medio de error como el de fallos se reduce sustancialmente en comparación con los conseguidos por el GR. El error medio es del 0.276 %, estando repartido, a diferencia del GR, de forma muy similar entre los casos $r = 2$ y $r = 3$. Tampoco existe gran diferencia entre las dos situaciones para los porcentajes de fallos, lo que conlleva unas ratios (% error / % fallos) parecidas, aunque menor para el caso $r = 3$.

El número medio de evaluaciones aumenta considerablemente con respecto al GR, siendo en este caso de 233.584 frente a las 150.115 resultantes de la aplicación del primer algoritmo. Por otro lado, se muestra poco sensible con respecto a la solución de partida, presentando un bajo valor para la desviación típica del número de evaluaciones.

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
(1,3,0)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
(2,2,0)	0	0	0	0	2	0	0	0	13	0	0	0	0	15
(2,3,0)	2	17	0	0	6	0	0	0	3	0	3	0	0	31
(3,2,0)	10	0	0	0	8	2	0	8	5	0	1	0	0	34
(3,3,0)	14	7	0	0	9	0	0	5	4	0	17	0	1	57
fallos	27	30	0	0	25	2	0	13	25	0	21	0	1	144
(1,2,1)	0	0	0	0	0	8	0	0	4	0	7	0	0	19
(1,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	9
(2,2,1)	0	0	0	0	4	0	2	18	0	0	0	0	0	24
(2,3,1)	0	4	3	0	6	0	0	20	15	0	0	0	0	48
(3,2,1)	5	0	0	0	15	0	0	0	4	0	0	0	0	24
(3,3,1)	12	17	0	0	9	0	0	12	6	0	9	0	1	66
fallos	17	21	3	0	34	8	2	50	29	0	25	0	1	190
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	11
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	6
(2,2,2)	0	18	0	0	1	0	17	5	4	0	0	0	0	45
(2,3,2)	0	16	0	0	4	0	0	13	2	0	0	0	0	35
(3,2,2)	11	0	18	0	17	0	0	2	4	0	1	0	0	53
(3,3,2)	14	14	10	0	9	0	0	2	4	0	8	0	1	62
fallos	25	48	28	0	31	0	17	22	14	0	26	0	1	212
f. tot.	69	99	31	0	90	10	19	85	68	0	72	0	3	546

Tabla 4.5: Distribución de los fallos para el TB. Binario-esencial

Si se analizan los datos por redes, se puede ver que los porcentajes medios de error y de fallos no siguen ninguna tendencia. Existen redes en las que los mejores

resultados se obtienen para $r = 2$, mientras que en otras el comportamiento es el opuesto. Para las redes de 75 nodos (1-5) se produce un mayor porcentaje medio de error, aunque es en la red de 55 nodos (11), cuando $r = 3$, en la que se produce el mayor porcentaje de fallos.

En la tabla 4.5 se presenta la distribución de los fallos para los distintos escenarios. Para cada una de las combinaciones (p, r, d) y para cada red, el problema se resuelve 20 veces partiendo de soluciones distintas generadas aleatoriamente. De esta forma, en cada casilla se muestra el número de casos, sobre los 20 posibles, en los que el algoritmo TB no alcanza la solución óptima del problema.

Se puede observar que la existencia de errores en el TB no está directamente relacionada con los errores del GR. Existen casos en los que aunque el GR alcanza la solución óptima, el TB comete muchos errores (por ejemplo, para el escenario (3,3,0) y la red (11)). Por otro lado, existen muchos casos en los que el GR no alcanza el óptimo, y sin embargo, el TB lo alcanza independientemente de la solución inicial elegida (ej. (1,2,0)-(1)).

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.506	0.091	0	0	0	0.2368
% error (r=3)	0.413	0.041	1.254	0	0	0.2743
% error	0.459	0.066	0.627	0	0	0.2555
% fallos (r=2)	11.111	6.666	0	0	0	6.837
% fallos (r=3)	20.0	4.444	44.444	0	0	12.820
% fallos	15.555	5.555	22.222	0	0	9.829
ev. med. (r=2)	151.867	81.722	118.778	155.0	61.0	121.880
ev. med. (r=3)	223.40	119.204	168.556	229.0	88.0	178.291
ev. med.	187.633	100.463	143.666	192	74.5	150.085
sd (r=2)	11.305	2.667	23.371	0	0	7.376
sd (r=3)	15.950	2.611	34.667	0	0	10.006
sd	13.627	2.639	29.019	0	0	8.691

Tabla 4.6: Resultados del TB(GR). Binario-esencial

Existen determinadas combinaciones (p, r, d) que presentan una mayor tendencia a los errores. El menor número de fallos suele darse cuando la empresa entrante establece más centros de servicio que los que existen en el mercado, es decir, cuando $p = 1$. Cuando la competencia existente es mayor, el algoritmo tiende a cometer más fallos. El número de errores se incrementa cuando aumenta la variabilidad de la demanda de los nodos.

Como segunda alternativa, se ha utilizado la solución obtenida por el GR como solución inicial para el TB (TB(GR)). En este caso, los resultados son bastante parecidos al caso general, aunque se produce una leve reducción del porcentaje medio de error, siendo éste del 0.2555 %. El óptimo es alcanzado en 211 de los 234 problemas resueltos, lo que significa que ha encontrado la solución óptima en 49 casos en los que el GR no pudo hacerlo. Los resultados obtenidos por el TB(GR) se muestran en la tabla 4.6.

La reducción del porcentaje medio de error que produce el empleo de la solución GR como solución inicial es poco significativa. Obsérvese que el número medio de evaluaciones invertido por el TB(GR) no incluye las 150 empleadas, en media, por el GR. Por otro lado, la utilización de esta solución inicial lleva asociada una reducción en la desviación típica para las evaluaciones realizadas por el algoritmo.

En general, el empleo de la solución GR como punto de partida para el algoritmo TB produce una reducción en el porcentaje medio de error, salvo en la red de 55 nodos (11), cuyos resultados empeoran sustancialmente cuando $r = 3$.

4.2.3 Algoritmo de búsqueda tabú

Al igual que para el TB, este algoritmo ha sido resuelto 20 veces para cada una de las combinaciones (r, p, d) . En la tabla 4.7 se muestran los resultados obtenidos por el TS cuando las localizaciones iniciales han sido elegidas aleatoriamente.

En esta tabla puede observarse como el porcentaje medio de error es muy parecido al obtenido por el TB. Si se compara la media de evaluaciones empleadas por el TS con las utilizadas por el TB, se observa que la del TS es muy inferior. Sin embargo, si se comparan las desviaciones típicas medias, puede comprobarse que la del TS es bastante superior (más del doble), lo que indica una mayor dependencia de la solución de partida.

El porcentaje de error cometido por el algoritmo es muy superior cuando $r = 3$ que cuando $r = 2$. Además, a diferencia tanto del GR como del TB, la ratio (% error / % fallos) es superior cuando $r = 3$. Aunque el porcentaje de fallos supera al producido por el TB, se comprueba que en caso de no alcanzar el óptimo, el error cometido es inferior. Obsérvese que la ratio (% error / % fallos) para el TS es de 0.020, mientras que la del TB es de 0.030.

El comportamiento del algoritmo depende de la red, no existiendo ninguna tendencia aparente en la distribución de los errores cometidos así como del número de evaluaciones requeridas en cada caso. El dato más destacable es el mal comportamiento del algoritmo para la red de 55 nodos (11), donde el error cuando $r = 3$ supera el 1 %, cifra muy alejada del resto de las situaciones. Los errores producidos en las demás redes son bastante parecidos.

TS	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.213	0.119	0.553	0.069	0.069	0.190
% error (r=3)	0.267	0.40	1.194	0	0.365	0.407
% error	0.240	0.260	0.874	0.035	0.217	0.299
% fallos (r=2)	10.111	7.222	34.444	4.444	1.111	10.299
% fallos (r=3)	18.333	16.018	49.444	0	12.777	19.230
% fallos	14.222	11.620	41.944	2.222	6.944	14.765
ev. med. (r=2)	103.467	57.927	93.377	112.244	42.639	85.627
ev. med. (r=3)	190.063	110.351	172.444	154.494	51.944	153.508
ev. med.	146.765	84.139	133.061	135.369	47.292	119.568
sd (r=2)	61.134	35.070	47.748	49.499	26.319	49.204
sd (r=3)	108.251	58.950	67.754	50.876	27.876	80.112
sd	84.693	47.010	57.761	50.188	27.097	64.658

Tabla 4.7: Resultados del TS. Binario-esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	7	1	0	0	0	1	0	4	0	0	0	0	0	13
(1,3,0)	0	0	0	0	1	3	0	0	0	0	1	0	0	5
(2,2,0)	0	0	1	0	1	0	0	0	3	0	6	1	0	12
(2,3,0)	2	7	0	0	10	1	3	0	11	0	6	0	0	40
(3,2,0)	2	0	3	13	0	0	1	2	1	0	7	1	0	30
(3,3,0)	12	9	0	9	0	5	4	3	1	4	13	0	7	67
fallos	23	17	4	22	12	10	8	9	16	4	33	2	7	167
(1,2,1)	3	3	2	0	0	1	0	9	0	0	1	0	1	20
(1,3,1)	0	0	1	0	3	4	0	0	0	0	18	0	0	26
(2,2,1)	4	0	0	0	0	0	12	5	3	0	9	3	0	36
(2,3,1)	0	2	12	0	4	0	4	10	16	0	9	0	0	57
(3,2,1)	2	2	1	16	0	0	3	2	0	0	15	0	0	41
(3,3,1)	13	14	0	6	0	7	12	13	5	0	16	0	8	94
fallos	22	21	16	22	7	12	31	39	24	0	68	3	9	274
(1,2,2)	2	0	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	11
(1,3,2)	2	0	0	0	5	5	0	0	1	0	18	0	0	31
(2,2,2)	1	12	1	0	1	2	14	1	0	0	7	1	0	40
(2,3,2)	0	3	0	0	14	2	7	10	8	1	6	0	0	51
(3,2,2)	9	1	2	0	0	0	5	2	0	0	16	2	1	29
(3,3,2)	18	11	1	6	0	7	11	8	1	6	2	0	8	69
fallos	32	27	4	6	21	16	37	28	10	7	60	3	9	231
f. tot.	77	65	24	50	40	38	76	76	50	11	151	8	25	672

Tabla 4.8: Distribución de los errores para el TS. Binario-esencial

En la tabla 4.8 se muestra la distribución de los casos en los que el TS no ha conseguido alcanzar la solución óptima correspondiente. Obsérvese que en cada casilla se muestra el número de fallos cometidos sobre los 20 posibles.

El número de errores es superior al del TB, presentando una distribución bastante diferente. Por un lado, el TB alcanza en muchos escenarios el óptimo en los 20 problemas resueltos, tendiendo los errores a concentrarse en escenarios específicos. La situación del TS es bastante diferente ya que existen pocos casos en los que el éxito es total y además, los errores se encuentran bastante distribuidos entre los distintos escenarios.

También para este algoritmo, el menor número de errores, y con notable distancia con respecto al resto, se produce cuando la demanda es unitaria para todos los nodos ($d = 0$). Aunque en este caso, a diferencia de los otros dos algoritmos, los peores resultados no se producen cuando la variabilidad de la demanda es la mayor ($d = 2$).

En cuanto al comportamiento de los errores con respecto al número de nuevos centros de servicio, la tendencia general parece ser que el número de fallos es mayor cuando $r = 3$. Además, se advierte cierta relación entre el número de errores y de centros de servicios ya existentes, de tal forma que los fallos aumentan cuanto mayor es la competencia ya establecida. De hecho, el escenario que mejores resultados ha obtenido es el $(1,3,0)$, es decir, en una situación fuertemente ventajosa para la empresa entrante. Por otro lado, los peores resultados se dan siempre cuando la concentración en el mercado es mayor, es decir, cuando tanto la empresa entrante como la establecida cuentan con tres centros de servicio.

TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.015	0.001	0.147	0	0	0.018
% error (r=3)	0.137	0.083	0	0	0	0.091
% error	0.075	0.042	0.073	0	0	0.054
% fallos (r=2)	2.222	2.222	11.111	0	0	2.564
% fallos (r=3)	13.333	6.666	0	0	0	7.692
% fallos	7.778	4.444	5.555	0	0	5.128
ev. med. (r=2)	96.175	81.981	78.20	-	9	88.180
ev. med. (r=3)	291.233	158.583	114.25	-	-	236.333
ev. med.	193.704	120.282	96.225	-	9	162.256
sd (r=2)	88.167	27.009	75.014	-	0	59.524
sd (r=3)	98.836	40.262	78.813	-	-	77.430
sd	93.501	33.636	76.914	-	0	68.477

Tabla 4.9: Resultados obtenidos por el TS(GR). Binario-esencial

Este algoritmo también ha sido resuelto tomando como solución de partida la obtenida por el GR (TS(GR)). En este caso se produce una sensible mejora con respecto al TS, superando incluso los resultados obtenidos por el TB en cualquiera de sus dos versiones. En la tabla 4.9 se muestran los resultados obtenidos con la aplicación del TS(GR). Tanto las evaluaciones medias, como sus desviaciones típicas, han sido calculadas exclusivamente para aquellos escenarios en los que el GR no alcanzó la solución óptima. Obsérvese que para la red (12) (79 nodos) no se muestran los datos correspondientes a la media de evaluaciones y a su desviación típica porque en este caso el GR siempre alcanzó la solución óptima. Para indicar este hecho, en la tabla aparece un guión (-). También para el TB(GR), al igual que para las soluciones iniciales aleatorias, se ha impuesto que el número de evaluaciones no supere en un 50 % al número medio correspondiente al TB.

El porcentaje medio de error obtenido por el TS(GR) es del 0.054 %, siendo más elevado cuando $r = 3$. Los peores resultados se han dado para las redes de 75 nodos (1-5) en la que se han producido siete de los doce fallos cometidos en total, aunque el mayor porcentaje de error parcial se obtiene para la red de 55 nodos (11) cuando $r = 2$. El número medio de evaluaciones para aquellos casos en los que la solución GR no es la óptima es de 162.256, con una desviación típica de 68.477. Aunque la media de evaluaciones es muy similar a la obtenida por el TB(GR), la desviación es muy superior, lo que muestra la gran dependencia de este algoritmo con respecto de los parámetros que definen el problema. Obsérvese que en este caso, el número medio de evaluaciones es incluso superior al efectuado cuando la solución inicial es elegida aleatoriamente.

4.2.4 Síntesis

Las conclusiones en relación a la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide en el caso binario-esencial, utilizando los distintos algoritmos heurísticos aquí estudiados (GR, TB y TS) son las siguientes:

- El GR no alcanza la solución óptima en el 31.624 % de los problemas estudiados aunque el porcentaje de error cometido es tan sólo del 1.109 %.
- El TS y el TB obtienen porcentajes de error muy parecidos. Para llegar hasta estos resultados, el TB necesita realizar muchas más evaluaciones, en media, pero sin embargo muestra una mayor independencia de la solución inicial.
- El número de errores cometido por el TS es muy superior al del TB, aunque el error cometido en cada caso es inferior. Obsérvese que la ratio (% error / % fallos) del TS es 0.020 frente al 0.030 obtenida con el TB, mejor incluso que la del TB(GR).
- La utilización de la solución GR como punto de partida para el TB no reporta ninguna mejora sustancial en el porcentaje de error cometido por el algoritmo. Sí que se produce una mejora tanto en el número medio de evaluaciones

invertidas y en su correspondiente desviación típica. De todas formas, se ha de tener en cuenta que a las evaluaciones medias correspondientes tanto al TB(GR) como al TS(GR) que aparecen en la tabla, se han de añadir las evaluaciones requeridas para obtener la solución GR.

- Cuando el TS se inicia con la solución GR, los errores se reducen sustancialmente, mejorando los resultados obtenidos por los otros algoritmos. Sin embargo, sigue presentando gran dependencia de la solución inicial.
- El algoritmo que comete mayores errores cuando no alcanza la solución óptima es el GR, para el cual la ratio (% error / % fallos) es 0.035. Esta ratio se reduce para el TB, pero los valores más bajos son obtenidos por el TS, especialmente por el TS(GR).
- Para todos los algoritmos, salvo para el GR, se producen más fallos cuando $r = 2$ que cuando $r = 3$.
- El porcentaje de error cometido por el GR y el TB es superior cuando $r = 2$ mientras que para el TS, el mayor porcentaje de error se produce cuando $r = 3$.

	GR	TB	TS	TB(GR)	TS(GR)
% error (r=2)	1.538	0.284	0.190	0.237	0.018
% error (r=3)	0.686	0.268	0.407	0.274	0.091
% error	1.109	0.276	0.299	0.255	0.054
% fallos (r=2)	37.606	7.350	10.299	6.837	2.564
% fallos (r=3)	25.641	10.812	19.230	12.820	7.692
% fallos	31.624	9.081	14.765	9.829	5.128
% er. / % f. (r=2)	0.041	0.038	0.018	0.034	0.007
% er. / % f. (r=3)	0.026	0.024	0.021	0.021	0.012
% er. / % f.	0.035	0.030	0.020	0.026	0.010
ev. med. (r=2)	120.692	185.241	85.627	121.880*	88.180*
ev. med. (r=3)	179.538	281.927	153.508	178.291*	236.333*
ev. med.	150.115	233.584	119.568	150.085*	162.256*
sd (r=2)	0	24.365	49.204	7.376	59.524
sd (r=3)	0	34.247	80.112	10.006	77.430
sd	0	29.306	64.658	8.691	68.477

Tabla 4.10: Resultados para los distintos algoritmos heurísticos. Binario-esencial

- Los tres algoritmos presentan mejores resultados cuando la demanda es igual a 1 para todos los nodos ($d = 0$).
- Generalmente, el número de fallos aumenta cuando se reduce la posición de ventaja de la nueva empresa, es decir cuando aumenta p .

En la tabla 4.10 se muestran los datos obtenidos por los distintos algoritmos heurísticos. El (*) indica que no se incluyen las evaluaciones correspondientes al GR.

4.3 Binario-no esencial

4.3.1 Algoritmo greedy

Los resultados obtenidos por el algoritmo GR en este caso mejoran sustancialmente los obtenidos cuando la demanda es esencial, reduciéndose tanto el porcentaje medio de error como el de fallos (ver tabla 4.11). El número de errores cometido es superior cuando $r = 3$, a diferencia de la demanda esencial, en la que el mayor número se daba para $r = 2$. Además, se observa que la ratio (% error / % fallos) es inferior a la que se produce cuando la demanda es esencial, reduciéndose hasta la mitad.

	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error ($r=2$)	0	0.0877	0.3537	0.1216	0.2215	0.0873
% error ($r=3$)	0.0056	0.0928	0.7194	1.0899	0.0009	0.1771
% error	0.0028	0.0902	0.5366	0.6058	0.1112	0.1322
% fallos ($r=2$)	0	24.444	30	44.444	30	17.948
% fallos ($r=3$)	4.444	26.666	44.444	100	11.111	24.786
% fallos	2.222	25.555	38.888	72.222	22.222	21.367
ev. ($r=2$)	149	99	109	157	63	120.692
ev. ($r=3$)	222	147	162	234	93	179.538
ev.	185.50	123.0	135.50	195.50	78.0	150.115

Tabla 4.11: Resultados del GR. Binario-no esencial

El único caso en el que el porcentaje de error supera el 1 % se corresponde con la red de 79 nodos (12) cuando $r = 3$ ya que ya que este algoritmo no consigue alcanzar el óptimo en ninguno de los escenarios planteados. Los errores para el resto de las redes son muy inferiores, destacando el caso de las redes de 75 nodos (1-5).

Las redes en las que el algoritmo GR ha obtenido mayor número de éxitos son las de 75 nodos; de hecho, el algoritmo ha alcanzado la solución óptima en todos los escenarios en tres de las cinco redes, y en las otras dos, tan sólo se ha producido un fallo en cada una.

En este caso se produce un total de 50 fallos para los 234 escenarios (ver la distribución de fallos en la tabla 1 del anexo 1). Al contrario de cuando la demanda es esencial, los mejores resultados se producen cuanto mayor es la variabilidad de la demanda de los nodos. Si bien para $d = 1$ y $d = 2$ se producen trece y diez fallos, respectivamente, para $d = 0$ se producen más de la mitad del total de los fallos.

TB	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.005	0.264	0.074	0	0.028
% error (r=3)	0.004	0.004	0.619	0.034	0	0.054
% error	0.002	0.0045	0.442	0.054	0	0.041
% fallos (r=2)	0	3	18.888	2.222	0	2.777
% fallos (r=3)	2.222	2.555	23.888	8.888	0	4.358
% fallos	1.111	2.777	21.388	5.555	0	3.568
ev. med. (r=2)	218.946	128.078	174.722	243.977	98	183.069
ev. med. (r=3)	367.880	207.329	307.222	472.20	162.917	309.670
ev. med.	293.413	167.703	240.972	358.089	130.458	246.369
sd (r=2)	12.238	14.760	25.396	27.506	15.922	16.813
sd (r=3)	21.008	19.338	54.071	92.760	26.640	30.349
sd	16.623	17.049	49.734	60.132	21.281	23.581
TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.0084	0.35	0	0	0.0308
% error (r=3)	5×10^{-5}	0.0016	0.218	0.083	0	0.0240
% error	2.5×10^{-5}	0.005	0.126	0.042	0	0.0274
% fallos (r=2)	0	4.444	22.222	0	0	3.419
% fallos (r=3)	2.222	2.222	22.222	22.222	0	5.128
% fallos	1.111	3.333	22.222	11.111	0	4.273
ev. med. (r=2)	147	83.50	107	155	61	119.923
ev. med. (r=3)	217	122.685	174.333	296.556	91.222	183.325
ev. med.	182	103.092	140.666	225.778	76.111	151.624
sd (r=2)	11.305	2.667	0	0	0	5.579
sd (r=3)	15.950	2.661	0	0	0	7.340
sd	13.627	2.664	0	0	0	6.459

Tabla 4.12: Resultados obtenidos por el TB y TB(GR). Binario-no esencial

Salvo en el caso $d = 1$, no parece existir diferencia entre los resultados obtenidos para los distintos valores de r y de p . Sin embargo, en ese caso los fallos para $r = 3$ superan ligeramente el doble de los producidos cuando $r = 2$.

4.3.2 Algoritmo de intercambio

Al igual que para el caso de la demanda esencial, el algoritmo de intercambio se ha resuelto primero partiendo de 20 soluciones iniciales generadas aleatoriamente, y posteriormente, se ha evaluado las posibles ventajas de utilizar la solución GR como solución inicial.

Los resultados obtenidos cuando se consideran las 20 soluciones iniciales aleatorias se muestran en la tabla 4.12. Estos resultados son bastante buenos, mejorando incluso los obtenidos por el TS(GR) para la demanda esencial. Tan sólo en la red (11) aparecen porcentajes de error medio comparativamente superiores aunque no llegan al 0.45 %. Para la red de 32 nodos (13), los resultados son excelentes ya que el algoritmo encuentra la solución óptima en los 360 problemas resueltos para esa red. En este caso, la ratio (% error / % fallos) es bastante parecida para $r = 2$ y $r = 3$, 0.010 y 0.012, respectivamente.

También puede observarse como aquellas redes en las que se producen más errores son las que han requerido un mayor esfuerzo computacional. Además, éstos son los casos con mayores desviaciones en el número de evaluaciones, mientras que las desviaciones para el resto de las redes son bastante bajas.

Este algoritmo consigue alcanzar el óptimo en todos los casos en cinco de las trece redes utilizadas. Los errores cometidos se concentran en determinadas situaciones, de hecho, los fallos se distribuyen en tan sólo 25 de los 234 casos estudiados (ver distribución de los errores en la tabla 2 del anexo 1). Analizando dicha tabla no se puede asegurar que exista alguna tendencia que relacione el número de errores con la distribución de la demanda de los nodos. Aunque el menor número de errores se produce cuando la variabilidad es mayor (32 fallos de 1560 posibles), los peores resultados (83 fallos) se obtienen para $d = 1$. Por otro lado, el menor número de fallos cuando $d = 0$ y $d = 2$ resultan para $r = 2$, mientras que cuando $d = 1$, el comportamiento es el contrario pero sin apenas diferencia.

La utilización de la solución del algoritmo GR como punto de partida para el TB (TB(GR)) conlleva una reducción en el porcentaje de error de casi el 50 % con respecto al TB. Empleando el TB(GR) el número de fallos se reduce a diez casos, cuatro con $r = 2$ y seis con $r = 3$.

Obsérvese que en el peor de los casos, la red de 55 nodos (11), se producen cuatro fallos, dos para $r = 2$ y otros dos para $r = 3$, implicando el mayor porcentaje de error, y con diferencia, de entre todas las redes. Para el resto, los errores cometidos son muy bajos, destacando sobre todo el éxito pleno obtenido para la red de 32 nodos (13).

4.3.3 Algoritmo de búsqueda tabú

Los datos resultantes de la aplicación del algoritmo de búsqueda tabú para el caso del $(r|X_p)$ -medianoide cuando las asignaciones son binarias y la demanda es no esencial se presentan en la tabla 4.13.

TS	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.591	0.240	0.648	0.004	2.318	0.556
% error (r=3)	0.582	0.395	1.154	0.786	2.154	0.721
% error	0.586	0.317	0.90	0.394	2.236	0.644
% fallos (r=2)	22.444	30.333	41.111	2.222	60	25.598
% fallos (r=3)	42.777	50.333	45	33.333	73.888	43.205
% fallos	32.611	40.333	43.055	17.777	66.944	34.401
ev. med. (r=2)	127.992	67.955	103.661	162.223	58.90	105.576
ev. med. (r=3)	284.006	132.313	226.805	283.388	112.956	218.235
ev. med.	205.999	100.134	165.233	222.811	85.928	161.905
sd (r=2)	77.779	41.323	48.523	90.556	44.10	63.086
sd (r=3)	145.855	70.855	72.263	178.210	69.781	113.435
sd	111.827	56.089	60.393	134.382	56.940	88.260
TS(GR)	(1) al (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.0069	0.0037	0	0.2215	0.0205
% error (r=3)	0	0.0016	0.0245	0	0	0.0026
% error	0	0.0042	0.0141	0	0.1107	0.0115
% fallos (r=2)	0	4.444	11.111	0	33.333	5.128
% fallos (r=3)	0	2.222	11.111	0	0	1.709
% fallos	0	3.333	11.111	0	16.666	3.419
ev. med. (r=2)	93	67.166	158.333	9.75	148	96.821
ev. med. (r=3)	278	51.350	147.833	52.333	12	113.880
ev. med.	185.50	59.258	153.083	31.041	80	105.351
sd (r=2)	0	64.174	81.709	0.957	1	48.623
sd (r=3)	0.707	44.786	149.577	26.344	0	44.585
sd	0.353	54.480	115.643	13.650	0.5	46.604

Tabla 4.13: Resultados obtenidos por el TS y el TS(GR). Binario-no esencial

El dato más destacable es el elevado porcentaje medio de error cometido cuando la solución inicial es elegida aleatoriamente, un 0.664 %, superior incluso al promedio de error cometido por el GR. En la red de 32 nodos (13) se producen los

errores más elevados, consecuencia del más del 66 % de fallos cometidos en dicha red. Este algoritmo, no sólo origina el porcentaje medio de error más elevado de entre los utilizados, sino que también comete el mayor número de fallos y la ratio (% error / % fallos) es la más elevada. Aunque el número de fallos es superior cuando $r = 3$, el error cometido en estos casos es inferior al obtenido para $r = 2$.

El número medio de evaluaciones es inferior al invertido por el TB, sin embargo, cuenta con el importante inconveniente de que depende en gran medida de la solución inicial. Obsérvese que la desviación típica media para el número de evaluaciones es de 88.260, casi cuatro veces la obtenida para el TB.

Otro dato que reafirma la gran dependencia de la solución inicial del TS es el cambio drástico que se produce en los resultados cuando se parte de la solución GR. Con esta modificación, el TS(GR) reduce de forma sustancial el porcentaje medio de error cometido. De hecho, con un 0.0115 %, es la versión de los algoritmos utilizados que menor porcentaje de error comete para el caso binario-no esencial.

En este caso se producen tan sólo ocho errores de los 54 posibles en los que el GR no alcanzó el óptimo. Estos errores se centran en las redes con menor número de nodos, y sobre todo cuando $r = 2$, ya que de los ocho fallos, seis se producen bajo esta circunstancia.

El número medio de evaluaciones para aquellos casos en los que la solución GR no es la óptima no es muy elevado, incluso su desviación típica se reduce a la mitad con respecto al TS. Se aprecia que el algoritmo no sólo presenta gran dependencia de la solución inicial, sino que la misma estructura de la red da lugar a valores diferentes tanto en el número medio de evaluaciones como en las desviaciones típicas (compárense estos resultados para las redes de 50 y la de 55 nodos).

Las distribuciones de los errores del TS se muestra en el anexo 1 (tabla 3). En este caso se produce un incremento en el número de errores cuando aumenta la variabilidad de la demanda de los nodos. Mientras que para $d = 0$ y $d = 1$ el número de fallos es de 419 y 496, respectivamente, cuando $d = 2$, el número de errores se incrementa significativamente hasta los 863. Independientemente de la distribución de la demanda, siempre se producen muchos más errores cuando $r = 2$, aunque en relación al porcentaje medio de error, la diferencia se reduce bastante. Los errores para el TS(GR) se reparten entre las tres distribuciones de demanda, predominando los errores cuando $r = 2$.

4.3.4 Síntesis

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide para el caso binario-no esencial ha sido resuelto utilizando los algoritmos heurísticos empleados en este trabajo. Los resultados obtenidos por cada uno de ellos pueden ser contrastados en la tabla 4.14 (con un (*) se indica que no se incluyen las evaluaciones correspondientes al GR). Estos resultados se resumen en los siguientes puntos:

- El algoritmo GR no alcanza la solución óptima en un 21.367 % de los casos,

con un error medio del 0.1322 %, mejor incluso que el obtenido por el TS cuando se toma una solución inicial aleatoria.

- El TB mejora los resultados obtenidos por el GR, produciendo un error medio del 0.041 %. El TB(GR) reduce este error a casi la mitad.
- El TS(GR) mejora los resultados del TS de forma muy significativa, superando los obtenidos por el TB(GR).

	GR	TB	TS	TB(GR)	TS(GR)
% error (r=2)	0.0873	0.028	0.566	0.0306	0.0205
% error (r=3)	0.1771	0.054	0.721	0.0240	0.0026
% error	0.1322	0.041	0.644	0.0274	0.0115
% fallos (r=2)	17.9487	2.777	25.598	3.419	5.128
% fallos (r=3)	24.7863	4.358	43.205	5.128	1.709
% fallos	21.3675	3.568	34.401	4.273	3.419
% er. / % f. (r=2)	0.0048	0.0101	0.0221	0.0089	0.040
% er. / % f. (r=3)	0.0071	0.0124	0.0167	0.0047	0.0015
% er. / % f.	0.0062	0.0115	0.0187	0.0064	0.0034
ev. med. (r=2)	120.6923	183.069	105.576	119.923*	96.821*
ev. med. (r=3)	179.5383	309.670	218.235	183.325*	113.880*
ev. med.	150.115	246.369	161.905	151.624*	105.351*
sd (r=2)	0	16.813	63.086	5.579	48.623
sd (r=3)	0	30.349	113.435	7.340	44.585
sd	0	23.581	88.260	6.459	46.604

Tabla 4.14: Resultados para los distintos algoritmos. Binario-no esencial

- El porcentaje de fallos es superior cuando $r = 3$ para todos los algoritmos, salvo el TS(GR), aunque los porcentajes medios de error, a excepción del TB(GR), son superiores cuando $r = 2$.
- El porcentaje de error por fallo cometido por el GR y el TB es superior cuando $r = 3$. Para el resto de las alternativas la situación es la contraria.
- El TB presenta muy poca dependencia con respecto a la solución de partida (baja desviación típica para el número medio de evaluaciones invertidas en la resolución de los problemas).
- El TS obtiene una media de evaluaciones inferior al TB, aunque presenta una desviación típica superior al triple de la resultante en el TB. Esta diferencia es mucho más significativa entre el TB(GR) y el TS(GR).

4.4 Parcialmente binario-esencial

4.4.1 Algoritmo greedy

La utilización del algoritmo GR para resolver el problema del $(r|X_p)$ -medianoide parcialmente binario-esencial lleva asociado un porcentaje medio de error del 0.3851 %. Este error es inferior al caso binario-esencial aunque el porcentaje de fallos es superior. Los datos referentes al comportamiento de este algoritmo se presentan en la tabla 4.15.

	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error ($r=2$)	0.1479	0.0473	0.9825	0.7923	2.0851	0.3720
% error ($r=3$)	0.3912	0.0588	0.8763	0.6584	1.3912	0.3981
% error	0.2696	0.0533	0.9294	0.7254	1.7382	0.3851
% fallos ($r=2$)	13.333	22.222	66.666	100	100	34.188
% fallos ($r=3$)	40	37.777	100	100	100	52.991
% fallos	26.666	30	83.333	100	100	43.589
ev. ($r=2$)	149	99	109	157	63	120.692
ev. ($r=3$)	222	147	162	234	93	179.538
ev.	185.50	123.0	135.50	195.50	78.0	150.115

Tabla 4.15: Resultados para el GR. Parcialmente binario-esencial

Se puede observar que el porcentaje de error cometido depende en gran medida de la red. Por ejemplo, en las redes (12) y (13) el algoritmo no consigue alcanzar la solución óptima en ninguno de los escenarios. Sin embargo, el error cometido en la red de 32 nodos (13) es muy superior al cometido por la de 79 (12). En general, el porcentaje de fallos es muy elevado, 43.589 %, lo que indica que casi en la mitad de los casos no se consigue alcanzar la solución óptima.

En cuanto a la distribución de los errores (véase la tabla 4 en el anexo 1), no parece existir ningún comportamiento general. El número de fallos es muy parecido para las distintas distribuciones de la demanda y tan sólo cuando $d = 2$ existe una diferencia significativa entre los fallos cometidos cuando $r = 2$ y $r = 3$. Únicamente en dos de las trece redes se consigue la solución óptima en todos los problemas resueltos, mientras que en seis redes los fallos son superiores al 50 %.

4.4.2 Algoritmo de intercambio

El algoritmo de intercambio ha sido utilizado para resolver estos problemas en sus dos versiones, partiendo de una solución inicial aleatoria (TB) y tomando como

solución de partida la obtenida por el GR (TB(GR)). Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.16.

TB	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.0022	0.1628	0.2214	0.2391	0.0492
% error (r=3)	0.0347	0.0222	0.1008	0.0097	0.0109	0.0312
% error	0.0173	0.0121	0.1345	0.1155	0.1249	0.0402
% fallos (r=2)	0	13.444	9.444	58.333	18.333	7.094
% fallos (r=3)	13.444	7	20	18.333	1.111	10.897
% fallos	6.7222	4.111	14.722	38.333	9.722	8.995
ev. med. (r=2)	233.221	153.853	205.933	265.366	105	193.205
ev. med. (r=3)	403.40	257.828	327.733	501.755	171.616	331.326
ev. med.	318.310	205.841	266.833	383.561	138.308	262.266
sd (r=2)	33.507	19.985	54.456	58.603	24.661	31.398
sd (r=3)	72.187	39.573	51.560	94.474	34.653	56.884
sd	52.847	29.779	54.508	76.538	29.657	44.141
TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.1237	0	0.3838	0.5991	0.1232
% error (r=3)	0.0516	0.0154	0.0201	0	0	0.0273
% error	0.0258	0.0097	0.010	0.1919	0.2995	0.0522
% fallos (r=2)	0	2.222	0	66.666	44.444	9.4017
% fallos (r=3)	17.777	6.666	11.111	0	0	10.2564
% fallos	8.888	4.444	5.555	33.333	22.222	9.8290
ev. med. (r=2)	148.622	93.533	130.555	206.333*	74.333*	124.769*
ev. med. (r=3)	245.80	148.977	174.333	330.333*	129.888*	200.649*
ev. med.	197.211	124.733	152.444	268.333*	102.111*	164.047*
sd (r=2)	4.866	3.2	16	77	21.794	22.777
sd (r=3)	36	16.123	15.666	76	76.879	30.816
sd	20.433	9.661	15.833	76.5	49.336	26.796

Tabla 4.16: Resultados obtenidos por el TB y el TB(GR). Parcialmente binario-esencial

El porcentaje de error cometido por el TB se reduce sustancialmente con respecto al del GR, siendo tan sólo de un 0.0402 %. En ninguna de las redes se supera el 0.14 %, destacando las redes de 75 y 50 nodos para las que el porcentaje de error es inferior al 0.02 %. En media, el algoritmo comete más fallos cuando $r = 3$, aunque no se da la misma tendencia para todas las redes. Sin embargo,

el error cometido cuando se produce un fallo es superior cuando $r = 2$. Tan sólo en la (12), se produce una diferencia significativa en el número de errores con el resto de las redes, propiciada fundamentalmente porque el algoritmo es incapaz de alcanzar la solución óptima en más de la mitad de los problemas.

Para resolver los problemas planteados, el TB realiza una media de 262.266 evaluaciones, con una desviación típica de 44.141. Si bien la media es algo superior a la obtenida para los casos binario esencial y no esencial, lo más destacable es el incremento de la desviación típica, con valores que casi doblan las resultantes en esas situaciones.

Obsérvese que el caso parcialmente binario-esencial es el primero, tanto para el TB como para el TS, donde la utilización de la solución GR como punto de partida no produce una reducción en el porcentaje de error. El porcentaje medio de error es del 0.0522 %, lo significa un incremento de 0.012 unidades porcentuales. Sin embargo, si se analizan las distribución de los fallos del TB (tabla 5 en anexo 1), puede comprobarse que este algoritmo no tiene ningún éxito en 51 de los 234 escenarios, mientras que el TB(GR) no alcanza el óptimo en tan sólo 23 casos.

Los fallos cometidos por el TB se encuentran concentrados en determinados escenarios, sobre todo los correspondientes a las redes (11), (12) y (13). Lo más frecuente es que en aquellos casos en los que existen errores, el número de fallos sea muy elevado. Tan sólo en la red (11) existen escenarios para los que se produce un único error de los 20 posibles.

El número de errores del TB tiende a aumentar cuando crece la variabilidad de la demanda de los nodos. Para $d = 1$ no existe apenas diferencia entre el número de errores cometidos para $r = 2$ y $r = 3$, mientras que para las otras dos distribuciones existe una clara mayoría de los errores cometidos para $r = 3$.

4.4.3 Algoritmo de búsqueda tabú

El problema del $(r|X_P)$ -medianoide para asignaciones parcialmente binarias y demanda esencial también ha sido resuelto mediante el algoritmo de búsqueda tabú. Al igual que en los casos anteriores, como regla de parada se ha impuesto que el número de evaluaciones realizadas no supere en un 50 % a las invertidas en media por el TB para este mismo caso. Los resultados obtenidos, tanto a partir de las 20 soluciones iniciales aleatorias (TS) como a partir de la solución obtenida por el GR (TS(GR)), se presentan en la tabla 4.17.

En dicha tabla se observa que el porcentaje medio de error cometido es del 0.1056 %, muy superior al del TB en sus dos versiones aunque inferior al cometido por el GR. Obsérvese que con esta red también se producen los peores porcentajes de error. Es destacable que los mejores resultados son obtenidos para la red (12), mientras que para el TB son los peores.

El número medio de evaluaciones requerido por el TS es bastante inferior al del TB, sin embargo, su correspondiente desviación típica es muy elevada. Cabe destacar el alto número de evaluaciones precisadas por la red de 32 nodos (13). Ello

es debido a que el algoritmo no alcanza la solución óptima en muchos casos y por lo tanto, el algoritmo se detiene tras haber invertido el máximo de evaluaciones permitido.

TS	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.0608	0.0257	0.1216	0.0098	0.4060	0.0766
% error (r=3)	0.0540	0.0889	0.2588	0.0080	0.680	0.1346
% error	0.0574	0.0573	0.1902	0.0089	0.543	0.1056
% fallos (r=2)	12	11.555	42.777	5.555	55	14.102
% fallos (r=3)	20	20.777	38.333	18.333	85	27.008
% fallos	16	16.166	40.555	11.944	70	20.555
ev. med. (r=2)	123.976	62.027	110.766	134.438	109.744	103.615
ev. med. (r=3)	310.101	154.905	188.894	316.033	210.083	245.765
ev. med.	217.038	108.465	149.830	225.236	159.914	174.690
sd (r=2)	66.524	39.714	67.066	89.968	54.014	60.150
sd (r=3)	202.215	97.983	114.846	193.989	62.870	151.591
sd	134.369	68.848	90.956	141.979	58.442	105.870
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0	0	0	0.178	0.00137
% error (r=3)	0	0.0058	0	0	0.0612	0.00602
% error	0	0.0029	0	0	0.0393	0.0037
% fallos (r=2)	0	0	0	0	22.222	1.7094
% fallos (r=3)	0	2.222	0	0	22.222	2.5641
% fallos	0	1.111	0	0	22.222	2.1368
ev. med. (r=2)	24.833	43.167	16.666	71.333*	49*	41.6190*
ev. med. (r=3)	144.817	42.653	37.444	44*	70.889*	85.9558*
ev. med.	84.825	42.909	27.055	57.666*	59.944*	63.787*
sd (r=2)	19.188	37.146	5.391	47.429	62.556	35.157
sd (r=3)	33.484	40.549	10.126	8.351	106.772	38.0831
sd	26.335	38.847	7.758	27.890	84.714	36.620

Tabla 4.17: Resultados para el TS y TS(GR). Parcialmente binario-esencial

Si se analiza la distribución de los fallos (ver tabla 6 en el anexo 1), se observa que los errores no se concentran en determinados escenarios sino que se reparten entre gran cantidad de ellos. De hecho, ha conseguido alcanzar la solución óptima en los 20 problemas resueltos en tan sólo 51 casos. El algoritmo no parece

experimentar sensibilidad con respecto a la distribución de la demanda de los nodos. Donde sí que parece existir un comportamiento claro es en el mayor número de fallos cometidos para $r = 3$.

Los resultados obtenidos mejoran de forma sustancial si el algoritmo se inicia con la solución GR, alcanzando un porcentaje de error del 0.00137 %. Este error tan bajo es consecuencia de que el algoritmo no encuentra la solución óptima en tan sólo cinco de los 234 escenarios estudiados. Estos errores se encuentran distribuidos en una red de 50 nodos y en la de 32, por lo que en las once redes restantes el éxito es total.

No parece existir relación entre el número de errores y el de centros de servicio nuevos ya que en este caso, de los cinco fallos, dos se dan para $r = 2$ y tres para $r = 3$. Con esta nueva versión se reducen significativamente el número medio de evaluaciones y la desviación típica correspondiente.

	GR	TB	TS	TB(GR)	TS(GR)
% error (r=2)	0.3720	0.0492	0.0766	0.1232	0.0013
% error (r=3)	0.3981	0.0312	0.1346	0.0273	0.0060
% error	0.3851	0.0402	0.1056	0.0522	0.0037
% fallos (r=2)	34.188	7.094	14.102	9.402	1.7094
% fallos (r=3)	52.991	10.897	27.008	10.256	2.5641
% fallos	43.589	8.995	20.555	9.829	2.1368
% er. / % f. (r=2)	0.0109	0.0060	0.0054	0.0131	0.0008
% er. / % f. (r=3)	0.0075	0.0029	0.0050	0.0027	0.0023
% er. / % f.	0.0088	0.0045	0.0052	0.0053	0.0017
ev. med. (r=2)	120.6923	193.205	103.615	124.769*	41.619*
ev. med. (r=3)	179.5383	331.326	245.765	200.649*	85.956*
ev. med.	150.115	262.266	174.690	164.047*	63.787*
sd (r=2)	0	31.398	60.150	22.777	35.157
sd (r=3)	0	56.884	151.591	30.816	38.083
sd	0	44.141	105.870	26.796	36.620

Tabla 4.18: Resultados para los distintos algoritmos. Parcialmente binario-esencial

4.4.4 Síntesis

Un resumen de los resultados obtenidos por los distintos algoritmos heurísticos utilizados en la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales cuando las asignaciones son parcialmente binarias aparecen en la tabla

4.18 (el *) indica que no se incluyen las evaluaciones correspondientes al GR). Estos resultados se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

- Los porcentajes de error cometidos por los algoritmos no son muy elevados, siendo el GR y el TS los que obtienen peores resultados (0.3851 % y 0.1056 %, respectivamente).
- El porcentaje medio de error cometido por el TB(GR) (0.0522 %) es un poco superior al del TB (0.0402 %), aunque alcanza el óptimo en 211 de los 234 escenarios.
- La utilización del TS(GR) propicia el menor porcentaje de error entre todos los algoritmos utilizados (0.0037 %) y una media de evaluaciones razonablemente baja (teniendo en cuenta que previamente se ha tenido que calcular la solución GR) con una desviación típica bastante moderada.
- Los porcentajes de error cometidos por el TS(GR) cuando no alcanza la solución óptima son los más bajos de todos los algoritmos utilizados. El GR es el que más error comete en cada fallo.
- En todos los casos, el porcentaje de fallos cometido cuando $r = 2$ es superior al producido cuando $r = 3$, aunque en los porcentajes de error esta diferencia no es tan significativa.
- Para los algoritmos GR y TS no se muestra dependencia entre el número de errores cometido y la distribución de la demanda. Sin embargo, el TB parece incrementar el número de fallos según se incrementa la variabilidad de la demanda de los nodos.
- Los errores cometidos por el TB se suelen concentrar en determinados casos mientras que los del TS suelen estar muy distribuidos.

4.5 Parcialmente binario-no esencial

4.5.1 Algoritmo greedy

La resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide por medio del algoritmo GR cuando la demanda es no esencial y las asignaciones parcialmente binarias lleva asociado un porcentaje de medio error del 0.1505 %. Este valor es bastante inferior al obtenido cuando la demanda es esencial, aunque supera levemente al resultante en el caso binario-no esencial. Los datos correspondientes a los problemas resueltos utilizando este algoritmo se presentan en la tabla 4.19.

Su comportamiento depende en gran medida de la red ya que, como se ve en la tabla, mientras que en las redes de 75 nodos (1-5) no se produce ningún error, en la de 79 (12) el algoritmo es incapaz de llegar a la solución óptima en todos los escenarios planteados. El GR presenta un comportamiento curioso para la red

(11) ya que resuelve con éxito los nueve escenarios en los que $r = 2$, mientras que falla en todos los de $r = 3$. Además, se puede observar la gran diferencia existente entre los porcentajes de error cometidos en las redes (11) y (12) cuando se localizan tres nuevos centros de servicio. Aunque en ambos casos se produce un 100 % de errores, el error cometido en la (12) es casi el triple del cometido en la (11). En la tabla 7 del anexo 1 se muestra la distribución de los errores cometidos por el GR.

	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error ($r=2$)	0	0.0453	0	1.4990	0.1379	0.1379
% error ($r=3$)	0	0.0344	0.5420	1.4053	0.0008	0.1631
% error	0	0.0398	0.2710	1.4521	0.0340	0.1505
% fallos ($r=2$)	0	22.222	0	100	33.333	18.803
% fallos ($r=3$)	0	22.222	100	100	11.111	24.786
% fallos	0	22.222	50	100	22.222	20.647
ev. ($r=2$)	149	99	109	157	63	120.692
ev. ($r=3$)	222	147	162	234	93	179.538
ev.	185.50	123.0	135.50	195.50	78.0	150.115

Tabla 4.19: Resultados para el GR. Parcialmente binario-no esencial

El mayor número de errores se da cuando $d = 0$ y $d = 1$. En ambos casos se cometen más fallos cuando se localizan tres nuevos centros de servicio. Cuando la variabilidad de la demanda es mayor ($d = 2$), el número de errores se reduce repartiéndose de igual forma para los dos valores de r .

4.5.2 Algoritmo de intercambio

El algoritmo de intercambio también ha sido utilizado para la resolución del $(r|X_p)$ -medianoide cuando las asignaciones son parcialmente binarias y la demanda es no esencial. Los resultados obtenidos, tanto cuando se toman las 20 soluciones iniciales distintas (TB) como cuando se parte de la solución GR (TB(GR)), se muestran en la tabla 4.20.

El porcentaje medio de error del TB es del 0.0155 %, bastante inferior al obtenido por este mismo algoritmo cuando el servicio es esencial. Los porcentajes de error y de fallos cometidos cuando $r = 3$ son el doble que cuando $r = 2$ consecuencia de los resultados obtenidos por las redes de 55 y 79 nodos (11 y 12). El número medio de evaluaciones invertidas por el algoritmo es de 249.308, un poco inferior al resultante en el caso esencial. Este dato es aún más favorable si se observa que también se reduce la desviación típica asociada a las evaluaciones obteniéndose un valor de 25.701.

Analizando la distribución de los errores (véase tabla 8 en el anexo 1), se observa que en la mayoría de las redes no se producen errores, de hecho, descartando las redes de 55 y 79 nodos en las que se producen casi todos los errores, de las once redes restantes, en nueve no se produce ningún error y en las otras dos existen dos escenarios en los que el éxito no es completo. De los 234 casos estudiados, este algoritmo alcanza la solución óptima en los 20 problemas en 213 de ellos. La red de 55 nodos es la única en la que se producen errores para los dos valores de r analizados, para el resto tan sólo se producen para una de las alternativas.

TB	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.0045	0.0503	0.0583	0	0.010
% error (r=3)	0.0006	0	0.1611	0.1101	0	0.0210
% error	0.0003	0.0022	0.1057	0.0842	0	0.0155
% fallos (r=2)	0	3.111	8.333	3.333	0	2.0940
% fallos (r=3)	1.777	0	34.444	10	0	4.1025
% fallos	0.0088	1.555	21.388	6.666	0	3.0982
ev. med. (r=2)	218.458	150.066	198.866	297.877	97	187.413
ev. med. (r=3)	370.040	251.666	309.533	460.80	166.783	311.203
ev. med.	294.249	200.866	254.20	379.339	131.891	249.308
sd (r=2)	11.252	15.174	51.799	62.542	13.437	19.991
sd (r=3)	23.235	24.551	43.369	96.555	29.494	31.411
sd	17.243	19.862	47.574	79.548	21.465	25.701
TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.0444	0	0	0	0.0025
% error (r=3)	0	0	0.3333	0	0	0.0128
% error	0	0.0222	0.1666	0	0	0.0076
% fallos (r=2)	0	4.444	0	0	0	1.709
% fallos (r=3)	0	0	33.333	0	0	2.564
% fallos	0	2.222	16.666	0	0	2.136
ev. med. (r=2)	217	97	107	155	61	118.6923
ev. med. (r=3)	155	146.177	157	279.666	91.222	180.2905
ev. med.	182	121.589	132	217.333	76.111	149.4914
sd (r=2)	0	0	0	0	0	0
sd (r=3)	0	8.290	0	76	9.666	9.7782
sd	0	4.145	0	38	4.833	4.8891

Tabla 4.20: Resultados para el TB y el TB(GR). Parcialmente binario-no esencial

El número de errores cometido cuando $d = 0$ y $d = 1$ es bastante similar, muy superior al ocurrido cuando la variación de la demanda es la mayor ($d = 2$). A pesar de la similitud en el número de errores en los dos casos de poca variabilidad para la demanda, la distribución de los errores según el número de nuevos centros de servicio es muy distinta. Cuando la demanda de todos los nodos es la misma, los errores se reparten de forma bastante equitativa entre ambos casos, mientras que si la variabilidad es un poco mayor, el número de errores para $r = 3$ es más de tres veces superior que para $r = 2$. Este comportamiento se acentúa en el caso de mayor variabilidad, para el cual tan sólo se producen errores en caso de implantar tres nuevos centros.

La utilización de la solución obtenida por el GR como punto de partida para el TB(GR) produce una gran reducción del porcentaje de error que pasa a ser el 0.0076 %. Esto es debido a que se alcanza la solución óptima en todos los casos salvo en cinco, dos en una red de 50 nodos con $r = 2$, y tres en la de 55 con $r = 3$. En este caso se necesita invertir unas 100 evaluaciones menos que en el TB, reduciéndose la desviación a cantidades mínimas.

4.5.3 Algoritmo de búsqueda tabú

Los resultados obtenidos por este algoritmo se muestran en la tabla 4.21. Cuando se eligen soluciones iniciales de forma aleatoria (TS) los porcentajes son muy malos si se comparan con los obtenidos por el GR o el TB. El porcentaje medio de error cometido en este caso es del 0.4536 %, el triple del resultante de la aplicación del GR, lo que lo hace desaconsejable.

Aunque la media de evaluaciones empleadas por el algoritmo es un poco inferior a la del TB, su desviación típica es elevada, por lo que la dependencia de este algoritmo de las soluciones iniciales es muy acentuada. A pesar de que se comete casi el doble de errores cuando $r = 3$ que cuando $r = 2$, los porcentajes medios de error son bastante similares. Los peores resultados se dan para la red con menor número de nodos (13), para la que se producen errores del 2.695 % cuando $r = 2$.

Si se analiza la localización de los errores según la distribución de la demanda (ver tabla 9 en el anexo 1) se comprueba que su número se incrementa con la variabilidad de la demanda, produciéndose casi la mitad de los fallos cuando $d = 2$. En los tres casos se producen muchos más errores cuando $r = 3$.

Sin embargo, cuando la solución de partida es la obtenida por el GR (TS(GR)), el error cometido es el más bajo de los alcanzados por los distintos algoritmos empleados. Esta versión obtiene un 0.0040 % de error medio, invirtiendo una media de 81.160 evaluaciones. La media de evaluaciones es inferior a la del TB(GR) aunque su desviación típica es muy superior.

En este caso se producen tan sólo siete errores, de los que cinco ocurren cuando se localizan dos nuevos centros y dos cuando son tres los nuevos centros. Además, los errores se localizan en cuatro de las trece redes utilizadas en el estudio. El caso más destacable es el de la red (13), para la que se ha reducido el porcentaje de

errores de un 61.666 % hasta un 5.555 %, con un porcentaje medio de error del 0.0107 %.

TS	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.3441	0.1682	0.3338	0.0359	2.6950	0.4457
% error (r=3)	0.3916	0.3656	0.2640	0.0920	1.4920	0.4615
% error	0.3679	0.2669	0.2989	0.0640	2.0930	0.4536
% fallos (r=2)	19.222	24.352	25	5.555	63.888	25.897
% fallos (r=3)	42.777	46.296	36.666	23.333	59.444	47.008
% fallos	31	35.324	30.833	14.444	61.666	36.453
ev. med. (r=2)	173.733	93.911	126.905	133.427	102.817	138.099
ev. med. (r=3)	420.329	208.674	206.822	313.711	175.456	311.514
ev. med.	279.031	151.293	166.863	223.569	139.136	224.806
sd (r=2)	106.021	50.263	65.294	90.357	44.427	79.366
sd (r=3)	162.857	82.103	108.074	192.559	64.309	128.604
sd	134.439	66.183	86.684	141.459	54.368	103.985
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	-	0.0095	-	0	0.0214	0.0062
% error (r=3)	-	0.0022	0.0107	0	0	0.0018
% error	-	0.0058	0.0107	0	0.0107	0.0040
% fallos (r=2)	-	8.888	-	0	11.111	4.273
% fallos (r=3)	-	2.222	11.111	0	0	1.709
% fallos	-	5.555	11.111	0	5.555	2.991
ev. med. (r=2)	-	80.633	-	19.666	143	94.305
ev. med. (r=3)	-	58.243	58.444	39	12	68.016
ev. med.	-	76.983	58.444	29.333	77.50	81.160
sd (r=2)	-	58.243	-	8	6.0827	50.883
sd (r=3)	-	8.497	108.366	9	0	8.580
sd	-	33.370	108.366	8.5	3.0413	29.732

Tabla 4.21: Resultados para el TS y TS(GR). Parcialmente binario-no esencial

4.5.4 Síntesis

Los resultados obtenidos por los diferentes algoritmos heurísticos utilizados para resolver el problema del $(r|X_p)$ -medianoide en el caso en el que la demanda es no esencial y las asignaciones parcialmente binarias se muestran en la tabla 4.22

(el (*) indica que no se incluyen las evaluaciones correspondientes al GR). Estos resultados se resumen a continuación:

	GR	TB	TS	TB(GR)	TS(GR)
% error (r=2)	0.1379	0.0100	0.4457	0.0025	0.0062
% error (r=3)	0.1631	0.0210	0.4615	0.0128	0.0018
% error	0.1505	0.0155	0.4536	0.0076	0.0040
% fallos (r=2)	18.803	2.094	25.897	1.709	4.273
% fallos (r=3)	24.786	4.102	47.008	2.564	1.709
% fallos	20.647	3.098	36.456	2.136	2.291
% er. / % f. (r=2)	0.0073	0.0047	0.0172	0.0014	0.0014
% er. / % f. (r=3)	0.0066	0.0512	0.0098	0.0049	0.0010
% er. / % f.	0.0073	0.0050	0.0124	0.0035	0.0013
ev. med. (r=2)	120.6923	187.413	138.099	118.692*	94.305*
ev. med. (r=3)	179.5383	311.203	311.514	180.290*	68.016*
ev. med.	150.115	249.308	224.806	149.491*	81.160*
sd (r=2)	0	19.991	79.366	0	50.883
sd (r=3)	0	31.411	128.604	9.778	8.580
sd	0	25.701	103.985	4.889	29.732

Tabla 4.22: Resultados para los distintos algoritmos. Parcialmente binario-no esencial

- El porcentaje medio de error conseguido con el algoritmo GR es del 0.1505 %, mejorando incluso el conseguido por el TS. Además, aunque no alcanza la solución óptima en un 20.647 % de los escenarios, constituye una muy buena solución de partida para los otros dos algoritmos.
- El TB se comporta como un algoritmo muy independiente de la solución inicial elegida, cometiendo un porcentaje de error del 0.0155 %. Este error es reducido a la mitad en su versión TB(GR).
- El TS se muestra como un algoritmo con gran dependencia de la solución de partida. En su versión TS obtiene peores resultados que el GR, mientras que en su versión TS(GR) se produce una mejora sustancial, llegando a obtener el nivel más bajo de error de los conseguidos con los distintos algoritmos.
- En todos los casos, los porcentajes medios de error y los de fallos han sido superiores cuando se localizan tres nuevos centros de servicio.

- El TS es el algoritmo que mayor porcentaje de error produce cuando falla, mientras que, paradójicamente, su versión TS(GR) es la que menor porcentaje de error origina en cada fallo. En todos los casos, el porcentaje de error por fallo cometido es superior cuando $r = 2$.
- La utilización de la solución GR como punto de partida para el TB(GR) y el TS(GR) supone tanto la reducción en la media de evaluaciones invertidas como de sus correspondientes desviaciones típicas.
- El efecto de la distribución de la demanda no influye de igual forma a todos los algoritmos. Mientras que para el GR y el TS el número de errores aumenta cuando crece la diversidad de la demanda de los nodos, para el TB ocurre todo lo contrario.
- Los errores cometidos por el TB se suelen concentrar en determinados escenarios mientras que los del TS suelen estar muy distribuidos.

4.6 Proporcional-esencial

4.6.1 Algoritmo greedy

Los resultados obtenidos por el GR en el caso proporcional-esencial se muestran en la tabla 4.23. El porcentaje medio de error (0.0883 %) es el más bajo de los logrados en los casos de demanda esencial y aunque el número de fallos es superior al del caso parcialmente binario, el error cometido por fallo es inferior.

	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.0434	0.0277	0.0417	0	0.6983	0.0843
% error (r=3)	0.0676	0.1168	0.0162	0	0.2618	0.0923
% error	0.0555	0.0723	0.0289	0	0.4801	0.0883
% fallos (r=2)	13.333	24.444	33.333	0	77.777	23.077
% fallos (r=3)	20	35.555	11.111	0	100	29.914
% fallos	16.666	30	22.222	0	88.888	26.495
ev. (r=2)	149	99	109	157	63	120.692
ev. (r=3)	222	147	162	234	93	179.538
ev.	185.50	123.0	135.50	195.50	78.0	150.115

Tabla 4.23: Resultados para el GR. Proporcional-esencial

En este caso se observa que el porcentaje medio de error y el de fallos cometidos se incrementa cuando se reduce el número de nodos de la red. Los mejores

resultados se dan para la red de 79 nodos (12) en la que se alcanza el óptimo en los 18 escenarios propuestos, mientras que los peores, con 16 errores, se dan para la red de 32 nodos (13). La distribución de los errores según el número de nuevos centros no es la misma para todas las redes, aunque en la mayoría se producen más fallos cuando $r = 3$. A pesar de ello, los porcentajes de error se encuentran repartidos de forma muy parecida en ambos casos.

El número de errores es menor para el caso en el que la demanda de los nodos está distribuida con una mayor variación ($d = 2$), mientras que en los otros dos casos, variabilidad nula o pequeña, el número de errores es muy similar. En particular, se cometen 24, 23 y 15 errores para $d = 0, 1$ y 2, respectivamente (ver distribución de los errores en la tabla 10 del anexo 1).

4.6.2 Algoritmo de intercambio

Los resultados obtenidos tras la aplicación del algoritmo de intercambio en el problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando las asignaciones son proporcionales y la demanda esencial se muestran en la tabla 4.24. También en este caso se ha considerado el TB, en el que se toman soluciones iniciales elegidas de forma aleatoria y el TB(GR), en el que el algoritmo parte de la solución obtenida por el algoritmo GR.

El porcentaje medio de error cometido por el TB es del 0.0117 %, el mejor obtenido por este algoritmo para los distintos tipos de asignaciones cuando la demanda es esencial. En general los errores son muy bajos, siendo la red (13) en la que se produce, y con diferencia, el mayor porcentaje de error, aunque es tan sólo del 0.1249 %.

A pesar de que, en general, el porcentaje de fallos cuando $r = 3$ es ligeramente superior que cuando $r = 2$, los porcentajes de error no se ajustan a la misma tendencia, siendo muy superiores cuando $r = 2$. De todas formas, la tendencia no es la misma para todas redes.

El algoritmo muestra poca dependencia de la solución de partida con respecto al número de evaluaciones utilizadas, invirtiendo una media de 247.651 evaluaciones con una desviación típica de 24.287.

Existen muchas redes en los que el algoritmo alcanza el óptimo en todos los casos, de hecho, si se observa la distribución de los errores (ver tabla 11 en el anexo 1), se puede comprobar que en seis de las trece redes no se produce ningún error. En total, se producen errores en 18 de los 234 escenarios estudiados. El mayor número de errores se produce cuando la demanda se encuentra distribuida con mayor variabilidad ($d = 2$), mientras que en los otros dos casos el número de errores es muy parecido. Para las distribuciones en las que se producen menos errores ($d = 0, 1$), el mayor número de fallos se obtiene para $r = 2$, mientras que para $d = 2$, éste se produce para $r = 3$. Como dato curioso se observa que para los casos $d = 0, 1$ la mayoría de los errores resultan cuando $p = 1$, todo lo contrario a lo que suele producirse en otras ocasiones.

TB	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0.0025	0.0002	0	0.2390	0.0194
% error (r=3)	0.0035	0.0049	0	0	0.0109	0.0041
% error	0.0017	0.0037	0.0001	0	0.1249	0.0117
% fallos (r=2)	0	1.555	5	0	18.333	2.393
% fallos (r=3)	1.888	4.888	0	0	1.111	2.692
% fallos	0.944	3.222	2.50	0	9.722	2.543
ev. med. (r=2)	225.840	150.866	288.733	233.283	105	193.119
ev. med. (r=3)	384.840	251.718	184.955	389.022	171.616	302.183
ev. med.	305.340	201.293	236.844	311.153	138.308	247.651
sd (r=2)	17.559	16.736	24.597	7.937	14.504	19.455
sd (r=3)	33.726	29.002	47.727	11.151	12.847	29.119
sd	25.642	22.869	36.162	9.544	13.675	24.287
TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0	0	0	0.0371	0.0028
% error (r=3)	0	0.0008	0	0	0.0077	0.0009
% error	0	0.0004	0	0	0.0224	0.0019
% fallos (r=2)	0	0	0	0	11.111	0.855
% fallos (r=3)	0	2.222	0	0	22.222	2.564
% fallos	0	1.111	0	0	16.666	1.709
ev. med. (r=2)	147	97	107	155	67.666	119.205
ev. med. (r=3)	226.60	148.266	162.777	229	104.111	182.324
ev. med.	186.80	122.633	133.889	192	85.889	150.765
sd (r=2)	0	0	0	0	13.229	1.017
sd (r=3)	20.061	14.557	17.333	0	21.068	16.269
sd	10.030	7.278	8.666	0	17.148	8.643

Tabla 4.24: Resultados para el TB y el TB(GR). Proporcional-esencial

La utilización de la solución GR como punto de partida para el TB(GR) hace reducir el porcentaje de error al orden de la milésima, concentrándose la mayoría en los casos en los que $r = 2$. Con esta versión se producen tan sólo cuatro errores de las 234 situaciones posibles. De estos fallos, sólo uno se da cuando $r = 2$, pero se puede observar que el porcentaje de error cometido en este caso es muy superior a los cometidos por los tres restantes. Los errores se centran en dos redes, tres en la de 32 nodos, y uno en una de 50, por lo que en las once restantes el éxito del algoritmo es total. Tanto la media de evaluaciones empleadas en el desarrollo del algoritmo como su correspondiente desviación típica se reducen de forma significativa, aunque

se tendría que tener en cuenta las evaluaciones invertidas en la obtención de la solución GR.

TS	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.0439	0.0250	0.0588	0.0059	0.5229	0.0736
% error (r=3)	0.0059	0.0701	0.130	0.0224	0.3657	0.0961
% error	0.0528	0.0475	0.0944	0.0153	0.4443	0.0849
% fallos (r=2)	11.778	7.592	20.555	5	61.111	14.701
% fallos (r=3)	30	25.833	79.444	36.111	86.666	39.017
% fallos	20.889	16.713	50	20.555	73.889	26.859
ev. med. (r=2)	133.534	68.566	117.677	90.661	113.267	107.744
ev. med. (r=3)	277.590	153.608	275.972	334.366	222.544	241.729
ev. med.	205.562	111.087	196.825	212.514	167.905	174.737
sd (r=2)	90.886	47.965	73.419	81.531	55.133	73.254
sd (r=3)	160.837	72.479	72.576	217.982	41.176	120.830
sd	125.861	60.222	72.977	149.757	48.154	97.042
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.0015	0.0026	0	-	0	0.0016
% error (r=3)	$7.9 \cdot 10^{-5}$	0.0012	0	-	0.0078	0.0011
% error	0.0008	0.0019	0	-	0.0039	0.0013
% fallos (r=2)	2.222	2.222	0	-	0	1.709
% fallos (r=3)	4.444	4.444	0	-	33.333	5.983
% fallos	3.333	3.333	0	-	16.666	3.846
ev. med. (r=2)	102.833	72.555	8	-	14.714	57.202
ev. med. (r=3)	209.333	90.097	13	-	97.111	111.145
ev. med.	153.083	81.326	10.50	-	55.912	84.174
sd (r=2)	124.828	20.293	0	-	6.156	31.977
sd (r=3)	292.181	19.345	0	-	122.051	97.974
sd	208.505	19.819	0	-	64.104	64.976

Tabla 4.25: Resultados para el TS y TS(GR). Proporcional-esencial

4.6.3 Algoritmo de búsqueda tabú

El algoritmo de búsqueda tabú ha sido utilizado para la resolución de este problema empleando sus versiones TS, en la que se parte de soluciones iniciales elegidas aleatoriamente, y TS(GR), en la que se toma como punto de partida la

solución obtenida por el GR. Los resultados obtenidos por ambos procedimientos se muestran en la tabla 4.25.

El porcentaje de error cometido por el TS es levemente inferior al del GR, aunque superior al resultante de aplicar el TB. El número de fallos para este algoritmo es muy superior al del TB aunque el error cometido cada vez que no se alcanza el óptimo es inferior.

En todas las redes, el porcentaje de fallos cometidos cuando $r = 3$ es muy superior al resultante cuando se localizan dos nuevos centros de servicio. Sin embargo, el comportamiento del porcentaje medio de error no sigue la misma tendencia ya que existen redes en las que el error cometido cuando $r = 2$ es el mayor. La red que produce peores resultados es la de 32 nodos, siendo la única en la que los porcentajes alcanzan el orden de la décima.

El número medio de evaluaciones es inferior al invertido por el TB aunque se repite la circunstancia habitual de que la desviación típica es muy elevada. Obsérvese que tanto el alto número medio de evaluaciones como la baja, comparativamente, desviación típica que se produce en la red (13) es debido a que el algoritmo no alcanza el óptimo en un 86.666 % y consecuentemente, en estos casos se ha tenido que detener por alcanzar el límite de evaluaciones permitido.

Si se observa la distribución de los errores del TS (véase tabla 12 en el anexo 1) se comprueba que el elevado número de errores se encuentra muy distribuido por los escenarios objeto del estudio. Este algoritmo ha alcanzado la solución óptima en todos los 20 problemas planteados a partir de las diferentes soluciones iniciales en tan sólo 38 de los 234 escenarios. También se puede observar que el número de errores aumenta cuando crece la variabilidad de la demanda de los nodos, produciéndose el mayor número de errores cuando $r = 3$, independientemente de la distribución de la demanda.

El empleo de la solución GR como punto de partida tiene como consecuencia una mejora del algoritmo en todos los aspectos. Se reduce el porcentaje medio de error a un 0.0011 %, levemente inferior que el obtenido por el TB(GR). También se reduce el número medio de evaluaciones y su desviación típica correspondiente. Sin embargo, si bien existen redes en las que se dan desviaciones muy bajas, siguen existiendo casos como en las de 75 nodos con cifras muy elevadas.

El error cometido por el TS(GR) es consecuencia de los nueve problemas en los que no se ha alcanzado la solución óptima, de los que tan sólo dos se corresponden con $r = 2$. De las trece redes que forman el estudio, el TS(GR) alcanza el óptimo en todos los escenarios en nueve de ellas.

4.6.4 Síntesis

Los resultados de los algoritmos utilizados para resolver el problema del $(r|X_p)$ -medianoide se muestran en la tabla 4.26 (el (*) indica que no se incluyen las

	GR	TB	TS	TB(GR)	TS(GR)
% error ($r=2$)	0.0843	0.0194	0.0736	0.0028	0.0016
% error ($r=3$)	0.0923	0.0041	0.0961	0.0009	0.0011
% error	0.0883	0.0117	0.0849	0.0019	0.0013
% fallos ($r=2$)	23.077	2.393	14.701	0.855	1.709
% fallos ($r=3$)	29.914	2.692	39.017	2.564	5.983
% fallos	26.495	2.543	26.859	1.709	3.846
% er. / % f. ($r=2$)	0.0036	0.0405	0.0050	0.0033	0.0009
% er. / % f. ($r=3$)	0.0031	0.0076	0.0024	0.0003	0.0002
% er. / % f.	0.0033	0.0046	0.0031	0.0011	0.0003
ev. med. ($r=2$)	120.6923	193.119	107.744	119.205*	57.202*
ev. med. ($r=3$)	179.5383	302.183	241.729	182.324*	111.145*
ev. med.	150.115	247.651	174.737	150.765*	84.174*
sd ($r=2$)	0	19.455	73.254	1.017	31.977
sd ($r=3$)	0	29.119	120.830	16.269	97.974
sd	0	24.287	97.042	8.643	64.976

Tabla 4.26: Resultados para los distintos algoritmos. Proporcional-esencial

evaluaciones correspondientes al GR) y pueden ser resumidos en los siguientes puntos:

- El porcentaje de error obtenido por estos algoritmos van desde el 0.0883 % del GR hasta el 0.0013 del TS(GR). Además, los resultados del GR son bastante buenos, comparables incluso con los del TS, proporcionando una buena solución de partida para los algoritmos TB(GR) y TS(GR).
- El TB se muestra como un algoritmo bastante independiente de la solución inicial elegida, al contrario que el TS.
- La versión TB(GR) mejora los resultados obtenidos a partir de soluciones iniciales aleatorias, reduciendo el porcentaje de error y la desviación correspondiente a las evaluaciones invertidas en la resolución del problema. Esta mejora es mucho más sustancial en el TS(GR) en la que se obtiene el menor porcentaje de error, con un número bajo de evaluaciones medias pero con una desviación muy elevada si se compara con la del TB(GR).
- La tendencia común para todos los algoritmos es que el número de fallos cometidos cuando se localizan tres nuevos centros de servicio es superior al caso $r = 2$, independientemente de la distribución de la demanda. Respecto al porcentaje medio de error, no existe ninguna tendencia.

- Tanto el GR como el TB tienden a aumentar el número de errores cuando se reduce el número de nodos de la red.
- El TB es el algoritmo que mayor porcentaje de error comete cuando no consigue alcanzar la solución óptima. El TS produce mayor número de fallos aunque el error en estos casos es inferior, especialmente en el caso TS(GR).
- Mientras que para el GR el número de errores disminuye cuando aumenta la variabilidad de la distribución de la demanda, para el TB y el TS la tendencia es la contraria.

	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error ($r=2$)	0	0.0003	0	0	0	0.0001
% error ($r=3$)	0.0339	0.0018	0	0.0292	0	0.0035
% error	0.0169	0.0011	0	0.0146	0	0.0018
% fallos ($r=2$)	0	2.222	0	0	0	0.8547
% fallos ($r=3$)	8.888	4.444	0	22.222	0	6.8376
% fallos	4.444	3.333	0	11.111	0	3.8461
ev. ($r=2$)	149	99	109	157	63	120.692
ev. ($r=3$)	222	147	162	234	93	179.538
ev.	185.50	123.0	135.50	195.50	78.0	150.115

Tabla 4.27: Resultados para el GR. Proporcional-no esencial

4.7 Proporcional-no esencial

4.7.1 Algoritmo greedy

El algoritmo GR proporciona excelentes resultados para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando la demanda es no esencial y las asignaciones proporcionales. Como se observa en la tabla 4.27, el porcentaje medio de error cometido es tan sólo del 0.0018 %. El algoritmo alcanza la solución óptima en 225 de los 234 posibles escenarios.

Los nueve errores (como puede observarse en la tabla 13 del anexo 1) se encuentran distribuidos en cuatro redes, dos de 50 nodos, una de 75 y en de 79. De estos errores, tan sólo se produce uno cuando $r = 2$, en particular en el caso en el que la demanda es la misma para todos los nodos. Para las otras distribuciones de la demanda tan sólo se producen errores cuando $r = 3$, aunque el total de errores apenas difiere entre los tres casos.

4.7.2 Algoritmo de intercambio

Utilizando el algoritmo TB se alcanza el óptimo en todos los casos estudiados, ya sea partiendo de las 20 soluciones iniciales elegidas aleatoriamente, o partiendo de la solución GR. Los resultados correspondientes a las dos versiones se muestran en la tabla 4.28. Lo más destacable en este caso, es el elevado grado de efectividad del TB lo que hace que no parezca necesaria la resolución previa del algoritmo GR. La media de evaluaciones son similares a las obtenidas por el TB en los otros casos aunque las desviaciones típicas son más bajas.

TB	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0	0	0	0	0
% error (r=3)	0	0	0	0	0	0
% error	0	0	0	0	0	0
% fallos (r=2)	0	0	0	0	0	0
% fallos (r=3)	0	0	0	0	0	0
% fallos	0	0	0	0	0	0
ev. med. (r=2)	218.215	144.786	158.233	226.011	87.333	175.891
ev. med. (r=3)	371.160	240.491	262.733	394.511	143.10	296.815
ev. med.	294.687	192.639	210.483	310.261	115.216	236.353
sd (r=2)	11.389	7.701	1.325	3.903	10.047	10.486
sd (r=3)	17.944	16.718	2.60	16.684	8.70	17.081
sd	14.661	12.210	1.962	10.294	0.760	13.784
TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0	0	0	0	0
% error (r=3)	0	0	0	0	0	0
% error	0	0	0	0	0	0
% fallos (r=2)	0	0	0	0	0	0
% fallos (r=3)	0	0	0	0	0	0
% fallos	0	0	0	0	0	0
ev. med. (r=2)	147	97	107	155	61	118.693
ev. med. (r=3)	223.40	145.133	97	245.888	88	179.504
ev. med.	185.20	121.066	102	200.444	74.50	149.098
sd (r=2)	0	0	0	0	0	0
sd (r=3)	7.589	9.40	0	33.513	0	9.112
sd	3.794	4.70	0	16.756	0	4.556

Tabla 4.28: Resultados para el TB y el TB(GR). Proporcional-no esencial

4.7.3 Algoritmo de búsqueda tabú

El comportamiento del TS cuando se eligen soluciones iniciales de forma aleatoria es mucho peor al de los otros dos algoritmos. Tan sólo si se parte de la solución GR (TS(GR)) los resultados alcanzan resultados parecidos a los obtenidos por el TB. En la tabla 4.29 se muestran los datos referentes a la aplicación de ambas versiones en el caso proporcional-no esencial.

TS	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0.7108	0.2312	0.1680	0.0197	2.663	0.5993
% error (r=3)	0.4589	0.4703	0.1525	0.0647	2.620	0.6118
% error	0.5848	0.7508	0.1603	0.0422	2.641	0.6056
% fallos (r=2)	10	36.778	35.555	5.555	64.444	33.248
% fallos (r=3)	24.444	51.555	40.555	47.222	86.666	51.367
% fallos	17.222	44.166	38.555	26.389	78.055	42.307
ev. med. (r=2)	173.907	96.556	120.933	94.333	100.883	135.771
ev. med. (r=3)	385.541	194.490	222.355	380.866	195.672	299.503
ev. med.	279.724	145.423	171.644	237.60	148.278	217.637
sd (r=2)	100.233	50.449	62.282	83.036	41.765	76.227
sd (r=3)	169.073	74.535	92.895	187.269	38.111	123.912
sd	134.653	62.492	77.589	135.153	39.938	100.069
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% error (r=2)	0	0	0	0	0	0
% error (r=3)	0.0013	0	0	0	0	0.0005
% error	0.0006	0	0	0	0	0.00025
% fallos (r=2)	0	0	0	0	0	0
% fallos (r=3)	22.222	0	0	0	0	0.854
% fallos	11.111	0	0	0	0	0.427
ev. med. (r=2)	-	14	-	-	-	14
ev. med. (r=3)	309	147	-	381	-	286.50
ev. med.	309	80.50	-	381	-	256.233
sd (r=2)	-	0	-	-	-	0
sd (r=3)	93	162.334	-	320	-	167.083
sd	93	81.167	-	320	-	164.722

Tabla 4.29: Resultados para el TS y TS(GR). Proporcional-no esencial

El porcentaje de error del TS es peor que el del GR y evidentemente del obtenido por el TB en sus dos versiones. El algoritmo no alcanza la solución óptima en un 42.307 % de los problemas resueltos, estando el porcentaje de fallos por encima del

50 % para $r = 3$. Los peores resultados se dan para la red de 32 nodos en la que se produce un error medio del 2.641 %, con un 78.055 % de errores cometidos. El porcentaje de fallos es superior cuando se localizan tres nuevos centros de servicio pero la diferencia en el porcentaje medio de error es muy pequeña.

Si se analiza la distribución de los errores (ver tabla 14 en el anexo 1) se observa que cuando la demanda se encuentra menos dispersa, el número de errores es menor, 553 y 543 para $d = 0$ y 1, respectivamente. En el caso de mayor variabilidad el número de errores se eleva hasta los 884. En todas las distribuciones se observa un mayor número de errores en el caso en de tres nuevos centros de servicios. En este caso, el TS tan sólo consigue alcanzar el óptimo en 19 de los 234 casos posibles, independientemente de las soluciones iniciales elegidas.

Tan sólo si se toma como solución inicial la obtenida por el GR, el TS(GR) consigue reducir el porcentaje de error a niveles comparables con los otros algoritmos. Así, el TS(GR) consigue alcanzar el óptimo en ocho de los nueve problemas en los que el GR había fallado, obteniendo un porcentaje medio de error de un 0.00025 %.

4.7.4 Síntesis

Los resultados obtenidos para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide para demanda no esencial y asignaciones proporcionales empleando los distintos algoritmos heurísticos se muestran en la tabla 4.30 (el (*) indica que no se incluye las evaluaciones correspondientes al GR). Estos datos pueden ser resumidos en los siguientes puntos:

- El algoritmo GR obtiene excelentes resultados con un error del 0.0018 % consecuencia de los nueve fallos cometidos de entre los 234 posibles casos. Su comportamiento es muy uniforme, destacándose exclusivamente que la mayor parte del error cometido se produce cuando $r = 2$.
- Tanto el TB como el TB(GR) alcanzan siempre la solución óptima. Ambas versiones ofrecen una media de evaluaciones aceptable en comparación con el TS, con una desviación típica asociada muy baja.
- El TS comete un error del 0.6056 %, superior al del GR. Sin embargo, el TS(GR) consigue rebajar este error has un 0.002 %.
- El algoritmo TS presenta gran cantidad de fallos con una ratio (% error / % fallos) superior a la del GR.
- Los errores para el TS se encuentran distribuidos entre todos los escenario, siendo más numerosos cuando $r = 3$, si bien los porcentajes medios de error son muy parecidos.
- El número de fallos para el TS es considerablemente mayor en el caso en que la demanda está distribuida con mayor variabilidad.

- Mientras que el TB presenta una gran independencia de la solución inicial elegida, el TS muestra una elevada desviación típica del número de evaluaciones invertidas, incluso para el TS(GR).

	GR	TB	TS	TB(GR)	TS(GR)
% error (r=2)	0.0001	0	0.5993	0	0
% error (r=3)	0.0035	0	0.6118	0	0.0005
% error	0.0018	0	0.6056	0	0.0002
% fallos (r=2)	0.855	0	33.248	0	0
% fallos (r=3)	6.837	0	51.367	0	0.854
% fallos	3.846	0	42.307	0	0.427
% er. / % f. (r=2)	0.0001	-	0.0180	-	-
% er. / % f. (r=3)	0.0005	-	0.0119	-	0.0006
% er. / % f.	0.0004	-	0.0143	-	0.0006
ev. med. (r=2)	120.6923	175.891	135.771	118.692*	14*
ev. med. (r=3)	179.5383	296.815	299.503	179.504*	286.50*
ev. med.	150.115	236.353	217.637	149.098*	256.233*
sd (r=2)	0	10.486	76.227	0	0
sd (r=3)	0	17.081	123.912	9.113	167.083
sd	0	13.784	100.069	4.556	164.722

Tabla 4.30: Resultados para los distintos algoritmos. Proporcional-no esencial

4.8 Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide teniendo en cuenta la clase de servicio prestado, esencial o no esencial, y el tipo de preferencia considerada, binaria, parcialmente binaria o proporcional. Para esta resolución se han empleado tres algoritmos heurísticos, uno greedy (GR), uno de intercambio y otro basado en la búsqueda tabú. Además, para estos dos últimos se han considerado dos modalidades, una en la que la búsqueda se inicia a partir de una solución inicial elegida aleatoriamente (TB y TS) y otra en la que se toma como punto de partida la solución obtenida por el GR (TB(GR) y TS(GR)).

Los mejores resultados, se obtienen con el TB(GR) y TS(GR). El GR es el algoritmo que suele dar los peores resultados aunque sus porcentajes de error no son muy elevados. Estos errores varían entre el 0.0018 % obtenido en el caso proporcional-no esencial y el 1.1096 % del binario-esencial. Por otro lado, la solución proporcionada por este algoritmo es una buena solución inicial para el TB(GR) y el TS(GR).

	GR	TB(GR)	TS(GR)	GR	TB(GR)	TS(GR)
Proporcional	Esencial			No Esen.		
% error (r=2)	0.0843	0.0028	0.0016	0.0001	0	0
% error (r=3)	0.0923	0.0009	0.0011	0.0035	0	0.0005
% error	0.0881	0.0019	0.0013	0.0018	0	0.00025
Parcialmente binario	Esencial			No Esen.		
% error (r=2)	0.0766	0.1232	0.0014	0.1379	0.0025	0.0062
% error (r=3)	0.1346	0.0273	0.0060	0.1631	0.0128	0.0018
% error	0.1056	0.0522	0.0037	0.1505	0.0076	0.0040
Binario	Esencial			No Esen.		
% error (r=2)	1.5387	0.2368	0.0176	0.0873	0.0308	0.0205
% error (r=3)	0.6806	0.2743	0.0906	0.1771	0.0240	0.0026
% error	1.1096	0.2555	0.0541	0.1322	0.0274	0.0115

Tabla 4.31: Resultados de los algoritmos para las distintas combinaciones (prefer-serv)

El empleo del TB y TS suele mejorar los resultados obtenidos por el GR, principalmente el TB. Los resultados mejoran notablemente cuando se usa la solución GR como la inicial en el TB(GR) y TS(GR). Los peores porcentajes medios de error resultantes para estos algoritmos son del 0.2555 % para el TB(GR) y del 0.0541 % para el TS(GR), ambos en el caso binario-esencial. En la tabla 4.31 se muestran los resultados obtenidos por el GR, TB(GR) y TS(GR) en los distintos escenarios analizados.

El comportamiento general del TB, en cualquiera de sus versiones, presenta poca dependencia de la solución inicial elegida en relación con el número medio de evaluaciones empleadas. Aunque el número de evaluaciones sea superior al obtenido por el TS, cuenta con la ventaja de una desviación típica para las evaluaciones mucho más baja. Sin embargo, el TS muestra una gran dependencia del punto de partida, con unas desviaciones típicas asociadas a las evaluaciones bastante elevadas, incluso cuando se toma como solución inicial la GR.

Como se muestra en la tabla 4.31, los porcentajes medios de error cometido por los algoritmos suelen seguir una misma tendencia tanto cuando la demanda es esencial como cuando no lo es. Esta tendencia consiste en que el error cometido siempre es mayor cuando las asignaciones son binarias, le sigue el caso parcialmente binario y los errores más bajos se producen cuando las asignaciones son proporcionales. Este comportamiento podría explicarse teniendo en cuenta que en caso de error, la parte de demanda de cada nodo que pudiera ser mal asignada iría decreciendo según este orden. En el caso binario se asigna toda la demanda

del nodo, en el parcialmente binario se repartiría entre dos centros de servicio y en el proporcional entre todos los centros existentes en el mercado. También puede observarse que, generalmente, los errores cometidos en el casos esenciales son superiores a los de los no esenciales.

	GR	TB(GR)	TS(GR)	GR	TB(GR)	TS(GR)
Proporcional	Esencial			No Esen.		
% error (r=2)	0.0955	0.0014	0.0016	0.0372	0.0111	0.0001
% error (r=3)	0.1010	0.0012	0.0024	0.0435	0.0002	0.0054
% error	0.0983	0.0013	0.0020	0.0404	0.0056	0.0028
Parcialmente binario	Esencial			No Esen.		
% error (r=2)	0.3409	0.0994	0.0147	0.1172	0.0150	0.0008
% error (r=3)	0.4294	0.0347	0.0043	0.1230	0.0035	0.0046
% error	0.3851	0.0670	0.0095	0.1201	0.0092	0.0027
Binario				No Esen.		
% error (r=2)				0.0552	0.0028	0.0093
% error (r=3)				0.01630	0.0104	0.0024
% error				0.1091	0.0066	0.0058

Tabla 4.32: Resultados obtenidos con la nueva función de la distancia $\alpha=1.1$

Por último, para analizar el efecto en los resultados obtenidos por los distintos algoritmos por la variación del valor del parámetro α en la función de la distancia se ha cambiado la función inicial $f(x) = 3.5 + x$ por $f(x) = 1.1 + x$. Obsérvese que con este cambio se consigue una menor penalización de la distancia. En la tabla 4.32 se muestran los resultados obtenidos por el GR, TB(GR) y TS(GR) para este caso en los distintos escenarios estudiados. El caso binario-esencial no ha sido estudiado ya que el cambio de esta función no afecta para nada a la solución del problema.

Con esta nueva función, el error máximo es inferior al anterior, variando siempre por debajo del 0.3851 %. Aunque en líneas generales se producen errores más altos que en el primer caso, los porcentajes de error para el TB(GR) y el TS(GR) son, salvo en un caso, del orden de la milésima. En definitiva, se puede concluir que los mejores resultados son obtenidos por el TB(GR) y el TS(GR), mostrándose éstos como una buena alternativa para resolver el problema. Por último, se observa que el comportamiento del error cometido según el tipo de servicio y preferencia sigue una tendencia muy similar a la del caso $\alpha = 3.5$.

En la figura se comparan los errores cometidos por los distintos algoritmos para los dos valores de α analizados. Cada columna representa la media del porcentaje

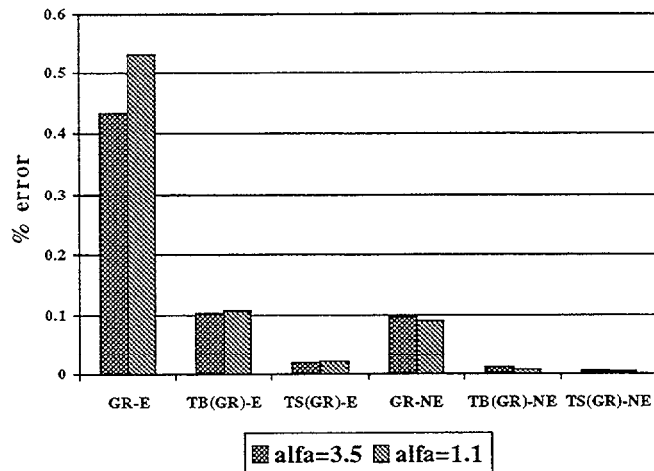


Figura 4.1: Comparativa entre los errores para $\alpha = 3.5$ y $\alpha = 1.1$

de error medio producido por el algoritmo para los tres tipos de preferencias (binarias, parcialmente binarias y proporcionales). Se observa que en el caso esencial, el error es superior cuando se toma el menor valor de α . Sin embargo, si los servicios son no esenciales, los mayores errores se dan para $\alpha = 3.5$. El caso en el que existe mayor diferencia entre los resultados obtenidos en los dos casos es cuando se emplea el algoritmo GR para servicios esenciales. En el resto de casos, las diferencias no son significativas.

Capítulo 5

El $(r|X_p)$ -medianoide con atractivo. Experiencia computacional

5.1 Introducción

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto en el caso en que la demanda es asignada basándose en criterios relacionados con la atracción y no exclusivamente con la distancia. También en este caso, el problema se ha resuelto combinando las posibles reglas de asignación de la demanda (binaria, parcialmente binaria y proporcional) con los distintos tipos de servicios (esenciales y no esenciales). En el capítulo 2 se demostró la existencia de solución nodal para el problema en redes para los casos parcialmente binario y proporcional, en sus versiones esencial y no esencial, por lo que puede obtenerse una solución del problema en redes resolviendo el correspondiente problema discreto que se propone a continuación.

Este capítulo sigue en la línea del dedicado al caso en el que todos los centros de servicio eran igualmente atractivos. Sin embargo, hay que destacar el importante incremento en la complejidad del problema, ya que además de la elección de las localizaciones que maximizan los beneficios, se han de elegir sus correspondientes niveles de atractivo. Los problemas a resolver en cada caso son los programas matemáticos propuestos en la sección 2.4. Estos problemas son complejos ya que a la elección de las r localizaciones (variables binarias), hay que añadir la determinación de los atractivos asociados (variables continuas), y que para cada posible conjunto de r localizaciones el problema de determinar los atractivos óptimos puede ser multiextremal.

Para resolver estos problemas se ha optado por la utilización combinada de

algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria, para llevar a cabo el proceso de selección de las localizaciones, con un algoritmo de búsqueda global, basado en ramificación y acotación, para la obtención de sus correspondientes niveles de atractivo.

Del estudio del problema del $(r|X_p)$ -medianoide sin atractivos se puede concluir que para los casos analizados el algoritmo greedy (GR) proporciona soluciones razonablemente aceptables, proporcionando muy buenas soluciones de partida tanto para el algoritmo de intercambio (TB(GR)) como para el algoritmo de búsqueda tabú (TS(GR)). Es por ello, y por el excesivo esfuerzo computacional que requiere la búsqueda exhaustiva de la solución óptima, por lo que se ha optado por utilizar estos tres algoritmos heurísticos, comparando la posible mejora que supone sobre la solución GR la utilización del TB(GR) y del TS(GR).

Para llevar a cabo el análisis del comportamiento de los procedimientos heurísticos mencionados se ha utilizado el mismo esquema usado para el $(r|X_p)$ -medianoide sin atractivos, es decir, las mismas redes y distribuciones de la demanda, así como el número de centros de servicio, nuevos y existentes (ver introducción del capítulo 4).

En la implementación del TS(GR), al igual que en el capítulo anterior se ha tomado un valor de $tmax$ de 20 y el rango para la *tenencia tabú* está comprendida entre tres y once ($t-tabú \in [3, 11]$). Como regla de parada se ha considerado imponer un límite al número de evaluaciones que puede realizar el algoritmo. En particular, se ha impuesto que el algoritmo TS(GR) no supere en un 50 % el número medio de evaluaciones invertidas por el TB(GR). En consecuencia no se ha limitado el número de soluciones iniciales ($smax$) a partir de las cuales el algoritmo puede reiniciar la búsqueda en otro entorno. Para determinar el número medio de evaluaciones se ha procedido de la siguiente manera. En aquellos problemas en los que el algoritmo mejora la solución GR, se considera que el número de evaluaciones es que el ha invertido hasta llegar a esa solución de mejora. En el caso de que no encuentre mejore la solución GR, el número de evaluaciones considerado es la cantidad de evaluaciones que se han producido hasta detenerse algoritmo.

En cada uno de los pares “preferencias-servicio” estudiados se han elegido tanto la función de coste como el intervalo de variación de los atractivos de forma que la solución óptima no tuviera que ser necesariamente un vértice de la región factible. Obsérvese que si los costes son muy bajos o muy altos, los niveles de atractivo elegidos para cualquier conjunto de localizaciones sería siempre el mismo, el máximo o el mínimo, dependiendo del caso. En particular, para los servicios esenciales, la función de costes utilizada es $F(x) = factor(x + 2\sqrt[3]{x})$, mientras que para los servicios no esenciales es

$$F(x) = factor \left(\frac{x^7}{7} - 2x^6 + \frac{58}{5}x^5 - 36x^4 + \frac{193}{3}x^3 - 66x^2 + 36x \right),$$

donde *factor* un parámetro para variar la función.

En todos los casos estudiados en este capítulo se ha utilizado la cota 1 en el algoritmo de ramificación y acotación empleado para obtener los niveles de atractivo óptimos, dadas las localizaciones. Obsérvese que por cuestión de tiempo a la hora de resolver estos problemas, aunque el algoritmo 3.3 en las condiciones planteadas en este capítulo converge en los casos parcialmente binario y proporcional, la solución obtenida es una ε -solución. Por lo que cuando en adelante se hable de solución óptima para los atractivos, se debe entender que en realidad es una ε -solución.

5.2 Binario-esencial

Para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando el servicio es esencial y la demanda es asignada al centro de servicio más atractivo, se ha utilizado la función de costes para los atractivos $F(x) = factor(x + 2\sqrt[3]{x})$. El valor de *factor* ha sido elegido dependiendo de la red con el fin procurar la existencia de soluciones interiores para el problema de obtener los niveles óptimo de atractivo cuando se fijan las localizaciones. En la tabla 5.1 se desglosan estos valores según las redes y la distribución de la demanda de los nodos. En todos los casos, los niveles de atractivo han sido elegidos en el intervalo $[0.1, 3]$.

	(1)-(5)	(6)-(10)	(11)	(12)	(13)
$d=0$	1.5	1	2	8	1
$d=1,2$	5	10	8	80	3.5



Tabla 5.1: Valores de *factor* para las distintas redes. Binario-esencial

En este caso, para obtener los niveles óptimos de los atractivos, dadas las localizaciones, se pueden utilizar dos vías. Por un lado se puede emplear el resultado obtenido en la proposición 2.1, según el cual se podría obtener una ε -solución mediante un método enumerativo en el que se tendría que evaluar un máximo de $(|V| + 1)^r$ candidatos. Por otro lado, también se puede utilizar el algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación) con la cota 1 ya que tanto la función de ingresos como la de coste son crecientes.

Para resolver el problema de localización se han utilizado el GR, el TB(GR) y el TS(GR), cuyos resultados se muestran en la tabla 5.2. Una casilla en blanco en esta tabla significa que el resultado obtenido por el GR no ha sido mejorado por el TB(GR) ni por el TS(GR). Como se puede observar, el GR es mejorado por el TB(GR) o el TS(GR) en 84 ocasiones de las 234 posibles. De los casos en los que la solución del GR es mejorada, en 51 de ellos los resultados obtenidos por

los otros dos algoritmos son los mismos, mientras que el TB(GR) obtiene mejores resultados en doce y el TS(GR) en 21.

La cantidad de casos en los que el GR es mejorado no parece depender del número de nuevos centros de servicio a establecer (r), ni de los centros ya establecidos (p). El GR parece comportarse mejor cuando la demanda de los nodos es unitaria, o por lo menos, los otros dos algoritmos consiguen menor número de mejoras en este caso.

(p,r,d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	mej.
(1,2,0)	T		S							T				3
(1,3,0)	T		T			BB								3
(2,2,0)	T	T							T		T		T	5
(2,3,0)	S	T							S		T		B	5
(3,2,0)			S		S	B			T		S			5
(3,3,0)			S		SS	T			T		S			5
(1,2,1)	T		T							T			T	4
(1,3,1)			T		T	BB						T		4
(2,2,1)	T	T									T		T	4
(2,3,1)		T									T	T	B	4
(3,2,1)			T		S	T			T		BB		T	6
(3,3,1)		T			SS	SS			BB				T	5
(1,2,2)	T		T			T			SS				T	5
(1,3,2)	T		T		T	T			S					5
(2,2,2)	T	BB						S			B		T	5
(2,3,2)		BB						S	T		T			4
(3,2,2)		BB	S		SS				T				T	5
(3,3,2)	T	BB		T	SS				T		SS		S	7
mej2	6	4	6	0	3	3	1	0	5	2	5	0	7	42
mej3	4	5	4	1	5	5	1	1	5	0	5	2	4	42
mej.	10	9	10	1	8	8	2	1	10	2	10	2	11	84

Tabla 5.2: Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Binario-esencial

B \equiv GR mejorado exclusivamente por el TB(GR)

S \equiv GR mejorado exclusivamente por el TS(GR)

BB \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TB(GR)

SS \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TS(GR)

T \equiv GR mejorado igualmente por el TB(GR) y el TS(GR)

El TB(GR) mejora la solución obtenida por el GR en 70 casos, mientras que el TS(GR) lo hace en diez ocasiones más. Para ambos algoritmos, el menor número de mejoras se da cuando $d = 0$, aunque es el TB(GR) el que manifiesta la reducción más sensible.

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	1.2162	0.6177	5.9863	0	6.2561	1.6471
% mejora (r=3)	0.6215	0.2692	4.3706	0.0202	0.3127	0.7044
% mejora	0.9188	0.4435	5.1785	0.0101	3.2844	1.1757
% éxito (r=2)	31.111	22.222	44.444	0	77.778	29.914
% éxito (r=3)	42.222	20.0	44.444	22.222	33.333	29.914
% éxito	36.667	21.111	44.444	11.111	55.555	29.914
% mej. / % éx.	0.0251	0.0210	0.1165	0.0009	0.0591	0.0393
ev. med. (r=2)	155.111	98.067	118.778	155	61	123.128
ev. med. (r=3)	234.60	142	174.333	229	88	182.641
ev. med.	194.856	120.033	146.556	192	74.50	152.884
sd (r=2)	17.743	3.2	23.371	0	0	9.852
sd (r=3)	27.734	0	26	0	0	12.666
sd	22.737	1.6	24.685	0	0	11.259
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	1.3132	1.1505	11.9765	0	6.2561	2.3500
% mejora (r=3)	0.7506	0.6694	8.4714	0.0202	0.0824	1.2057
% mejora	1.0319	0.91099	10.2239	0.0101	3.1692	1.7779
% éxito (r=2)	42.222	22.222	44.444	0	77.778	34.188
% éxito (r=3)	42.222	26.667	55.555	22.222	22.222	34.188
% éxitos	42.222	24.444	50.0	11.111	50.0	34.188
% mej. / % éx.	0.0244	0.0372	0.2045	0.0009	0.0634	0.0520
ev. med. (r=2)	152.422	127.511	134.555	235.444	30	138.436
ev. med. (r=3)	245.933	172.333	158.444	272.444	114.111	202.795
ev. med.	199.178	149.922	146.50	253.944	72.055	160.615
sd (r=2)	83.088	41.393	65.862	1.667	36.637	55.890
sd (r=3)	130.756	56.865	114.572	148.813	44.216	95.824
sd	106.922	49.129	90.217	75.240	40.427	75.857

Tabla 5.3: Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Binario-esencial

Para comparar los resultados obtenidos por los tres algoritmos se ha calculado la mejora producida por el TB(GR) y el TS(GR) con respecto a la solución alcanzada por el GR. En la tabla 5.3 se muestran los datos relacionados con el empleo de estos algoritmos.

En dicha tabla se presenta el porcentaje de mejora obtenida por los algoritmos TB(GR) y TS(GR) con respecto al GR, el porcentaje de éxitos (casos en los que el GR es mejorado) y la ratio (% mejora / % éxito). También se muestra el número medio de evaluaciones invertida por los algoritmos y su correspondiente desviación típica media.

Se puede observar que el TB(GR) consigue mejorar los resultados obtenidos por el GR en un 1.176 %, un poco por debajo del 1.7779 % alcanzado por el TS(GR). A pesar de que el número de mejoras producidas para los dos valores de r estudiados es el mismo, el porcentaje de mejora conseguido es mucho más importante cuando se localizan dos nuevos centros de servicio. Este comportamiento queda perfectamente plasmado en los valores obtenidos para las ratios (% mejora / % éxito), siendo de 0.0551 para $r = 2$ y 0.0235 para $r = 3$.

Los resultados obtenidos por el TB(GR) presentan una gran dependencia de la red tratada. Se dan casos en los que el número de éxitos es muy similar para $r = 2$ y $r = 3$, mientras que en otros casos existe gran diferencia entre ambas situaciones, unas veces siendo más abundantes cuando $r = 2$ y en otras cuando $r = 3$. Por otro lado, las ratios (% mejora / % éxito) varían mucho, sobre todo en las redes no generadas aleatoriamente (11 - 13). En particular, para la red de 55 nodos (11) se dan las mejoras más destacadas, con una ratio de 0.1165, mientras que en la de 79 nodos (12), la ratio es tan sólo de 0.0009.

El número medio de programas no lineales resueltos por el TB(GR) es bastante bajo ya que en la mayoría de los casos no realiza más que de una iteración hasta detenerse. Como consecuencia, la desviación típica media para el número de programas no lineales resueltos no es muy alta.

En cuanto al comportamiento del TS(GR), ya se ha dicho que consigue el mayor porcentaje de mejora con respecto al GR. Cabe destacar que este incremento es debido tanto a que el número de éxitos logrados por este algoritmo es superior a los obtenidos por el TB(GR), como a que la mejora que produce suele ser mayor. También, al igual que para el TB(GR), las mejoras alcanzadas cuando $r = 2$ son superiores a las producidas cuando se pretenden localizar tres nuevos centros de servicio.

Los éxitos y sus correspondientes mejoras se distribuyen de forma muy parecida a la del TB(GR), de hecho, en 51 de los 84 problemas en los que el GR es mejorado, los resultados obtenidos por ambos algoritmos son los mismos.

El número medio de programas no lineales resueltos por el TS(GR) es similar al del TB(GR), aunque su desviación correspondiente es muy elevada. Si se observan

las desviaciones típicas obtenidas para las distintas redes se puede deducir que el TS(GR) presenta gran dependencia con respecto a la estructura donde se aplica, ya que, aunque el número de nodos de la red sea parecido, las desviaciones resultantes pueden diferir mucho.

Los resultados obtenidos en la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide con atractivos mediante los algoritmos heurísticos aquí utilizados se pueden resumir en los siguientes puntos:

- El GR es mejorado en un 35.89 % de los casos estudiados, aunque los porcentajes de error cometidos con relación a los otros algoritmos no superan el 2 %.
- El TB(GR) mejora al GR en casi un 30 % de los casos, obteniendo con ello una mejora con respecto a la solución GR del 1.176 %
- El TS(GR) obtiene mejores resultados que el TB(GR) (34 % de éxitos y mejora del 1.7779 %)
- En los casos en los que el TS(GR) tiene éxito, la mejora suele ser mayor que cuando el éxito es del TB(GR).
- Las mejoras conseguidas, tanto por el TB(GR) como por el TS(GR), cuando se pretende localizar dos nuevos centros de servicio son superiores que para $r = 3$.
- El TS(GR) presenta mayor dependencia con respecto a la red. La desviación típica del número de programas no lineales resueltos por TS(GR) es muy superior al del TB(GR).
- El GR parece comportarse mejor cuando la demanda de los nodos es unitaria.
- Los dos algoritmos (TB(GR) y TS(GR)) presentan comportamientos parecidos en cuanto a su dependencia del número de centros de servicio, nuevos o ya establecidos, y con respecto a la distribución de la demanda.

5.3 Binario-no esencial

Para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando el servicio es no esencial y la asignación de la demanda de un nodo se hace al centro hacia el que experimenta mayor atracción, se ha utilizado la función de costes

$$F(x) = \text{factor} \left(\frac{x^7}{7} - 2x^6 + \frac{58}{5}x^5 - 36x^4 + \frac{193}{3}x^3 - 66x^2 + 36x \right).$$

	(1)-(5)	(6)-(10)	(11)	(12)	(13)
$\bar{d}=0$	0.05	0.05	0.1	0.01	0.1
$\bar{d}=1,2$	0.5	0.5	2	0.5	1

Tabla 5.4: Valores de *factor* para las distintas redes. Binario-no esencial

El *factor* ha sido elegido, dependiendo del tipo de red y de la distribución de la demanda, con el fin de procurar la existencia de soluciones interiores para el problema que surge a la hora de obtener los niveles óptimo de atractivo cuando se fijan las localizaciones. Los distintos valores de *factor* utilizados en esta sección se muestran en la tabla 5.4. En este caso, los niveles de atractivo han sido elegidos en el intervalo $[0.1, 4]$, utilizando como función de la distancia $f(x) = 5 + x$, para asegurar que $f(0) > 4$ y por lo tanto, que las asignaciones de demanda de un nodo a un centro de servicio sean una parte de ésta.

Para obtener los niveles óptimos de los atractivos, dadas las localizaciones, se ha utilizado el algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación) con la cota 1.

En la tabla 5.5 se muestra la distribución de los casos en los que los resultados obtenidos por el GR han sido mejorados por los otros algoritmos heurísticos utilizados en el estudio. Se observa que se producen 45 casos de mejora, entre los 234 posibles, ocurriendo la mayoría en los problemas en los que se localizan tres nuevos centros de servicio. También se puede comprobar que el número de casos de mejora tiende a reducirse cuando aumenta la variabilidad de la distribución de la demanda. Cuando $d = 2$, tan sólo se producen seis casos en los que el GR es mejorado, y en particular, cuando $r = 2$, son sólo dos los casos de mejora.

Las mejoras se encuentran distribuidas entre todos los tipos de redes, destacándose especialmente la de 55 nodos (11) en la que se producen diez mejoras. Sin embargo, existen varios casos, una red de 50 nodos (10), dos de 75 (1,4) y la de 32 (13), en las que se producen como máximo un caso de mejora.

En la tabla 5.6 se describe el comportamiento del TB(GR) y del TS(GR), y se muestran las mejoras conseguidas por estos algoritmos en relación con la solución GR.

El porcentaje de mejora conseguido por el TB(GR) es del 0.3241 %, obtenido principalmente en los casos en los que se localizan dos nuevos centros de servicio. Además, esto ocurre a pesar de que el número de problemas en los que el TB(GR) consigue superar la solución GR cuando $r = 2$ es muy inferior al caso en el que $r = 3$. Todo parece indicar que en los casos de mejora, ésta es muy superior cuando $r = 2$. De hecho la ratio (% mejora / % éxito) para $r = 2$ es de 0.0312, mientras que la correspondiente a $r = 3$ es tan sólo de 0.0095. La situación más destacable se da para la red de 55 nodos (11), en la que se produce, con diferencia, la mejora más elevada. Para esta red, no sólo se da un porcentaje muy elevado de problemas en los que la solución GR es superada por el TB(GR), sino que también, la mejora

que se produce en cada uno de esos casos es muy superior a la producida en el resto de las redes.

(p,r,d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	mej.
(1,2,0)		T							T					2
(1,3,0)		T						T			T	T		4
(2,2,0)														0
(2,3,0)	T				S						SS	T		4
(3,2,0)			T			T	S		B		T			5
(3,3,0)			T		BB		T	T			SS	T		6
(1,2,1)							T		B			B		3
(1,3,1)					T	T	T				SS			4
(2,2,1)							T		B			B		3
(2,3,1)				T		S	S				B			4
(3,2,1)						T					T	B		3
(3,3,1)											BB			1
(1,2,2)														0
(1,3,2)		B												1
(2,2,2)														0
(2,3,2)		B	B		B				B					4
(3,2,2)									T		T			2
(3,3,2)		B									BB			2
mej2	0	1	1	0	0	2	3	0	5	0	3	3	0	18
mej3	0	4	1	1	3	2	3	3	0	0	7	3	0	27
mej.	0	5	2	1	3	4	6	3	5	0	10	6	0	45

Tabla 5.5: Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Binario-no esencial

B \equiv GR mejorado exclusivamente por el TB(GR)

S \equiv GR mejorado exclusivamente por el TS(GR)

BB \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TB(GR)

SS \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TS(GR)

T \equiv GR mejorado igualmente por el TB(GR) y el TS(GR)

El número medio de programas no lineales resuelto por el TB(GR) es de 152.376, bastando en la mayoría de los casos una iteración para que el algoritmo se detenga. Tan sólo en la red de 55 nodos (11) se necesita un mayor esfuerzo debido al elevado número de problemas en los que mejora al GR. Esta situación también se ve reflejada en la baja desviación típica que se da en la mayoría de las redes, salvo, evidentemente, en la de 55 nodos.

El TS(GR) consigue mejorar la solución GR en un 0.3139 %, cifra muy similar a la obtenida por el TB(GR), a pesar de que su porcentaje de éxitos está más de tres puntos por debajo del obtenido por el TB(GR).

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0.0411	0.0582	5.2602	0.1328	0	0.4530
% mejora (r=3)	0.0480	0.0651	1.9100	0.0626	0	0.1952
% mejora	0.0445	0.0617	3.5851	0.0977	0	0.3241
% éxito (r=2)	4.444	20.0	33.333	33.333	0	14.530
% éxito (r=3)	17.778	13.333	77.778	33.333	0	20.513
% éxito	11.111	16.667	55.555	33.333	0	17.521
% mej. / % éx.	0.0040	0.0037	0.0645	0.0029	-	0.0185
ev. med. (r=2)	148.622	98.067	124.667	155	61	121.085
ev. med. (r=3)	225	146.178	214.778	229	88	183.667
ev. med.	186.811	122.122	169.722	192	74.5	152.376
sd (r=2)	4.867	3.20	26.50	0	0	5.141
sd (r=3)	12.70	7.833	48.254	0	0	11.609
sd	8.783	5.517	37.377	0	0	8.375
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0.0411	0.0547	5.2601	0	0	0.4415
% mejora (r=3)	0.0513	0.0955	1.6260	0.0626	0	0.1863
% mejora	0.0462	0.0751	3.4430	0.0313	0	0.3139
% éxito (r=2)	4.444	15.555	33.333	0	0	10.256
% éxito (r=3)	13.333	17.778	66.667	33.333	0	19.658
% éxitos	8.889	16.667	50.0	16.667	0	14.957
% mej. / % éx.	0.0052	0.0045	0.0689	0.0009	-	0.0210
ev. med. (r=2)	210.733	127.622	135.556	234.667	93.555	165.812
ev. med. (r=3)	304.178	188.178	196.444	236.555	134.889	233.051
ev. med.	257.455	157.90	166.0	235.611	114.222	199.432
sd (r=2)	34.507	36.757	84.247	1.414	1.1304	34.085
sd (r=3)	103.167	59.345	143.137	166.179	1.965	86.449
sd	68.837	48.051	113.692	83.797	1.548	60.267

Tabla 5.6: Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Binario-no esencial

La distribución de los porcentajes de mejora según el número de centros de servicio a localizar son muy parecidos entre los dos algoritmos. Sin embargo, cuando $r = 2$, el porcentaje de casos en los el GR es superado por el TB(GR) es bastante superior que el conseguido por el TS(GR). En general, la mejora conseguida por el TS(GR) en los problemas que consigue superar al GR es un poco superior a la obtenida por el TB(GR) (0.0210 frente a 0.0185).

El número de programas no lineales invertidos por el TS(GR) es muy superior al necesitado por el TB(GR), debido al elevado número de casos en los que se detiene al llegar al máximo de evaluaciones permitidas. Las desviaciones típicas en este caso se ven influenciadas por la obtención, o no, de mejora. Cuando se consigue un número elevado de mejoras (11 y 12) se dan valores altos para para la desviación típica, mientras que si éstas no son tan frecuentes, se reduce significativamente (13).

El comportamiento de los distintos algoritmos de búsqueda combinatoria utilizados en este estudio para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide para el caso binario-no esencial se puede sintetizar en los siguientes puntos:

- El GR comete errores con respecto a los otros algoritmos inferiores al 0.33 %, siendo superado en el 19.23 % de los problemas resueltos.
- El número de casos en los que el GR es superado se reduce con el incremento de la variabilidad de la demanda de los nodos.
- El mayor número de fallos detectados al GR se dan cuando se localizan tres nuevos centros, aunque en general el mayor porcentaje de error se da cuando $r = 2$.
- Los porcentajes de mejora conseguidos por el TB(GR) y TS(GR) son muy similares, aunque el número de casos en los que el TB(GR) supera al GR es un poco mayor que el del TS(GR).
- Tanto el TB(GR) como el TS(GR) tienden a encontrar menor número de mejoras cuando aumenta la variabilidad de la distribución de la demanda, siendo mayor el número de éxitos cuando $r = 3$.
- La ratio (% mejora / % éxito) para el TS(GR) es un poco superior que la del TB(GR), sobre todo cuando $r = 2$.
- El TB(GR) suele detenerse tras una iteración, por lo que presenta una baja desviación típica con respecto a la media de programas no lineales resueltos.

5.4 Parcialmente binario-esencial

Para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando el servicio es esencial y las asignaciones son parcialmente binarias, se ha empleado la función de costes $F(x) = factor(x + 2\sqrt[3]{x})$. El valor de *factor* ha sido elegido dependiendo de la red con el fin procurar la existencia de soluciones interiores para el problema de obtener los niveles óptimos de atractivo cuando se fijan las localizaciones.

En la tabla 5.7 se desglosan los valores *factor*, según las redes y la distribución de la demanda de los nodos. En este caso, los niveles de atractivo han sido elegidos en el intervalo $[0.9, 9]$.

	(1)-(5)	(6)-(10)	(11)	(12)	(13)
$d=0$	1.5	1	1	1	1
$d=1,2$	15	10	10	15	10

Tabla 5.7: Valores de *factor* para las distintas redes. Parcialmente binario-esencial

Como la función de ingresos, fijadas las localizaciones, es creciente con respecto a los niveles de atractivo (proposición 2.7), y como la función de costes fijos también lo es, se puede utilizar la cota 1 en el algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación) para obtener los niveles óptimos de los atractivos. Además, como se concluye en el capítulo 3, en estas condiciones el algoritmo converge.

En la tabla 5.8 se presentan los resultados obtenidos mediante la aplicación de los distintos algoritmos heurísticos para la resolución del problema. En ella se muestra la distribución de los casos en los que el GR es mejorado por el TB(GR) o el TS(GR).

Se puede comprobar que el GR es superado en tan sólo 38 de los 234 problemas analizados, concentrándose estos casos en cinco redes. La situación más destacable es la de la red de 79 nodos (12), en la que los resultados obtenidos por el GR siempre han sido superados por el TB(GR) y el TS(GR), quienes llegan a la misma solución en todos los problemas. Como se puede apreciar en la tabla, la característica predominante es que los resultados obtenidos por el TB(GR) y el TS(GR), cuando mejoran a los del GR, suelen ser los mismos, de hecho, esta situación se da en 32 de los 38 casos de mejora.

El número de problemas en los que el GR es mejorado coincide para las dos posibilidades estudiadas para el número de nuevos centros de servicio a localizar, incluso parece no existir dependencia del número de centros ya establecidos. También se puede observar que el comportamiento del GR es mejor cuanto mayor es la variabilidad de la distribución de la demanda de los nodos.

En la tabla 5.9 se muestran los resultados de los tres algoritmos empleados en este estudio para resolver el problema de localización. En ella se presentan los porcentajes de mejora obtenidos por el TB(GR) y el TS(GR) sobre los resultados del GR. Se puede comprobar que el porcentaje de error cometido por el GR con respecto a los otros dos algoritmos es inferior al 0.05 %, lo que significa un nivel bastante bajo en comparación con el esfuerzo computacional requerido.

(p,r,d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	mej.
(1,2,0)		T			T							T		3
(1,3,0)		S			S							T		3
(2,2,0)										T		T		2
(2,3,0)										T		T		2
(3,2,0)	T				BB					T		T		4
(3,3,0)	T				T							T		3
(1,2,1)					T							T		2
(1,3,1)					S							T		2
(2,2,1)										T		T		2
(2,3,1)		T								T		T		3
(3,2,1)										T		T		2
(3,3,1)												T		1
(1,2,2)												T		1
(1,3,2)												T		1
(2,2,2)		T										T		2
(2,3,2)										S		T		2
(3,2,2)												T		1
(3,3,2)										S		T		1
mej2	1	2	0	0	3	0	0	0	0	4	0	9	0	19
mej3	1	2	0	0	3	0	0	0	0	4	0	9	0	19
mej.	2	4	0	0	6	0	0	0	0	8	0	18	0	38

Tabla 5.8: Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Parcialmente binario-esencial

B \equiv GR mejorado exclusivamente por el TB(GR)

S \equiv GR mejorado exclusivamente por el TS(GR)

BB \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TB(GR)

SS \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TS(GR)

T \equiv GR mejorado igualmente por el TB(GR) y el TS(GR)

El TB(GR) mejora al GR en 33 de los 234 problemas analizados, lo que lleva asociado una mejora en comparación con la solución obtenida por el GR de un 0.0475 %. La diferencia en la mejora obtenida para los casos de dos y tres nuevos centros de servicio es mínima, a pesar de que el número de situaciones de mejora

es bastante superior cuando $r = 2$. Todo ello implica que en los casos en los que el TB(GR) consigue mejorar los resultados del GR, esta mejora es mayor cuando $r = 2$ que cuando $r = 3$.

Obsérvese que las ratios (% mejora / % éxito) son muy bajas, sobre todo para las redes generadas aleatoriamente. Para el otro grupo de redes, la situación es muy dispar. Mientras que para las redes de 32 y 55 nodos (13 y 11) este parámetro no se puede calcular porque no tiene sentido, para la de 79 nodos (12), se obtiene el valor más elevado de entre todas las redes.

Parece que no existe una tendencia que marque el comportamiento del algoritmo en relación con el número de centros ya existentes en el mercado. Sin embargo, si se analizan los resultados atendiendo a la distribución de la demanda, se observa un descenso en el número de mejoras cuando aumenta la variabilidad de la distribución.

En cuanto al número de programas no lineales que tiene que resolver el TB(GR) hasta detenerse, se observa que en la mayoría de los casos basta una iteración, por lo que el número medio de programas resueltos es de 148.521. La desviación típica asociada con la media de programas resueltos es muy baja, tan sólo destaca la correspondiente a la red de 79 nodos (12).

En lo que se refiere al TS(GR), la mejora conseguida con respecto a la solución GR es del 0.0491 %, igualmente distribuida para los casos de dos y tres nuevos centros de servicio. Las ratios (% mejora / % éxito) son prácticamente iguales, por lo que la mejora lograda con la utilización del TS(GR) cuando se consigue un éxito es similar a la conseguida por el TB(GR), aunque levemente más favorable. A diferencia del TB(GR), no existe diferencia entre las mejoras obtenidas cuando se localizan dos o tres nuevos centros de servicio. También en este caso, el mayor número de mejoras se consigue cuando la variabilidad de la demanda es menor.

El número medio de programas no lineales resueltos hasta que se detiene el algoritmo TS(GR) es de 195.624, con una desviación típica muy superior a la del TB(GR).

El comportamiento de los tres algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria aplicados en el estudio para el caso del $(r|X_p)$ -medianoide cuando las asignaciones son parcialmente binarias y la demanda es esencial puede ser esquematizado en los siguientes puntos:

- El GR es superado por los otros algoritmos en el 16.2 % de los casos, con una mejora por los otros dos algoritmos inferior al 0.05 %.
- El GR se comporta mejor cuanto mayor es la variación de la distribución de la demanda. Tanto el TB(GR) como el TS(GR) reducen el número de mejoras con el aumento de la variabilidad de la demanda.
- El número de casos en los que el GR es mejorado por alguno de los otros algoritmos no presenta ninguna tendencia en relación con el número de centros de servicio, nuevos o existentes.

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0.0237	0.0031	0	0.5117	0	0.0497
% mejora (r=3)	0.0093	0.0005	0	0.5394	0	0.0453
% mejora	0.0165	0.0018	0	0.5256	0	0.0475
% éxito (r=2)	13.333	8.889	0	100	0	16.239
% éxito (r=3)	6.667	4.222	0	100	0	11.966
% éxito	10.0	6.667	0	100	0	14.102
% mej. / % éx.	0.0016	0.0002	-	0.0052	-	0.0033
ev. med. (r=2)	148.622	97	107	16.556	61	119.974
ev. med. (r=3)	220.20	142	157	245.889	88	177.068
ev. med.	184.411	119.5	132	204.722	74.50	148.521
sd (r=2)	4.867	0	0	25.667	0	3.846
sd (r=3)	9.60	0	0	33.513	0	6.270
sd	7.233	0	0	29.590	0	5.058
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0.0233	0.0031	0	0.5117	0	0.0495
% mejora (r=3)	0.0136	0.0050	0	0.5394	0	0.0486
% mejora	0.0184	0.0040	0	0.5256	0	0.0491
% éxito (r=2)	13.333	8.889	0	100	0	16.239
% éxito (r=3)	13.333	8.889	0	100	0	16.239
% éxitos	13.333	8.889	0	100	0	16.239
% mej. / % éx.	0.0014	0.0004	-	0.0052	-	0.0030
ev. med. (r=2)	201.822	136.733	164.889	14.444	93.778	151.222
ev. med. (r=3)	310.533	804.867	240.111	168.778	134.444	240.025
ev. med.	256.178	170.80	202.50	91.611	114.111	195.624
sd (r=2)	51.972	16.550	2.977	2.963	1.481	26.925
sd (r=3)	62.264	20.219	3.689	145.912	1.810	43.371
sd	57.118	18.384	3.333	74.437	1.646	35.148

Tabla 5.9: Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Parcialmente binario-esencial

- Los resultados obtenidos por el TB(GR) y el TS(GR) son muy parecidos, ya sea en porcentaje de mejora, número de éxitos obtenidos y ratio (% mejora / % éxito).
- Las mejoras conseguidas en los casos en los que el TB(GR) y TS(GR) consiguen superar al GR son muy parecidas para $r = 2$ y $r = 3$.
- El TB(GR) suele detenerse utilizando una iteración, por lo que muestra una desviación típica muy reducida. El TS(GR) resuelve un mayor número de programas no lineales, obteniendo resultados muy parecidos.
- El TB(GR) parece mostrar más efectividad cuando se implantan dos nuevos centros de servicio, mientras que para el TS(GR) no parece existir ninguna tendencia.

5.5 Parcialmente binario-no esencial

Para la resolución del problema del $(r|X_P)$ -medianoide cuando el servicio es no esencial y la asignación de la demanda es parcialmente binaria, se ha utilizado la función de costes para los niveles de atractivo

$$F(x) = factor \left(\frac{x^7}{7} - 2x^6 + \frac{58}{5}x^5 - 36x^4 + \frac{193}{3}x^3 - 66x^2 + 36x \right).$$

El valor de *factor* ha sido elegido dependiendo de la red con el fin procurar la existencia de soluciones interiores para el problema que surge a la hora de obtener los niveles óptimos de atractivo cuando se fijan las localizaciones. En la tabla 5.10 se desglosan estos valores según las redes y la distribución de la demanda de los nodos. En este caso, los niveles de atractivo han sido elegidos en el intervalo $[0.1, 4]$. Se ha utilizado como función de la distancia $f(x) = 5 + x$ para asegurar la existencia de solución para las asignaciones ya que $f(0) > 4$.

	(1)-(5)	(6)-(10)	(11)	(12)	(13)
$d=0$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$d=1,2$	1	1	1	1	1

Tabla 5.10: Valores de *factor* para las distintas redes. Parcialmente binario-no esencial

Para obtener los niveles óptimos de atractivo, dadas las localizaciones, se ha utilizado el algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación). Como la función de ingresos es continua y creciente con respecto al atractivo (proposición 2.10), al igual que la de costes utilizada en el ejemplo, se puede emplear la cota 1 en la implementación de dicho algoritmo, que además es convergente según lo visto en el capítulo 3.

(p,r,d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	mej.
(1,2,0)						B								0
(1,3,0)					B						T	T		2
(2,2,0)														0
(2,3,0)		T									T	T		3
(3,2,0)						S		T	T					3
(3,3,0)	S	T							T		T	T		5
(1,2,1)						T	T		T			B		3
(1,3,1)		B					T	B		B	B			3
(2,2,1)							T		T			B		2
(2,3,1)		B				S	T	B		B	B			4
(3,2,1)									S			B		0
(3,3,1)						S	T			B				3
(1,2,2)														0
(1,3,2)				BB							T			2
(2,2,2)														0
(2,3,2)				BB			BB				T			3
(3,2,2)														0
(3,3,2)							BB				T			2
mej2		0	0	0	0	3	2	1	4	0	0	3	0	8
mej3		4	0	2	1	2	5	2	1	3	8	3	0	27
mej.		4	0	2	1	5	7	3	5	3	8	6	0	35

Tabla 5.11: Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Parcialmente binario-no esencial

B \equiv GR mejorado exclusivamente por el TB(GR)

S \equiv GR mejorado exclusivamente por el TS(GR)

BB \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TB(GR)

SS \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TS(GR)

T \equiv GR mejorado igualmente por el TB(GR) y el TS(GR)

En la tabla 5.11 se muestra la distribución de los casos en los que el TB(GR) o el TS(GR) consiguen superar los resultados obtenidos por el GR. El GR es mejorado en 45 de los 234 problemas resueltos, ocurriendo la mayor parte de estos casos en problemas en los que se localizan tres nuevos centros de servicio. En 22 de los 45 problemas en los que se consigue una mejora, el valor conseguido por el TB(GR) y

el TS(GR) es el mismo. En 14 de estos casos, la mejora es cosegada exclusivamente por el TB(GR), mientras en cinco, es el TS(GR) el único que consigue superar al GR. Tan sólo en cuatro ocasiones, en las que ambos algoritmos consiguen superar al GR, los resultados son distintos y siempre a favor del TB(GR).

No parece existir ninguna tendencia que relacione el número de casos en los que el GR es superado con la distribución de la demanda. El número de mejoras, de forma general, es menor cuando se localizan dos nuevos centros de servicio, especialmente cuando $d = 2$, ya que para este caso no se da ninguna mejora.

El mejor comportamiento del GR se da en las redes de 75 y 32 nodos (1-5,13), mientras que los peores resultados ocurren principalmente en las de 55 y 79 nodos (11 y 12). La mayor parte de los casos de mejora conseguidos para $r = 2$ se dan en las redes aleatorias de 50 nodos (6-10).

En la tabla 5.12 se describe el comportamiento de los algoritmos TB(GR) y TS(GR) y se compara sus soluciones con las obtenidas mediante el GR. Si se observan los datos correspondientes al TB(GR) se aprecia que este algoritmo consigue una mejoras con respecto a la solución GR del 0.1732 %. Esta mejora esta concentrada mayoritariamente en los problemas en los que se localizan tres nuevos centros de servicio. Esto es debido a que cuando $r = 3$, no sólo existen más problemas en los que la solución GR es superada por el TB(GR), sino también a que la mejora lograda en estos casos es superior a la conseguida cuando $r = 2$.

En general, el menor número de mejoras conseguido por el TB(GR) se da cuando la distribución de la demanda es superior, aunque no parece que exista una tendencia con relación a este parámetro.

La mejora conseguida por el TS(GR) es del 0.1384 %, basada principalmente en los éxitos conseguidos cuando $r = 3$ (un 0.2058 % de mejora frente al 0.0683 % conseguido cuando $r = 2$). El porcentaje de éxitos es muy similar al obtenido por el TB(GR), aunque su distribución entre los casos de $r = 2$ y 3 no coincide. De hecho, este algoritmo consigue mayor número de mejoras que el TB(GR) cuando $r = 3$, mientras que para $r = 2$, el número es inferior.

La mejora media conseguida por el TS(GR) en los casos de éxito es un poco inferior que la lograda por el TB(GR), principalmente en las redes generadas aleatoriamente. La ratio (% mejora / % éxito) en este caso es 0.0092, siendo superior en los casos con $r = 2$ (0.0144) que en los de $r = 3$ (0.0089).

El comportamiento de los distintos algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria empleados en este estudio para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide para servicios no esenciales y preferencias parcialmente binarias se puede sintetizar en los siguientes puntos:

- El comportamiento del GR es razonablemente bueno, cometiendo un error medio con respecto a las soluciones obtenidas por el TB(GR) y el TS(GR) por debajo del 0.18 %.

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0	0.1657	0	0.2073	0	0.0797
% mejora (r=3)	0.1688	0.3802	0.4843	0.2376	0	0.2667
% mejora	0.0844	0.2730	0.2421	0.2225	0	0.1732
% éxito (r=2)	0	20.0	0	33.333	0	10.256
% éxito (r=3)	15.555	17.778	66.667	33.333	0	20.513
% éxito	7.778	18.889	33.333	33.333	0	15.385
% mej. / % éx.	0.0108	0.01445	0.0073	0.0067	-	0.0112
ev. med. (r=2)	147	98.067	107	155	61	119.103
ev. med. (r=3)	233	146.178	157	229	88	182.299
ev. med.	190	122.122	132	192	74.50	150.701
sd (r=2)	0	0.166	0	0.207	0	0.080
sd (r=3)	0.169	0.380	0.484	0.237	0	0.267
sd	0.084	0.273	0.242	0.225	0	0.173
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0	0.1640	0	0	0	0.0683
% mejora (r=3)	0.0307	0.3414	0.5774	0.2376	0	0.2058
% mejora	0.0257	0.2527	0.2887	0.1188	0	0.1384
% éxito (r=2)	0	17.778	0	0	0	6.837
% éxito (r=3)	11.111	24.444	88.889	33.333	0	23.077
% éxito	5.555	21.111	44.444	16.667	0	14.957
% mej. / % éx.	0.0046	0.0120	0.0065	0.0071	-	0.0092
ev. med. (r=2)	224.50	132.267	165.222	235.111	94.555	171.185
ev. med. (r=3)	316.267	179.155	74	237.667	134889	224.897
ev. med.	277.555	155.711	119.611	236.389	114.722	202.850
sd (r=2)	2.610	39.796	2.224	1.764	1.509	17.910
sd (r=3)	85.468	65.445	95.433	167.027	2.205	78.402
sd	54.251	52.621	48.828	84.395	1.857	51.495

Tabla 5.12: Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Parcialmente binario-no esencial

- El GR es superado en un 19.23 % de los problemas estudiados, siendo los errores mucho más frecuentes cuando se localizan tres nuevos centros de servicio.
- Aunque el menor número de casos en los que el GR es superado se da cuando se toma la distribución de la demanda con mayor variabilidad, no parece que exista ninguna tendencia que relacione este parámetro con el número de situaciones de mejora.
- Los porcentajes de mejora y de éxitos conseguidos por el TB(GR) y el TS(GR) no presentan grandes diferencias. Para ambos algoritmos, los resultados son más favorables cuando se localizan tres nuevos centros de servicio.
- La ratio (% mejora / % éxito) del TS(GR) es un poco inferior que la del TB(GR), siendo la mejora media obtenida por estos algoritmos en los casos en los que consiguen superar al GR del orden de 0.01. En ambos casos, esta ratio es superior cuando son dos los nuevos centros de servicio a localizar.
- Al TB(GR) le suele bastar una iteración para detenerse, por lo que el número medio de programas no lineales resueltos por este algoritmo es bastante bajo y la desviación típica muy reducida. Sin embargo, la media de programas resueltos por el TS(GR) es mayor debido a la gran cantidad de casos en los que no consigue mejorar la solución GR.

5.6 Proporcional-esencial

Para la resolución del problema del $(\tau|X_p)$ -medianoide para servicios esenciales y asignaciones proporcionales se ha utilizado la función de costes $F(x) = factor(x + 2\sqrt[3]{x})$. El valor de *factor* ha sido elegido dependiendo de la red con el fin procurar la existencia de soluciones interiores para el problema de obtener los niveles óptimo de atractivo cuando se fijan las localizaciones. En la tabla 5.13 se desglosan estos valores según las redes y la distribución de la demanda de los nodos. En este caso, los niveles de atractivo han sido elegidos en el intervalo $[0.9, 9.9]$.

	(1)-(5)	(6)-(10)	(11)	(12)	(13)
$d=0$	3	0.12	1.5	1	1
$d=1,2$	30	1.2	10	10	10

Tabla 5.13: Valores de *factor* para las distintas redes. Proporcional-esencial

La función de ingresos en este caso, dadas las localizaciones, es cóncava y creciente con respecto a los atractivos (proposición 2.13). Como la función de costes fijos también es cóncava y creciente se tiene que el algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación) puede ser empleado utilizando las tres cotas definidas en la sección 3.2.4, convergiendo en todos los casos.

(p,r,d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	mej.
(1,2,0)					T	T						T		3
(1,3,0)			T		T	T	SS					T		5
(2,2,0)					T								S	2
(2,3,0)					T		T					T	T	4
(3,2,0)					T									1
(3,3,0)					T		T					BB	S	5
(1,2,1)					SS	T						T		3
(1,3,1)			T		T	T	S					S		5
(2,2,1)					BB							T		3
(2,3,1)					T		T					S		4
(3,2,1)					T									2
(3,3,1)	T				T		S					T		5
(1,2,2)						T				T		T		3
(1,3,2)						T					T	S		3
(2,2,2)										T	T			2
(2,3,2)			T			BB				T	T		BB	5
(3,2,2)													S	1
(3,3,2)			T								BB		T	3
mej2	0	0	0	0	6	3	0	0	0	2	1	4	4	20
mej3	2	0	4	0	6	4	6	0	0	1	3	7	6	39
mej.	2	0	4	0	12	7	6	0	0	3	4	11	10	59

Tabla 5.14: Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Proporcional-esencial

B \equiv GR mejorado exclusivamente por el TB(GR)

S \equiv GR mejorado exclusivamente por el TS(GR)

BB \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TB(GR)

SS \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TS(GR)

T \equiv GR mejorado igualmente por el TB(GR) y el TS(GR)

Como la función de ingresos y la de costes son continuas y crecientes se puede aplicar la cota 1. La cota 2 puede ser utilizada ya que ambas funciones (ingresos y costes) son cóncavas y por lo tanto la función de beneficios puede expresarse como diferencia de funciones convexas. Por último, como la función de ingresos es cóncava, también se puede utilizar la cota 3. Por otro lado, cabe destacar que si la

función de costes fijos fuese convexa, el problema resultante sería un programa de maximización cóncavo y consecuentemente se podría utilizar el algoritmo 3.2 (del gradiente reducido) para resolverlo. Este algoritmo se encuentra implementado en programas comerciales de optimización como puede ser el LINGO.

Los resultados obtenidos en la resolución de este problema de localización utilizando los tres algoritmos heurísticos empleados en este estudio se muestran en las siguientes tablas.

En la tabla 5.14 se presenta la distribución de los casos en los que los resultados obtenidos por el GR son mejorados por el TB(GR) o el TS(GR). En este caso, la solución GR ha sido mejorada en 59 de los 234 problemas planteados, repartiéndose estas mejoras de forma muy desigual entre las redes. Mientras que existen cuatro redes, dentro del grupo aleatorio, en las que el GR nunca es mejorado, existen otras dos, de entre las correspondientes a los casos particulares, en las que se consiguen mejoras en más del 50 % de los problemas estudiados.

El GR es más susceptible a ser mejorado cuando se desea implantar dos nuevos centros de servicio que cuando son tres los centros a localizar. Sin embargo, los cambios en el número de centros de servicio ya existentes no parecen influir en la cantidad de casos en los que el GR es mejorado por los otros algoritmos. Por último, no parece existir una tendencia que relacione el número de casos de mejora con la distribución de la demanda de los nodos.

En la tabla 5.15 se muestran los datos correspondientes a los algoritmos TB(GR) y TS(GR) para el caso proporcional-esencial. El porcentaje de mejora para el TB(GR) es del 0.2456 %, concentrándose la mayor parte en los problemas resueltos para $r = 3$. Esto es debido, en parte, a que el número de casos en los que el TB(GR) consigue mejorar al GR es muy superior cuando $r = 3$, pero también a que en los casos de éxito, la mejora conseguida cuando se implantan tres nuevos centros es muy superior a la conseguida con dos centros.

Si se observa las ratios (% mejora / % éxito) se ve que para las redes particulares, (11 - 13), se dan valores muy bajos, y esto, a pesar de que se producen muchos casos en los que el TB(GR) supera al GR. Todo ello indica que la mejora conseguida en estos problemas es muy inferior a la obtenida en las redes generadas aleatoriamente cuando se produce un caso de mejora.

El TB(GR) necesita resolver una media de 150.162 programas no lineales, debido a que en general basta con una iteración para que se detenga. Este algoritmo muestra gran independencia del tipo de red, ya que en todos los casos presenta una muy baja desviación típica con respecto al número de programas lineales.

El porcentaje de mejora logrado por el TS(GR) es un poco superior al del TB(GR), debido sobre todo a su mayor número de éxitos (59 frente a 48). Sin embargo, la mejora lograda por el TB(GR) en caso de éxito es superior a la del TS(GR) (la ratio (% mejora / % éxito) para el TS(GR) es de 0.0108 frente a 0.0120 obtenida por el TB(GR)).

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0.1398	0.0674	$7.4 \cdot 10^{-5}$	0.2392	0	0.0981
% mejora (r=3)	0.6552	0.2348	0.0133	0.1668	0.4805	0.3935
% mejora	0.3975	0.1511	0.0067	0.2030	0.2402	0.2458
% éxito (r=2)	13.333	11.111	11.111	44.444	44.444	13.675
% éxito (r=3)	26.667	24.444	33.333	77.778	66.667	27.350
% éxito	20.0	17.778	38.889	61.111	55.555	20.513
% mej. / % éx.	0.0199	0.0085	0.0002	0.0033	0.0043	0.0120
ev. med. (r=2)	147	97	107	155	61	118.692
ev. med. (r=3)	226.60	145.133	157	254.333	91.22	181.632
ev. med.	186.80	121.067	132	204.667	76.111	150.162
sd (r=2)	0	0	0	0	0	0
sd (r=3)	13.936	9.40	0	53.740	9667	13.854
sd	6.969	4.70	0	26.870	4.833	6.927
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0.1335	0.0674	$7.4 \cdot 10^{-5}$	0.2392	0.3009	0.1188
% mejora (r=3)	0.6552	0.2656	0.0071	0.2480	0.6850	0.4265
% mejora	0.3943	0.1665	0.0036	0.2436	0.4929	0.2726
% éxito (r=2)	13.333	11.111	44.444	44.444	44.444	17.094
% éxito (r=3)	26.667	24.444	66.667	77.778	66.667	33.333
% éxito	20.0	17.778	55.555	61.111	55.555	25.214
% mej. / % éx.	0.0197	0.0094	0.0001	0.0040	0.0089	0.0108
ev. med. (r=2)	204.889	134.689	146	136.889	62.667	157.188
ev. med. (r=3)	262.289	177.444	163.778	179.333	59.222	200.077
ev. med.	233.589	156.067	154.889	158.111	60.944	178.632
sd (r=2)	18.954	27.858	52.189	115.420	39.784	33.958
sd (r=3)	97.163	55.250	113.865	165.680	61.704	84.870
sd	58.059	41.554	83.027	140.550	50.744	59.414

Tabla 5.15: Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Proporcional-esencial

Este algoritmo consigue mayor número de mejoras cuando se localizan tres nuevos centros de servicio. Al igual con lo ocurrido con el TB(GR), la mejora lograda en los casos de éxito cuando $r = 3$ dobla a la obtenida cuando sólo se desean implantar dos nuevos centros de servicio. Todo ello hace que el porcentaje de mejora conseguido cuando $r = 3$ sea casi cuatro veces el conseguido para $r = 2$.

El número medio de programas no lineales resueltos en este caso es superior al del TB(GR). Esto es debido, sobre todo, al elevado número de casos en los que no consigue mejorar al GR, ya que en esos problemas el número de programas resueltos supera en un 50 % a la media empleada por el TB(GR). Todo ello conlleva una elevada desviación típica.

Los resultados obtenidos por los distintos algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria empleados en la resolución del $(r|X_p)$ -medianoide proporcional-essencial pueden ser esquematizados en los siguientes puntos:

- El GR es superado en 59 de los 234 problemas estudiados (el 25.2 %), cometiendo errores por debajo del 0.28 % con respecto a los otros algoritmos.
- Tanto el número de casos en los que el GR es mejorado por los otros algoritmos, como el porcentaje de mejora son superiores cuando $r = 3$. Además, en este sentido el comportamiento del TB(GR) y TS(GR) es similar.
- No parece existir ninguna tendencia que relacione el número de casos en los que el GR es mejorado con el número de centros existentes ni con la distribución de la demanda, aunque el menor número casos mejorados se da cuando la variabilidad es mayor.
- El porcentaje de mejora conseguido por el TB(GR) es un poco inferior al obtenido por el TS(GR) (0.2426 % frente a 0.2726 %).
- La mejora conseguida por el TB(GR) y el TS(GR), en los casos en los que consiguen superar al GR cuando $r = 3$ es muy superior a la obtenida cuando $r = 2$. De hecho, la ratio (% mejora / % éxito) cuando $r = 3$ es el doble de la que resulta cuando $r = 2$.
- La ratio (% mejora / % éxito) del TB(GR) es un poco superior que la del TS(GR), aunque las diferencias no son significativas.
- En todos los casos en los que el TB(GR) consigue mejorar al GR, el TS(GR) también lo hace. Sin embargo, el TS(GR) consigue mejoras en once casos en los que el TB(GR) fracasa.

5.7 Proporcional-no esencial

Para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide cuando el servicio es no esencial y las asignaciones son proporcionales, se ha utilizado la función de costes

$$F(x) = \text{factor} \left(\frac{x^7}{7} - 2x^6 + \frac{58}{5}x^5 - 36x^4 + \frac{193}{3}x^3 - 66x^2 + 36x \right).$$

	(1)-(5)	(6)-(10)	(11)	(12)	(13)
$d=0$	8	9	10	5	1
$d=1,2$	25	80	100	125	80

Tabla 5.16: Valores de *factor* para las distintas redes. Proporcional-no esencial

El valor de *factor* ha sido elegido dependiendo de la red con el fin procurar la existencia de soluciones interiores para el problema de obtener los niveles óptimo de atractivo cuando se fijan las localizaciones. En la tabla 5.16 se desglosan estos valores según las redes y la distribución de la demanda de los nodos. En este caso, los niveles de atractivo han sido elegidos en el intervalo $[0.9, 2.7]$. Se ha utilizado como función de la distancia $f(x) = 3.5 + x$ para asegurar que $f(0) > 2.7$ y con ello que las asignaciones estén bien definidas.

En este caso, la función de ingresos, dadas las localizaciones es continua y creciente (ver sección 2.3.6), pudiéndose descomponer como diferencia de funciones convexas (corolario 3.16). Consecuentemente, para obtener los niveles de atractivo óptimos se puede utilizar el algoritmo 3.3 (de ramificación y acotación) con la cota 1 y 2 (como se demostró en las aplicaciones de las secciones 3.3.1 y 3.3.2) resultando convergente en ambos casos. Por otro lado, cuando $r = 1$, o bajo ciertas condiciones cuando $r = 2$, la función de ingresos es convexa (proposiciones 2.16 y 2.18), por lo que si la función de costes fuese cóncava, el problema resultante sería un programa de maximización convexo. Para obtener la solución de este problema bastaría aplicar el algoritmo 3.2 que no hace más que evaluar los vértices de la región factible.

En la tabla 5.17 se muestra la distribución de los casos en los que el GR ha sido superado por los otros algoritmos. Como se puede observar, en tan sólo 23 de los 234 problemas estudiados el TB(GR) o TS(GR) consiguen superar los resultados obtenidos por el GR. En siete de las trece redes el GR no es mejorado en ninguno de los casos, destacando tan sólo las redes de 55 y 32 nodos (11 y 13) en las que este algoritmo es mejorado en siete y nueve problemas, respectivamente.

Cuando se localizan tres nuevos centros, el GR es mucho más susceptible de mejora que cuando se implantan dos centros. Esta diferencia se hace mucho más acentuada en los casos con menor variabilidad en la distribución de la demanda

$(d = 0, 1)$ en los que el GR nunca ha sido mejorado cuando $r = 2$. También se puede observar que los únicos casos en los que el GR es superado cuando $r = 2$ se dan en las redes de 55 y 32 nodos (11 y 13). Por otro lado, no parece existir ninguna tendencia general entre el número de casos mejorados y el incremento en la variabilidad de la distribución de la demanda. Sin embargo, es curioso observar que para la redes generadas aleatoriamente, los errores del GR van reduciéndose según aumenta la variabilidad de la demanda.

En la tabla 5.18 se describe el comportamiento del TB(GR) y TS(GR), obteniéndose los porcentajes de mejora con relación a los resultados obtenidos por el GR.

(p,r,d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	mej.
(1,2,0)														0
(1,3,0)							T				T	S		3
(2,2,0)														0
(2,3,0)					T						T	T		3
(3,2,0)														0
(3,3,0)									T		T	T		3
(1,2,1)														0
(1,3,1)							T						T	2
(2,2,1)														0
(2,3,1)													T	1
(3,2,1)														0
(3,3,1)													T	1
(1,2,2)													T	1
(1,3,2)											T		B	2
(2,2,2)													B	1
(2,3,2)											T		B	2
(3,2,2)											S		B	2
(3,3,2)											T		B	2
mej2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	4
mej3	0	0	0	0	1	0	2	0	1	0	6	3	6	19
mej.	0	0	0	0	1	0	2	0	1	0	7	3	9	23

Tabla 5.17: Distribución de las mejoras producidas sobre el GR. Proporcional-no esencial

B \equiv GR mejorado exclusivamente por el TB(GR)

S \equiv GR mejorado exclusivamente por el TS(GR)

BB \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TB(GR)

SS \equiv GR mejorado por TB(GR) y TS(GR), mayormente por el TS(GR)

T \equiv GR mejorado igualmente por el TB(GR) y el TS(GR)

El TB(GR) consigue mejorar los resultados obtenidos por el GR en un 0.0254 %, consecuencia de los 21 problemas en los que consigue superarlo. Aunque el número de casos en los que este algoritmo mejora al GR es superior cuando $r = 3$, a diferencia del caso esencial, la mejora correspondiente a cada uno de estos casos es inferior a la obtenida cuando $r = 2$.

Cabe destacar que la ratio (% mejora / % éxito) es muy baja en todos los casos, incluso en aquellas redes en las que se produce un mayor número de mejoras.

La media del número de programas no lineales resueltos por el TB(GR) hasta detenerse es de 149.197, lo que significa que en la mayoría de los problemas resueltos se utiliza tan sólo una iteración para llegar a su solución. Como consecuencia, la desviación típica relacionada con el número de programas resueltos es muy baja, destacando sobre las demás la que resulta en la red (12).

No existe una tendencia que relacione el número de éxitos con la distribución de la demanda. Aunque es destacable que tan sólo en el caso con mayor variabilidad es cuando este algoritmo consigue mejorar los resultados del GR para $r = 2$.

El porcentaje de mejora conseguido por el TS(GR) es del 0.0087 %, bastante inferior al logrado por el TB(GR). El TS(GR) consigue mejorar al GR en tan sólo 18 de los 234 casos estudiados, correspondiendo 16 de éstos a situaciones con $r = 3$. En las redes aleatorias los resultados obtenidos por el TB(GR) y el TS(GR) son los mismos aunque esto no ocurre en las redes particulares. Mientras que para las redes de 55 y 79 nodos (11 y 12) el TS(GR) muestra una leve mejoría con respecto al TB(GR), en la red de 32 nodos (13) sus resultados son bastante peores. Por otro lado, la mejora conseguida en cualquier red por este algoritmo cuando consigue superar al GR es inferior a la obtenida por el TB(GR). En general, la ratio (% mejora / % éxito) del TS(GR) es de 0.0011 mientras que la del TB(GR) es 0.0028.

El TS(GR) presenta un mayor número de mejoras cuando la distribución de la demanda es unitaria, mientras que en los otros dos casos, el número de mejoras es similar. En el único caso en el que este algoritmo consigue mejorar los resultados del GR en los problemas con dos nuevos centros es cuando la variabilidad de la demanda es la mayor.

El elevado número de casos en los que el TS(GR) no consigue mejorar la solución obtenida por el GR lleva asociado que el número de programas no lineales que tiene que resolver el algoritmo sea bastante elevado, con una media de 211.214 programas, un 42.57 % superior a la media del TB(GR). También la desviación típica es bastante elevada, aunque evidentemente, en las redes en las que se consiguen pocas mejoras es más reducida.

Los resultados obtenidos por la aplicación de los distintos heurísticos de búsqueda combinatoria empleados en el estudio para la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

TB(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0	0	0	0	0.2582	0.0198
% mejora (r=3)	0.0010	0.0102	0.0178	0.0016	0.3274	0.0310
% mejora	0.0005	0.0051	0.0089	0.0008	0.2928	0.0254
% éxito (r=2)	0	0	0	0	33.333	2.564
% éxito (r=3)	2.222	6.667	66.667	22.222	66.667	15.384
% éxito	1.111	3.333	33.333	11.111	50.0	8.974
% mej. / % éx.	0.0005	0.0015	0.0003	$4.8 \cdot 10^{-5}$	0.0059	0.0028
ev. med. (r=2)	147	97	107	155	61	118.692
ev. med. (r=3)	218.6	145.133	157	262.778	97.667	179.701
ev. med.	182.8	121.067	132	208.889	79.333	149.197
sd (r=2)	0	0	0	0	0	0
sd (r=3)	4.8	9.4	0	67.026	14.5	11.733
sd	2.4	4.7	0	33.513	7.25	5.866
TS(GR)	(1) - (5)	(6) - (10)	(11)	(12)	(13)	total
% mejora (r=2)	0	0	0.0023	0	0.0758	0.0060
% mejora (r=3)	0.0010	0.0102	0.0178	0.0020	0.0731	0.0115
% mejora	0.0005	0.0051	0.0101	0.0010	0.0745	0.0087
% éxito (r=2)	0	0	11.111	0	11.111	1.709
% éxito (r=3)	2.222	4.444	66.667	33.333	33.333	13.675
% éxito	1.111	2.222	38.889	16.667	22.222	7.692
% mej. / % éx.	0.0005	0.0023	0.0003	0.0001	0.0335	0.0011
ev. med. (r=2)	224.156	148.822	151.222	235.778	92.667	180.350
ev. med. (r=3)	326.489	208.555	90	278.444	103.333	242.077
ev. med.	275.322	178.689	120.611	257.111	98	211.214
sd (r=2)	2.290	2.021	39.905	1.202	4.555	5.171
sd (r=3)	25.348	34.174	113.265	181.871	68.505	50.866
sd	13.819	18.097	76.585	91.536	63.530	28.018

Tabla 5.18: Resultados obtenidos por el TB(GR) y TS(GR). Proporcional-no esencial

- El GR obtiene resultados bastante buenos, siendo superado tan sólo en un 9.83 % de los problemas, con una mejora con respecto a su solución inferior al 0.003 %.
- El GR es mejorado principalmente en casos con $r = 3$, encontrándose tan sólo mejoras para $r = 2$ cuando la distribución de la demanda es la mayor ($d = 2$).
- El GR presenta mejores resultados en los casos de las redes generadas aleatoriamente.
- El TB(GR) consigue una mayor mejora con respecto a la solución GR que el TS(GR) (0.0028 % frente al 0.0011 %)
- Mientras que el número de mejoras obtenidas por el TB(GR) parece no depender de la distribución de la demanda, para el TS(GR) este número es mayor cuando la demanda es unitaria.
- El número medio de programas no lineales resueltos por el TS(GR) es un 42.57 % superior a la media invertida por el TB(GR).
- La ratio (% mejora / % éxito) del TB(GR) dobla a la del TS(GR). En ambas situaciones, la mejora conseguida en los casos de éxito cuando $r = 2$ es superior a la obtenida cuando $r = 3$.

5.8 Resumen

En este capítulo se ha estudiado la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide en el que se han considerado condiciones de calidad derivadas de que los centros de servicio pueden determinar sus niveles de atractivo. Al igual que en el caso del $(r|X_p)$ -medianoide sin atractivo, se han analizado diferentes situaciones, definidas por el tipo de servicio prestado por los centros (esencial o no esencial) y del tipo de preferencias utilizadas para asignar la demanda de los nodos a los centros (preferencias binarias, parcialmente binarias o proporcionales).

Para resolver el problema se han combinado heurísticas de búsqueda combinatoria (GR, TB y TS) para determinar las localizaciones óptimas con algoritmos de búsqueda global para obtener los niveles óptimos de atractivo para cada una de las localizaciones.

En cuanto al problema de localización, de acuerdo con los resultados obtenidos en el caso sin atractivos, se ha optado por utilizar la solución obtenida por el GR como punto de partida para el TB(GR) y el TS(GR). En la tabla 5.19 se muestran los resultados obtenidos mediante la aplicación de estos algoritmos. Para el GR se muestra el porcentaje de casos en los que su solución ha sido superada por alguno de los otros dos algoritmos, mientras que para el TB(GR) y el TS(GR), lo que se presenta es el porcentaje medio de mejora conseguido con respecto a la solución GR.

- Las mejoras conseguidas sobre el GR varían desde el 0.0087 %, conseguido por el TS(GR) en el caso proporcional-no esencial, hasta el 1.778 % del TS(GR) en el caso binario-esencial.
- Los porcentajes de mejora conseguidos por el TB(GR) y el TS(GR) son superiores para servicios esenciales que para no esenciales.

	GR	TB(GR)	TS(GR)	GR	TB(GR)	TS(GR)
Proporcional	Esencial			No Esen.		
$r = 2$	17.094	0.0981	0.1188	3.419	0.0198	0.0060
$r = 3$	33.333	0.3935	0.4265	16.239	0.0310	0.0115
total	25.214	0.2458	0.2726	9.829	0.0254	0.0087
Parcialmente binario	Esencial			No Esen.		
$r = 2$	16.239	0.0497	0.0495	11.111	0.0797	0.0683
$r = 3$	16.239	0.0453	0.0486	27.350	0.2667	0.2058
total	16.239	0.0475	0.0491	19.231	0.1732	0.1384
Binario	Esencial			No Esen.		
$r = 2$	35.897	1.6471	2.3500	15.385	0.4530	0.4415
$r = 3$	35.897	0.7044	1.2057	23.077	0.1952	0.1863
total	35.897	1.1757	1.7779	19.231	0.3241	0.3139

Tabla 5.19: Resultados de los algoritmos para los distintos escenarios

- En el caso no esencial, el mejor comportamiento del GR se da para las asignaciones proporcionales, seguido de las parcialmente binarias y finalmente las binarias.
- El porcentaje de casos en los que el GR es superado sigue la misma tendencia
- En el caso esencial, el menor error detectado para el GR se da para las asignaciones parcialmente binarias, seguida de las proporcionales y el peor se da para las binarias.
- En las asignaciones binarias, ya sea con servicios esenciales o no esenciales, es el único caso donde las mejoras logradas por el TB(GR) y el TS(GR) con respecto a la solución GR son superiores, con diferencia, cuando se localizan dos nuevos centros de servicio. El resto de casos, salvo el parcialmente binario-esencial en la que son muy similares, las mayores mejoras se dan, con diferencia, cuando se localizan tres centros de servicio.

- El mayor número de casos de mejora se produce cuando $r = 3$, salvo para los casos esenciales binario y parcialmente binario.
- Los porcentajes de mejora conseguidos por el TB(GR) y el TS(GR) son muy parecidos. El caso en el que se da una mayor diferencia es el binario-esencial, en el que el porcentaje de mejora del TS(GR) supera en más de medio punto al obtenido por el TB(GR). Para el resto de los casos, la diferencia máxima está por debajo de 0.035 puntos.
- Para los servicios esenciales, las mayores mejoras son logradas por el TS(GR), mientras que para los no esenciales, éstas se consiguen con el TB(GR).
- En la tabla 5.20 se muestran los ratios (% mejora / % éxito) para los distintos casos. El escenario en el que se produce mayor mejora cuando la solución GR es superada es en el binario-esencial y el de menor el proporcional-no esencial. Además, no existe una dominancia entre el TB(GR) y el TS(GR), en cuanto a conseguir mayores mejoras en caso de éxito.

% mejora / % éxitos	Esencial		No esencial	
	TB(GR)	TS(GR)	TB(GR)	TS(GR)
Proporcional	0.0120	0.0108	0.0028	0.0011
Parcialmente binario	0.0030	0.0033	0.0112	0.0092
Binario	0.0393	0.0520	0.0185	0.0210

Tabla 5.20: Porcentaje medio de mejora por error cometido

- En la mayoría de los casos la mejora lograda en los casos de éxito cuando $r = 2$ es superior a la conseguida cuando $r = 3$. Los casos en los que no se da este comportamiento son el parcialmente binario-esencial, en el que apenas existe diferencia para las dos situaciones, y el proporcional-esencial, en el que el efecto es el contrario.
- El TB(GR) suele detenerse después de una iteración, por lo que el número de programas no lineales resueltos no es muy elevado y la desviación típica resultante es bastante baja.
- No parece que exista una tendencia generalizada que relacione el número de casos en los que el GR es superado y la variabilidad de la distribución de la demanda. Sin embargo, en la mayoría de los casos, salvo en el binario-esencial, el mayor número de mejoras conseguidas por los otros algoritmos se da cuando la variabilidad es mayor.
- No parece existir ninguna relación entre la cantidad de casos de mejora y el número de centros de servicio ya existentes en el mercado.

En la tabla 5.21 se comparan los resultados obtenidos por el GR en la resolución del problema del $(r|X_p)$ -medianoide en los dos casos estudiados en este trabajo, con y sin atractivos. Cuando no se consideran atractivos, el resultado que se muestra es el porcentaje de error cometido por el GR, mientras que para el caso con atractivos, el dato que se presenta es el error máximo detectado mediante la utilización de los otros algoritmos de búsqueda.

Como se comprueba en dicha tabla, el error cometido por el GR, en línea generales, es superior cuando los centros de servicio pueden elegir su nivel de atractivo. Sin embargo, en ninguno de los casos estos errores superan el 1.8 %. En ambas situaciones, tanto los mejores resultados como los peores se dan para el mismo tipo de problemas, el proporcional-no esencial y el binario-esencial, respectivamente. Tan sólo cuando las asignaciones son parcialmente binarias, los resultados obtenidos por el GR cuando se resuelve el problema con atractivos resultan ser mejores, o muy similares, a los obtenidos en el caso sin atractivo.

	Esencial		No esencial	
	sin atract.	con atract.	sin atract.	con atract.
Proporcional	0.0881	0.2726	0.0018	0.0254
Parcialmente binario	0.1056	0.0491	0.1501	0.1732
Binario	1.1096	1.7779	0.1322	0.3242

Tabla 5.21: Error cometido por el GR para los distintos casos estudiados

Capítulo 6

Implantación de centros de distribución alimentaria en Gran Canaria

6.1 Introducción

En este capítulo se estudia un problema de localización competitiva en el que una empresa desea entrar en el mercado de distribución alimentaria de Gran Canaria, implantando uno, dos o tres nuevos establecimientos que han de competir con los ya existentes en la red comercial de la isla. Para ello se ha considerado que el poder de compra de los usuarios es repartido proporcionalmente entre todos los establecimientos operantes en el mercado atendiendo a las características propias de cada centro, su atractivo, y a la distancia que separa a los consumidores de los establecimientos.

Por otro lado, el modelo se ha adaptado a las condiciones impuestas por la Ley 4/1994, de 25 de abril, de Ordenación de la Actividad Comercial de Canarias y Plan Integral de Comercio donde se regulan ciertos aspectos relativos a la implantación de hipermercados.

Tradicionalmente, la red minorista de distribución alimentaria en Canarias ha ido creciendo de forma bastante intuitiva, sin que para ello se halla hecho ningún tipo de estudio de mercado. Tan sólo las empresas más potentes del sector, generalmente multinacionales interesadas en la instalación de grandes supermercados o hipermercados, han llevado a cabo este tipo de estudios. En este trabajo se ofrece una herramienta que puede ser utilizada para planificar la incorporación de nuevos establecimientos de distribución alimentaria en Canarias sin más que contar con cierta información de la situación del mercado (número de establecimientos, superficie de venta, etc.). El modelo está diseñado para

proporcionar a la empresa interesada en incorporarse al mercado información referente, tanto a las ubicaciones de sus nuevos centros como a las características que deben satisfacer para maximizar sus beneficios, teniendo en cuenta que han de competir con los establecimientos que ya operan en la red.

Municipio	641-5	6471	6472	6473	6474	6612	%	ratio
Agaete	7	9	4	2	1	0	9.2	250.5
Agüimes	42	21	13	3	1	3	6.82	232.6
Artenara	0	1	0	0	0	0	2.32	125.2
Arucas	39	44	13	2	1	0	6.91	311.4
Firgas	4	12	2	0	0	0	6.74	367.4
Gáldar	38	33	13	1	2	0	8.67	252.8
Ingenio	34	32	13	6	1	0	6.77	273.8
Mogán	25	17	67	10	1	0	5.30	287.9
Moya	7	8	5	2	1	0	5.70	139.6
L. Palmas G.C.	612	415	161	43	34	4	5.16	377.1
S. Bartolomé	103	38	102	21	10	0	4.48	318.4
S. Nicolás. T.	13	9	0	2	1	0	6.56	324
Sta. Brígida	20	10	5	5	1	0	5.81	455.1
Sta. Lucía	79	37	30	12	1	1	6.90	261.8
Sta. M. Guía	6	15	4	1	0	0	4.50	537.1
Tejeda	0	2	2	0	0	0	4.54	613
Telde	111	100	34	14	4	3	6.23	313.8
Teror	23	22	3	2	1	0	7.64	224.7
Valleseco	6	5	3	0	0	0	7.95	304.5
Valsequillo	7	10	3	0	0	0	5.51	385.5
V. S. Mateo	0	11	8	3	1	0	5.94	310.7
Total isla	1176	851	485	129	61	11	5.56	296.1
% prov. en G.C.	82.76	85.7	75.78	80.63	78.21	92.0	100	100

Tabla 6.1: Distribución alimentaria por municipios en Gran Canaria.
(Fuente: Cámara Oficial de Comercio, Industria y Navegación de Las Palmas.
Elaboración propia)

Si se analiza el sector comercial en la isla de Gran Canaria puede observarse que uno de sus subsectores más importantes es el de la alimentación. De hecho, si se tiene en cuenta el número de licencias IAE (Impuesto de Actividades Económicas) dadas de alta en el Ministerio de Economía y Hacienda en la isla de Gran Canaria durante el año 1998, las dedicadas al sector de alimentos, bebidas y tabaco se corresponden con un 11.6 % del total de las licencias de la isla, lo que supone el 80.55 % de las licencias en ese sector de toda la provincia de Las Palmas. Hay que reseñar que el número de licencias IAE no coincide con el de establecimientos comerciales que se dedican a prestar estos servicios ya que en muchos de ellos se

realizan varias actividades simultáneamente. Es, por lo tanto, una estimación por exceso del número de establecimientos dedicados a la distribución del sector.

En la tabla 6.1 se muestra el número de licencias IAE dadas de alta durante el año 1998 para los distintos epígrafes relacionados con el comercio minorista de alimentos y bebidas en los diferentes municipios de Gran Canaria. En la columna etiquetada como 641-5 se incluyen lo que se podría denominar como tiendas especializadas, es decir, fruterías, carnicerías, vinos, etc. En la siguiente columna, 6471, se muestra el número de tiendas tradicionales, es decir aquellas que siguen realizando sus ventas a través de un mostrador y con la atención personal de quien generalmente es su dueño. En los siguientes epígrafes se reúnen los comercios de este sector en régimen de autoservicio, clasificados según la superficie de venta disponible. En la columna 6472 se presentan los autoservicios con superficie de venta máxima inferior a los 120 m^2 , en la 6473, aquellos cuya superficie de venta es mayor o igual a los 120 m^2 e inferior a los 399. Por último, en la 6474 se enumeran aquellos autoservicios con una superficie mayor o igual a los 400 m^2 . En este último epígrafe no se encuentran incluidos aquellos supermercados cuya superficie de venta es mayor o igual a los 2500 m^2 ya que éstos pasan a ser considerados como hipermercados y se reflejan en la columna etiquetada como 6612.

Como se ve en dicha tabla, el sistema de distribución de alimentos y bebidas de la isla está caracterizado por el predominio de dos tipos de establecimientos, las tiendas especializadas y las tradicionales. Sin embargo, el futuro de las tiendas tradicionales no es muy cierto debido al sistema obsoleto de explotación al que son sometidas y su supervivencia pasa generalmente por la especialización, principalmente en aquellas zonas en las que existen grandes supermercados o hipermercados. Los municipios con más establecimientos en el sector son Las Palmas de G.C. y Telde, en los que se concentra el 56.58 % del total de la isla, poseyendo además, el 63.63 % de los hipermercados.

En la octava columna se muestra el porcentaje que supone el número de licencias en alimentación y bebidas con respecto al total de licencias del municipio. Así se observa que son Agaete y Gáldar, seguidos de Valleseco y Teror, los municipios con un mayor porcentaje de dedicación al sector de distribución de alimentos. Coincide además, que en ninguno de ellos existen hipermercados y generalmente se encuentran bastante distantes del más próximo. La media de dedicación a la distribución alimentaria en toda la isla es del 5.56 % de las licencias dadas de alta. En la última columna se presenta la ratio de habitantes por licencias en alimentación en cada uno de los municipios. La media en este sentido en la isla es de 296.1 habitantes por cada licencia. La ratio más elevada se da en Artenara con 1252 habitantes por la única licencia, seguido de Tejeda, Guía y Sta. Brígida. El valor más bajo se da en Moya, en la que tan sólo existen 139.6 habitantes por licencia. De nuevo se observa que en los municipios con ratios elevados no existen hipermercados, ni tan siquiera grandes supermercados. La inexistencia de grandes centros de distribución favorece que el mercado esté mucho más desagregado.

Por otro lado, puede observarse como la mayor parte del sector de distribución

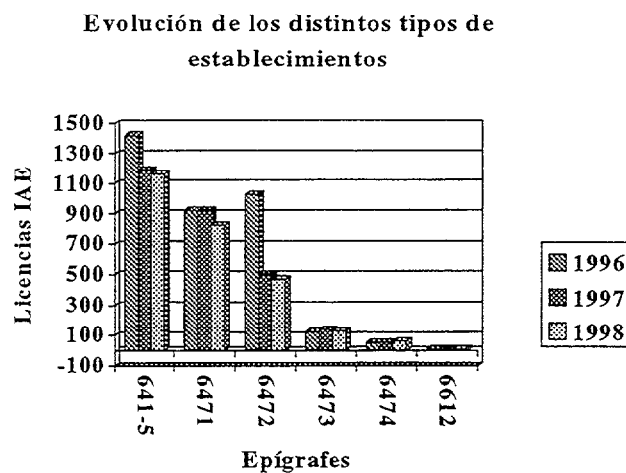


Figura 6.1: (Fuente: Camara Oficial de Comercio, Industria y Navegación de Las Palmas. Elaboración propia)

alimentaria se encuentra afincado en Gran Canaria debido, en gran parte, a cuestiones históricas y demográficas. En la última fila se presenta el porcentaje de licencias de la provincia que pertenecen a la isla. Se puede comprobar que el porcentaje de licencias en el sector, incluyendo todos los epígrafes, pertenecientes a la isla es de Gran Canaria es del 82.51 %, quedando tan sólo el 17.49 % para las otras dos islas que forman la provincia (Lanzarote y Fuerteventura).

En la figura 6.1 se muestra la evolución de licencias IAE por epígrafe entre los años 1996 y 1998. A partir de 1996 se ha producido un descenso en el número de licencias de tiendas especializadas y sobre todo en los pequeños autoservicios, superficie de venta inferior a los 120 m². Para las tiendas tradicionales se ha producido un pequeño descenso en el año 1998. En cuanto a los autoservicios medianos, aunque hubo un pequeño despunte en 1997, los niveles parecen mantenerse. Para los grandes autoservicios (supermercados) e hipermercados, se da una pequeña tendencia al crecimiento, muy leve para los hipermercados, pasando de 52 supermercados en 1996 a 60 en 1998 y de 10 hipermercados a 11.

La Administración Pública ha puesto gran interés en regular el sistema de distribución comercial, tanto para controlar los niveles de inflación producidos en la Comunidad como para la consolidación de un sistema de distribución comercial próspero. Se trata de conseguir que convivan los pequeños y medianos comerciantes con los grandes hipermercados en un sistema en el que la competencia se refleje

en los precios y que en ningún momento se vea en peligro los intereses de los consumidores. Este interés se ha plasmado tanto a nivel nacional con la Ley 7/1996, de 15 de enero, de Ordenación del Comercio Minorista, la Ley Orgánica 2/1996, de 15 de enero, complementaria a la Ley de Ordenación del Comercio Minorista, y Plan Marco de Modernización del Comercio, y a nivel de la Comunidad Autónoma de Canarias en la Ley 4/1994, de 25 de abril, de Ordenación de la Actividad Comercial de Canarias y Plan Integral de Comercio.

Uno de los puntos más conflictivos que se pretende regular con esta serie de leyes es la implantación de hipermercados. Así, la Ley 7/1996 condiciona la implantación de un establecimiento de este tipo a la concesión de una licencia específica que ha de ser otorgada por la Comunidad Autónoma correspondiente. En todos los casos, se hace necesario, aunque no tenga carácter vinculante, un informe del Tribunal de Defensa de la Competencia en el que se evalúen los efectos de la implantación de ese nuevo centro en la red comercial existente.

Ya en 1994, en la Comunidad Autónoma de Canarias se había aprobado la Ley 4/1994 con la que se pretendía “la regulación administrativa en el ámbito de la Comunidad Autónoma de Canarias, de la actividad comercial, de la distribución y equipamiento comercial y de determinadas modalidades de ventas específicas, con el fin de ordenar la actividad del sector.” A partir de esta Ley, mediante el Decreto 219/1994, de 28 de octubre, se aprobaron los Criterios Generales de Equipamiento Comercial de Canarias, posteriormente sustituidos por los aprobados en el Decreto 237/1998, de 18 de diciembre, y que son los que se encuentran actualmente en vigencia. Con este decreto se establece la normativa pertinente para la concesión de licencias de implantación, ampliación o modificación de hipermercados con el fin de crear un equipamiento comercial en el Comunidad en la que armonicen pequeños, medianos y grandes comerciantes, junto con los intereses generales de la población. Estos criterios van orientados en dos sentidos, la distribución territorial de las actividades comerciales y el nivel de saturación existente en la zona.

6.1.1 Criterios Generales de Equipamiento Comercial

Con los Criterios Generales de Equipamiento Comercial (CGEC) de 1998 se pretende regular la implantación de nuevos hipermercados en la red comercial de Canarias. Las directrices de estos criterios van orientadas, por un lado a marcar la superficie de venta máxima que puede tener un establecimiento destinado a la distribución alimentaria y por otro, a establecer la superficie de venta destinada a hipermercados que puede haber en una zona determinada. Para ello, lo primero que se hace es una división de la Comunidad en zonas atendiendo a la oferta y la demanda existentes. Así, dependiendo de la amplitud del área de influencia que se le supone a un establecimiento localizado en dicha zona se definen las siguientes Zonas de Atracción Comercial (ZAC):

1. **Zona de Atracción Comercial de grado I (influencia insular):**
“municipios y áreas periurbanas cuyos establecimientos comerciales sirven

a amplias áreas de clientela, que se extienden más allá de sus ámbitos territoriales administrativos para convertirse en polos comerciales de carácter suprainsular.”

2. **Zona de Atracción Comercial de grado II** (influencia comarcal y limítrofes): “las constituidas por uno o más municipios con un área de influencia mayor que sus ámbitos territoriales administrativos, pero que por sí mismos no constituyen un foco comercial atrayente para la totalidad de la isla donde están ubicadas.”
3. **Zona de Atracción Comercial de grado III** (influencia comarcal): “aglomeraciones demográficas formadas por uno o más municipios, que en su conjunto generan una capacidad de consumo que justifica un equipamiento comercial mínimo de carácter cotidiano, sin que ello suponga la atracción constante de clientes de otros municipios.”
4. **Zona de Atracción Comercial de grado IV** (influencia municipal): “municipios cuyo equipamiento comercial da servicio a los habitantes que residen en su término municipal, realizando la adquisición de productos de consumo cotidiano en el mismo municipio.”

Partiendo de la clasificación anterior, los CGEC dividen la isla de Gran Canaria en las siguientes zonas (ver figura 6.2): una ZAC de grado I formada por los municipios de Las Palmas de Gran Canaria y Telde; tres zonas de grado II: la primera incluiría Santa Lucía, Ingenio y Agüimes, otra estaría formada por Arucas, Gáldar y Agaete, y una tercera constituida por San Bartolomé de Tirajana y Mogán. Cada uno de los municipios restantes de la isla estarían catalogados como ZAC de grado IV.

La concesión de la correspondiente licencia comercial para la instalación, ampliación o modificación de hipermercados dependerá del nivel de saturación de la zona de atracción comercial a la que pertenezca el municipio al que corresponda el proyecto. Para evaluar el nivel de saturación de la zona de atracción se tendrá en cuenta tanto la demanda actual de la zona como las características del equipamiento comercial existente.

Para determinar el nivel de saturación se tendrán en cuenta dos aspectos principales. Por un lado se impone una superficie de venta máxima para los nuevos centros. Por otro, para evitar la concentración de hipermercados, dependiendo del grado de la zona en la que se encuentre, se determina la superficie de venta máxima posible para este tipo de establecimientos en cada zona. Esta superficie es calculada como el producto del número de habitantes de hecho de la zona por un coeficiente dependiente del grado de la zona en cuestión. En la tabla 6.2 se presentan los coeficientes necesarios para calcular los niveles de saturación para los hipermercados así como la superficie de venta máxima permitida para los establecimientos dependiendo del grado de la zona.

Para obtener la superficie de venta máxima permitida para una zona, en m^2 , basta con calcular el producto de los habitantes de hecho por su correspondiente coeficiente. Obsérvese que para las ZAC de grado IV no existe coeficiente ya que como se ve, la superficie máxima permitida para un establecimiento en esa zona es de $1500 m^2$, inferior a los $2500 m^2$ necesarios para ser considerado como hipermercado.

	ZAC grado I	ZAC grado II	ZAC grado II	ZAC grado IV
coeficiente (m^2)	0.13	0.11	0.09	-
sup. máx. (m^2)	10000	7500	3000	1500

Tabla 6.2: Coeficientes de saturación y superficie máxima permitida para hipermercados

Para poder instalar un hipermercado se hace necesario que la superficie total de venta de los hipermercados existentes en la zona, más la del que se pretende establecer, no supere el resultado obtenido de multiplicar el correspondiente coeficiente de saturación por la población de hecho de la zona en la que se va a implantar el hipermercado.

Es importante reseñar, que mientras que con estos criterios se pone limitación a la implantación de nuevos hipermercados, no hay ninguna forma de control para el resto de los establecimientos, ya sean tiendas especializadas, tradicionales y autoservicios, y ni siquiera para grandes supermercados (superficie de venta inferior a los $2500 m^2$). Por otro lado, se establece que, con carácter excepcional, se puede ignorar el criterio de saturación en una zona cuando el IPC en esa zona supere, durante tres años consecutivos, en más de un 5 % el índice general de la isla en la que se encuentre ubicado el municipio en cuestión.

6.2 Planteamiento del problema

Dada la red actual de distribución en el sector alimentario en Gran Canaria, se pretende incorporar nuevos establecimientos en el sistema siguiendo las líneas marcadas por la Ley de Ordenación de la Actividad Comercial de Canarias y Plan Integral de Comercio de 1994 y concretadas en los CGEC de 1998. Además de la ubicación, se han de determinar las características de los nuevos centros de distribución, eligiendo el tipo de establecimiento a implantar entre, autoservicio-supermercado, gran supermercado o hipermercado. Para facilitar la formulación del problema se ha discretizado tanto la demanda como la oferta existentes en la isla en unos 32 nodos (ver figura 6.2).

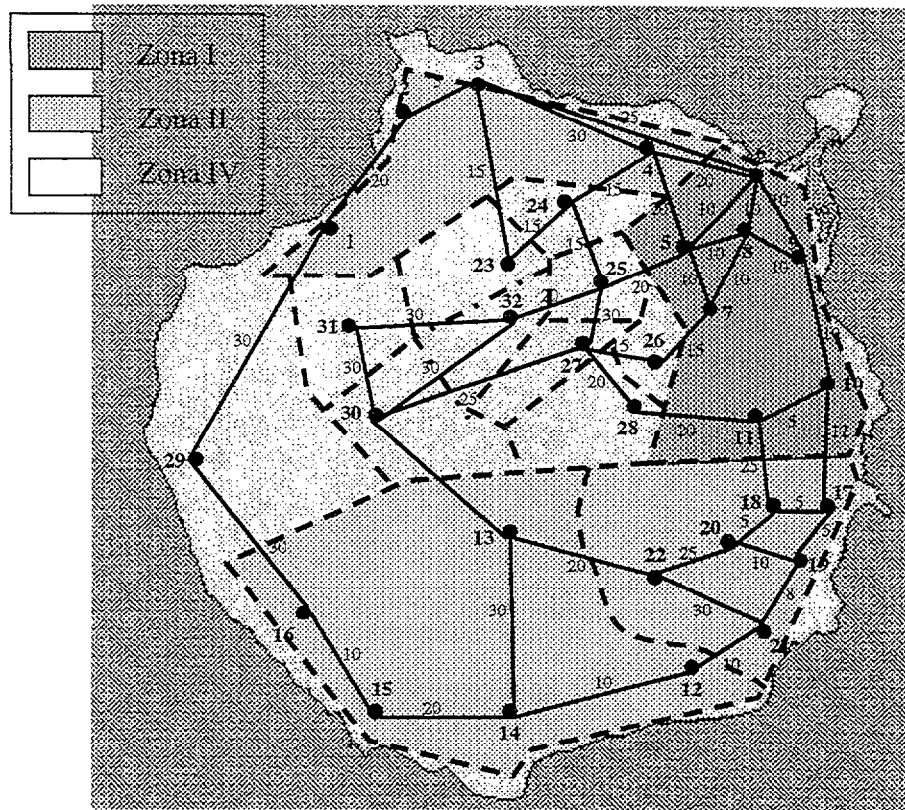


Figura 6.2: Red (nodos y distancias) y ZACs

En el sector de la distribución comercial de productos alimentarios conviven varios formatos de establecimientos, tiendas tradicionales, autoservicios, supermercados e hipermercados, de tal forma que los usuarios no suelen hacer uso exclusivo de ninguno de ellos, sino que tienden a realizar sus compras, dependiendo de lo que necesitan, en uno u otro establecimiento. En la tabla 6.3 se muestra el tipo de producto que suele buscar el consumidor cuando visita cada uno de los distintos tipos de establecimiento. Cabe destacar que el negocio de las tiendas tradicionales, especializadas y autoservicios se basa en los productos perecederos y en la compra diaria, teniendo una clientela más que nada de proximidad. Sin embargo, la compra fuerte, la que supone un mayor desembolso, se suele realizar en los establecimientos con un mayor surtido, grandes supermercados o hipermercados, tratándose de una clientela de distintas procedencias a la que no le importa emplear mayor tiempo en desplazamientos a cambio de una mayor comodidad y precios más bajos a la hora de realizar la compra.

Tipo de establecimiento	Productos
* Especialistas (641-5) * Tradicionales (6471) * Autoservicio (6472)	* Perecederos * Compra diaria
* Superservicios (6473) * Supermercados (6474)	* Alimentación seca * Charcutería * Compra diaria y fuerte
* Hipermercados	* Alimentación seca * Congelados * Compra fuerte

Tabla 6.3: Distribución del consumo según el tipo de establecimiento

Por lo dicho anteriormente no parece lógico plantear un modelo de asignaciones binarias en el que se asigne todo el poder de compra de un nodo al centro más cercano, ni tan siquiera al más atractivo. Por lo tanto, el volumen de compra de cada uno de los nodos es repartido entre todos los establecimientos del mercado siguiendo el criterio de asignaciones proporcionales. Al tratarse de la distribución de un bien de primer orden, los clientes tendrán que adquirir todo lo necesario para cubrir sus necesidades y para ello, distribuirán sus compras entre todos los establecimientos del mercado, atendiendo a criterios relacionados con el atractivo que ofrece cada uno de los centros y la distancia que los separa de ellos. Se considerará que la asignación de la demanda de un nodo a un establecimiento es directamente proporcional al nivel de atractivo de dicho centro e inversamente proporcional a una función creciente de la distancia que los separa.

Para calcular el poder de compra de cada uno de los nodos, se han utilizado las cifras que aparecen en la Encuesta de Presupuestos Familiares sobre el gasto anual

de los hogares según los grupos de gastos del Instituto Nacional de Estadística. Las cifras originales corresponden al año 1991 por lo que se ha tenido que actualizar a valores de 1999 utilizando la evolución del IPC en este grupo de gasto. En la tabla 6.4 se hace un desglose de los gastos familiares en alimentación, bebidas y tabaco y se comparan con los gastos totales a nivel regional. Como puede observarse, el gasto en alimentos y bebidas supone el 26.77 % del presupuesto de los hogares canarios, y si se considera el grupo completo, incluyendo tabaco y otros, se llega hasta el 28.78 %. Para calcular el poder de compra de cada uno de los nodos, se ha multiplicado la población de hecho por el gasto medio por habitante en alimentación y bebida (ver en la tabla 6.9 las poblaciones de hecho de cada nodo).

	Gasto total (Mill. ptas.)	Prop. (%)	Gasto medio (ptas.)	
			Por hogar	Por persona
Alimentos	193923	24.78	492735.6	132549.7
Beb. no alcohólicas	8984.3	1.15	22828.1	6140.9
Beb. alcohólicas	6573.9	0.84	16703.5	4493.4
Total alim. y beb.	209481.2	26.77	532267.2	143184
Tabaco	11332.5	1.45	28794.6	7746
Gastos no desglos.	4405.8	0.56	11194.6	3011.4
Total alim. beb. y tab.	225219	28.78	572256.4	153941.4
Total gasto	782460.1	100	1988139.4	534824.9

Tabla 6.4: Distribución de los gastos familiares en alimentación en Canarias
(Fuente: INE. Elaboración propia)

6.2.1 Niveles de atractivo

Los consumidores de un nodo experimentan una determinada atracción con respecto a cada uno de los centros establecidos en el mercado. Esta atracción depende tanto de las características del establecimiento, lo que en este trabajo se ha denominado atractivo, como de la distancia (tiempo) que los separa. La atracción, (a_{ij}) , que experimentan los consumidores del nodo i hacia el establecimiento j se expresa como

$$a_{ij} = \frac{a_j}{f_{ij}(\delta_{ij})},$$

donde a_j es el nivel de atractivo del establecimiento j y $f_{ij}(\bullet)$ es una función creciente de la distancia o tiempo (δ_{ij}) que separa el nodo de demanda i del centro de servicio j .

Para determinar el atractivo de un establecimiento se ha tenido en cuenta principalmente su superficie de venta, basando este supuesto en la hipótesis de que los usuarios de estos centros de distribución asocian mayor superficie con más variedad y mejores precios. Además de la superficie de venta, para valorar el

atractivo de un establecimiento hay que tener en cuenta el efecto favorable que supone la presencia de otros servicios colaterales de los que pueden hacer uso los clientes, aunque no sean propios del establecimiento. En este sentido, cabe destacar el efecto positivo que supone la existencia de aparcamientos suficientes o de servicios próximos de restauración, banca, recreo-ocio, moda, etc.

Factor	Parámetro	rango
Superficie de venta	$\beta_1. = s_1.$	
Aparcamientos	$\beta_2.$	0.7 - 1.3
Restauración	$\beta_3.$	1 - 1.2
Recreo-ocio	$\beta_4.$	1 - 1.3
Moda	$\beta_5.$	1 - 1.3
Banca	$\beta_6.$	1 - 1.2
Accesibilidad	$\beta_7.$	0.7 - 1.3
otros	$\beta_8.$	1 - 1.3

Tabla 6.5: Parámetros utilizados para calcular el atractivo

Para obtener los niveles de atractivo se ha empleado una fórmula de tipo multiplicativo, al estilo de la utilizada en el MCI por Nakanishi y Cooper (1974),

$$a_j = \prod_{k=1}^8 \beta_{kj}$$

donde β_{kj} es el parámetro que determinan el efecto del factor k en establecimiento localizado en j . En la tabla 6.5 se presentan los factores utilizados en este estudio y el rango de variación para cada uno de ellos. Para decidir los factores que complementen el efecto de la superficie de venta en la definición del nivel de atractivo se han estudiado las características del entorno próximo de los establecimientos más representativos, hipermercados y grandes supermercados, que ya operan en la isla. Además de la superficie de venta, la cual conlleva connotaciones relacionadas con rapidez, variedad, etc., se observa que existen dos tipos de factores, uno directamente relacionado con el tiempo invertido para poder llegar a hacer las compras y el otro relacionado con las posibles actividades que se pueden realizar una vez el usuario ha llegado al establecimiento. Como representantes del primer grupo se han tomado la accesibilidad del establecimiento y la existencia de aparcamientos suficientes para asegurar a los consumidores una pérdida mínima de tiempo. En el segundo grupo se han reunido aquellos factores relacionados con la evidencia de que los consumidores generalmente llevan a cabo viajes multitarea y aprovechan la ocasión para realizar otras actividades, como acudir a sucursales bancarias, ir al cine, etc.

Nodo	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	$\prod_{i=2}^8 \beta_i$	a_j
4	2.367	1.3	1	1	1	1	0.9	1	1.17	2.7694
5	6.739	1.3	1.2	1.2	1.3	1.1	1	1.1	2.944	1.9844
5	4.191	1.3	1	1	1	1	1	1	1.3	5.4483
5	1.735	1	1	1	1	1	1	1	1	1.735
6	2.399	0.8	1	1	1	1	1	1	0.8	1.9192
6	9.927	1.3	1.2	1.2	1.3	1.1	1.2	1.1	2.9446	29.2316
8	2.499	1.3	1	1	1	1	1	1	1.3	3.2487
9	5.2	1.3	1.1	1	1	1	1.2	1	1.716	8.9232
10	3.351	1.2	1.1	1	1.1	1	1.2	1	1.7424	5.8387
10	11.108	1.3	1.1	1	1.2	1.1	1.2	1	2.2651	25.161
11	2.174	1	1	1	1	1	0.9	1	0.9	1.9566
11	1.063	0.8	1	1	1	1	0.9	1	0.72	0.7653
14	2.951	1.3	1	1	1.2	1	1	1	1.56	4.6035
14	5.052	0.7	1	1	1	1	1	1	0.7	3.5364
17	1.857	1	1	1	1	1	1	1	1	1.857
18	1.454	1.3	1	1	1	1	1	1	1.3	1.8902
19	3.196	1.3	1	1	1	1	1.2	1	1.56	4.9857
19	2.053	1.1	1	1	1	1	1	1	1.1	2.2583

Tabla 6.6: Atractivo para los grandes supermercados e hipermercados existentes

Los valores dados para cada uno de los factores para los hipermercados y grandes superficies existentes en la red comercial de Gran Canaria han sido asignados tras un proceso de comparación entre todos ellos. Obsérvese que los factores con más influencia en la ponderación, sobre todo negativamente, además de la superficie de venta, son los asociados con el tiempo.

Evidentemente, cuando un factor sea indiferente el valor será 1, mientras que valores superiores a 1 significará una aportación positiva al atractivo del establecimiento, todo lo contrario que si el valor es inferior a 1. El rango para el parámetro correspondiente a la superficie dependerá de cada localización específica.

En la tabla 6.6 se muestran los valores para los parámetros y el valor final del atractivo para cada gran supermercado (superficie de venta entre 1500 y 2500 m^2) e hipermercado (superficie de venta mayor o igual a los 2500 m^2), existentes en la isla. Para el resto de los establecimientos se ha optado por tomar el valor 1 para cada uno de los parámetros β_i , $i = 1, \dots, 8$, lo que indica que no se encuentra influenciado por las características que éstos representan. En la décima columna se presenta el producto de todos los parámetros salvo la superficie de venta. Con ello se pretende mostrar el efecto que tendrá sobre el tamaño del establecimiento el resto de los factores que lo caracteriza. Así por ejemplo, en el nodo 6 se dan dos casos

opuestos. Por un lado existe un gran supermercado cuya falta de aparcamientos le produce una reducción en el atractivo, mientras que por otro lado existe un hipermercado muy favorecido por todos los factores, lo que le origina un notable incremento del atractivo con respecto al tamaño.

Municipio	n° autos.	Sup. autos.	n° spm.	Sup. spm.	n°hip.	S. hip.
Agaete	13	683	0	0	0	0
Agüimes	27	1902	1	2053	1	3156
Artenara	1	10	0	0	0	0
Arucas	69	3394	1	2367	0	0
Firgas	12	248	0	0	0	0
Gáldar	39	2381	0	0	0	0
Ingenio	45	3751	2	3311	0	0
Mogán	92	7316	0	0	0	0
Moya	17	1249	0	0	0	0
L. Palmas G.C.	507	58816	3	6633	6	38861
S. Bartolomé	126	11151	0	0	2	8003
S. Nicolás. T.	20	960	0	0	0	0
Sta. Brígida	14	1115	0	0	0	0
Sta. Lucía	38	4009	1	2336	1	6750
Sta. M. Guía	16	839	0	0	0	0
Tejeda	4	105	0	0	0	0
Telde	101	7424	2	3237	2	14459
Teror	13	1587	0	0	0	0
Valleseco	11	603	0	0	0	0
Valsequillo	9	441	0	0	0	0
V. S. Mateo	13	851	0	0	0	0
Total isla	1154	108835	13	24612	12	71269

Tabla 6.7: Número de establecimientos y superficie total (m²) en los municipios de Gran Canaria

(Fuente: Dirección General de Comercio de Canarias. Elaboración propia)

Para la asignación de los niveles de atractivo para los distintos establecimientos existentes en el mercado es imprescindible conocer la distribución de la superficie de venta en el sector. En la tabla 6.7 se presenta este dato desglosado en tres niveles, pequeños y medianos supermercados, grandes supermercados e hipermercados, para cada uno de los municipios de Gran Canaria. Como puede observarse, los hipermercados se concentran en cinco de los 21 municipios de la isla, en los que, salvo en San Bartolomé, existen además grandes supermercados. San Bartolomé es un municipio eminentemente turístico en el que existe gran número de autoservicios destinados a satisfacer las pequeñas necesidades temporales de los turistas. En los

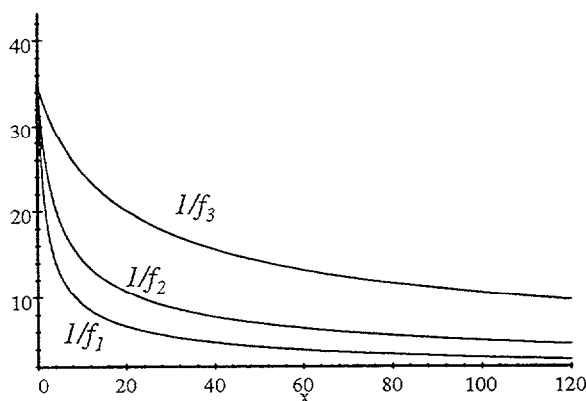


Figura 6.3: Ejemplo de funciones del tiempo empleadas

últimos años se ha incrementado la población residente debido a la gran oferta de trabajo en la zona por lo que, junto a la gran demanda originada por el turismo, se ha producido la aparición hipermercados. La mayor parte de la superficie se encuentra concentrada en los municipios que forman la única zona de atracción de grado I de la isla, Las Palmas de G.C. y Telde, copando el 59.16 % de la superficie de venta total de la isla para este tipo de establecimientos. Este porcentaje sube hasta un 74.85 % si se habla de superficie de venta en hipermercados, lo que justifica en la práctica la catalogación de grado I de la zona.

6.2.2 Funciones de la distancia

Para definir la función de la distancia (tiempo) que interviene en la función de atracción, se ha tenido en cuenta que los usuarios no perciben de igual forma el tiempo necesario para llegar a los distintos establecimientos. Por ejemplo, se sabe que el área de influencia de una tienda tradicional o pequeño autoservicio es de unos 300 m. Este área va creciendo con el tamaño del establecimiento, pasando a cubrir el barrio (pequeño y mediano supermercado) hasta poder llegar a abarcar todo el mercado como en el caso de los hipermercados.

Para este estudio se ha optado por utilizar funciones de tiempo y no de distancia, ya que, por lo general, los usuarios tienen en cuenta más el tiempo necesario para llegar hasta un lugar que la distancia que lo separa de los establecimientos. Se han considerado tres funciones del tiempo de desplazamiento, f_1 para los establecimientos pequeños y medianos (hasta los 1500 m²), f_2 para los

grandes supermercados (entre 1500 y 2500 m^2) y f_3 para los hipermercados. La diferencia entre ellas radica en el grado de sensibilidad al incremento del tiempo de desplazamiento. En la figura 6.3 se representa la función $\frac{1}{f_i}$, $i = 1, 2, 3$, siendo $f_1(x) = 1 + 1.5x^2$, $f_2(x) = 1 + x$ y $f_3(x) = 1 + \sqrt{x}$ (recordar que la función de atracción viene dada por $a_{ij} = \frac{\alpha_j}{f(\delta_{ij})}$).

Se observa como $1/f_1$ cae muy rápidamente según crecen los tiempos de desplazamiento con el fin de destacar el carácter netamente local de las tiendas tradicionales, autoservicios y pequeños supermercados. Esta caída es menos brusca en $1/f_2$ para permitir ampliar la zona de influencia para los grandes supermercados. La función $1/f_3$ tiene una caída mucho más suave que los casos anteriores para representar la percepción del tiempo de desplazamiento que tienen los consumidores hacia los hipermercados.

Zona	S. permitida	S. existente	Disponib.	S. máx.
Las Palmas GC-Telde	58655.35	53320	5335.35	10000
Sta. Lucía-Ingenio-Agüimes	9322.28	9946	0	7500
Arucas-Gáldar-Guía-Agaete	7981.6	0	7981.6	7500
S. Bartolomé T.-Mogán	11441.1	8003	3438.1	7500

Tabla 6.8: Disponibilidad para hipermercados (superficies de venta en m^2)

En la tabla 6.8 se presenta, para aquellas zonas de atracción comercial de Gran Canaria en las que se permitiría la implantación de hipermercados, la superficie de venta máxima permitida resultante de aplicar el correspondiente coeficiente de saturación por el número de habitantes de hecho y la superficie de venta total existente en los hipermercados de la zona. Además, se presenta la disponibilidad existente para superficie de venta para este tipo de establecimientos en cada una de las ZACs, obtenida al restar a la superficie máxima permitida la ya existente. Por último, se muestra la superficie de venta máxima según los CGEC para cada una de las zonas. Se puede ver que en la zona formada por "Las Palmas G.C. y Telde", aunque la superficie máxima permitida para los hipermercados en las zonas de atracción de grado I es de 10000 m^2 , al aplicar los criterios de saturación tan sólo quedan disponibles para la implantación de estos centros 5335.35 m^2 . Algo parecido ocurre en la zona formada por "San Bartolomé de Tirajana y Mogán" donde la superficie máxima pasa de 7500 a 3438.1 m^2 . Los otros dos casos son bien distintos. Por un lado, en la zona de "Arucas-Gáldar-Sta. M^a de Guía-Agaete" existe suficiente holgura para implantar un hipermercado con la superficie máxima permitida en esa zona, mientras que la otra zona, "Sta. Lucía-Ingenio-Agüimes", se encuentra saturada lo que impide la localización de un hipermercado en la zona.

Puesto que en un nodo pueden establecerse varios centros de características distintas, se han considerado 70 posibles candidatos, repartidos entre los 32 nodos

de demanda, ver tabla 6.9.

Municipio	[0.05,1.5]	[1.5,2.5]	[2.5,7.5]	[2.5,10]	Hab. hecho
Agaete	1	33	55		5763
Gáldar	2	34	56		21998
Sta. M. Guía	3	35	57		13966
Aucas	4	36	58		30833
LPGC	5,6,7	37,38,39		59,60,61	30971, 103017
	8,9	40,41		62,63	27371, 103017 103017
Telde	10,11	42,43		64,65	49946, 33853
S. Bartolomé	12,13	44,45	66,67		25000, 8263
	14	46	68		53996
Mogán	15,16	47,48	69,70		12142, 4608
Ingenio	17,18	49,50	71,72		10149,13404
Agüimes	19,20	51,52	73		12386, 6953
Sta. Lucía	21,22	53,54			40988, 896
Moya	23				8674
Firgas	24				6614
Teror	25				11459
Sta. Brígida	26				18662
V. S. Mateo	27				7146
Valsequillo	28				7710
S. Nicolás. T.	29				8101
Tejeda	30				2452
Artenara	31				1252
Valleseco	32				4263
Total nodos	32	22	9	7	788846

Tabla 6.9: Distribución de las posibles localizaciones y sus correspondientes rangos para la superficie de venta. (Intervalos en miles de m^2)

Para un mismo nodo de demanda se ha considerado una posible localización para cada tipo de establecimiento que se pueda implantar en ese punto. Por ejemplo, en el municipio de Telde existe la posibilidad de establecer los tres tipos de establecimientos analizados en el trabajo. Este municipio ha sido desagregado en dos nodos y en cada uno de ellos se puede establecer un autoservicio con menos de $1500 m^2$, en las posibles ubicaciones 10 y 11, un gran supermercado en las posibles localizaciones enumeradas como 42 y 43, así como un hipermercado en las que se denotan como 64 y 65. Esta multiplicación de las posibles ubicaciones es debida a la necesidad de aplicar las distintas funciones del tiempo de desplazamiento

dependiendo del tipo de establecimiento, además de que por ejemplo, para los hipermercados existe una regulación especial. Así, en el ejemplo propuesto, para las ubicaciones 10 y 11, la función del tiempo empleada será f_1 , mientras que para las 42 y 43 será f_2 y por último, para las localizaciones 64 y 65 se aplicará la función f_3 .

En la tabla 6.9 se presenta las posibles ubicaciones y el rango de variación para la superficie de venta de cada una de ellas según lo establecido por los CGEC, dependiendo de la ZAC en que se encuentren. Además se presenta el número de habitantes de hecho correspondientes a cada uno de los nodos. Para calcular este último dato se ha recurrido a las cifras de población residente referidas a 1998 dadas por el Instituto Nacional de Estadística y a los últimos datos sobre población transeúnte dadas por el Instituto Canario de Estadística para 1996. Los intervalos que determinan la posible superficie de venta para las distintas localizaciones están expresados en miles de m^2 .

Como se observa en la tabla, existen 32 posibles localizaciones para pequeños y medianos supermercados, teniendo en cuenta que se ha considerado que la superficie mínima para un establecimiento de este tipo es de $50 m^2$. Para grandes supermercados existen tan sólo 22 posibles localizaciones ya que para el resto de los nodos, al pertenecer a zonas de atracción de grado IV, la superficie máxima para estos establecimientos comerciales se limita a $1500 m^2$. Para hipermercados existen 16 posibles localizaciones, distribuidas entre dos ZACs de grado II cuya superficie de venta máxima es de $7500 m^2$, y una de grado I en la que el límite es de $10000 m^2$. Obsérvese que aunque existe una tercera ZAC de grado II, la formada por Santa Lucía, Ingenio y Agüimes, en ella no se consideran posibles localizaciones para hipermercados ya que se encuentra saturada de este tipo de establecimientos. De hecho, los nodos 71, 72 y 73 no son candidatos para establecer nuevos hipermercados, siendo incluidos porque existen centros de servicio de este tipo.

6.2.3 Función de costes para los atractivos

Para obtener el nivel óptimo de atractivo para un establecimiento habría que determinar los valores de todos los factores que intervienen en su definición. Para simplificar el problema, y ya que la superficie de venta se ha tomado como uno de los parámetros más importantes, se ha optado por considerar que el resto de factores son constantes. Es decir, de antemano la empresa conoce las características que quiere darle al nuevo establecimiento y tan sólo ha de decidir su tamaño. De esta forma, la función de costes que depende del atractivo pasa a depender exclusivamente de la superficie de venta,

$$F(a_j) = F(s_j, \beta_{2j}, \dots, \beta_{8j}) = F(s_j)$$

Se ha considerado la existencia de unos costes que pueden suponerse lineales, tales como los de construcción (compra o alquiler del suelo), y de otros en los que se manifiesta una cierta economía de escala como pueden ser personal y equipamiento.

Para establecer un autoservicio moderno y competitivo es imprescindible dotarlo de caja registradora con sistema de lectura de códigos de barra, mantenedores para fruta y verdura, frigoríficos y demás. Esto supone unos mayores gastos por superficie que en un supermercado o un hipermercado donde la ratio entre equipamiento y superficie de exposición no es tan elevada. Por otro lado, el personal por m^2 de superficie de venta se va reduciendo cuando aumenta la superficie del establecimiento ya que lo que prima es que el usuario elija el producto que desee de entre una gama cada vez más amplia de alternativas sin la necesidad de la asistencia de un empleado. Por último, cuanto mayor es el establecimiento, mayor es su posición de fuerza con respecto a los distribuidores, aprovechando no sólo ventajas en precio y formas de pago, sino también en que son éstos quienes actúan como colocadores del producto que proveen, con la correspondiente reducción en los requerimientos de personal. Por este motivo se han considerado las funciones cóncavas que aparecen en la figura 6.4 ($g_1(x) = 3x + 10\sqrt[3]{x - 0.04995}$, $g_2(x) = 10x + 10\sqrt[3]{x - 0.04995}$).

En principio, lo más adecuado parece ser utilizar todos los parámetros, salvo el correspondiente a la superficie, igual a 1. Con ello, la superficie elegida coincidiría con el valor del atractivo con el que se maximizarían los beneficios. Después cabría hacer un análisis en el que se podría intercambiar superficie por los otros factores, tal vez reducir superficie a cambio de mejorar los aparcamiento, etc. Por otro lado, al obtener el nivel de atractivo, podría compararse éste con el de los establecimientos existentes y establecer referencias de lo que se persigue.

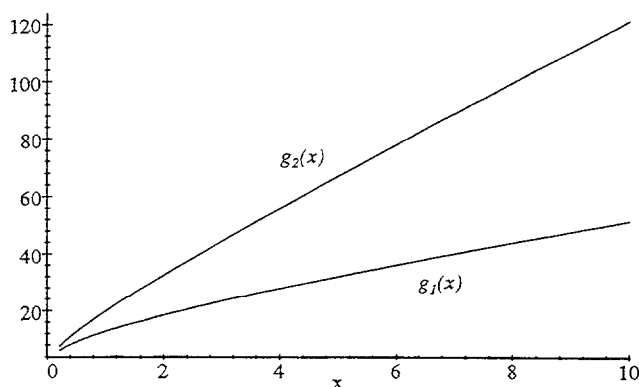


Figura 6.4: Funciones de costes fijos para los atractivos utilizadas

6.3 Resolución del problema

El problema de obtener las localizaciones y sus correspondientes niveles de atractivo puede ser planteado como el siguiente programa no lineal mixto,

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_i \frac{a_j}{f_{zj}(\delta_{ij})}}{\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{f_{ik}(\delta_{ik})} + k_i} - \sum_{j=1}^n F_j(s_j) x_j$$

s.a.

$$s_j \leq S_j x_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (6.1)$$

$$s_j \geq I_j x_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (6.2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j = r \quad (6.3)$$

$$\sum_{j \in V_i} s_j \leq M_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, z \quad (6.4)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (6.5)$$

donde $k_i = \sum_{k=1}^p \frac{b_k}{f_{ik}(\delta_{ik})}$, con b_k el nivel de atractivo del establecimiento ya existente en el nodo k . La restricción (6.5) impone que las variables x_j sean binarias, de forma que x_j vale 1 si se instala un establecimiento en el nodo j y 0 en caso contrario. Los conjuntos de restricciones (6.1) y (6.2) establecen el rango de variación para la superficie de venta de las m posibles localizaciones. Cuando existe un centro en la localización j , es decir, cuando $x_j = 1$, su superficie de venta s_j debe estar comprendida entre los valores I_j y S_j ya que estas restricciones equivaldrían a $I_j \leq s_j \leq S_j$. En el caso contrario, si $x_j = 0$, s_j tiene que ser nulo ya que para este nodo las restricciones (6.1) y (6.2) serían equivalentes a $0 \leq s_j \leq 0$. La restricción (6.3) impone que el número de nuevos establecimientos a instalar sea r . En (6.4) se plasman los criterios de no saturación impuestos por los CGEC. Según estos criterios, en cada una de las zonas de atracción comercial existe una superficie de venta máxima que puede estar destinada a hipermercados. Por lo tanto, teniendo en cuenta la superficie de venta utilizada por los hipermercados ya existentes en cada zona, existirá una determinada superficie disponible en cada una de estas zonas. Así, si existen z zonas distintas en el mercado, se denota por V_i a los nodos pertenecientes a la zona i y M_i a la superficie disponible para la implantación de hipermercados en esa zona. Por lo tanto, (6.4) impone que para cada una de las zonas de atracción comercial, la suma de la superficie destinada a nuevos hipermercados no supere el máximo M_i permitido en ella.

Obsérvese que la función objetivo está expresada como beneficios (ingresos menos costes). Estos beneficios se obtienen al repartir el poder de compra de cada nodo i (w_i) entre los establecimientos que operan en el mercado. La función

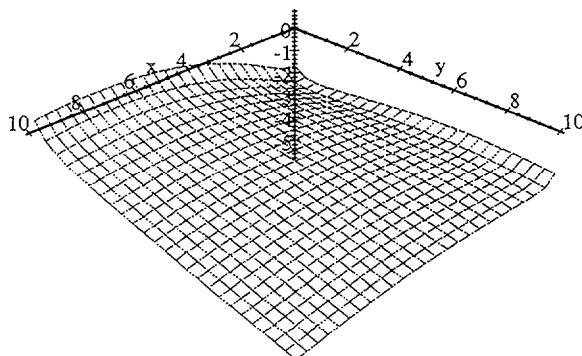


Figura 6.5: Función de beneficios multiextremo

de costes puede depender de la localización, aunque en la aplicación analizada se considera la misma para todas las localizaciones candidatas.

	G1	G2	G3	G4
$f_1(x)$	$1 + 2\sqrt{x}$	$1 + 1.5x^2$	$1 + 1.5x$	$1 + 1.5x^2$
$f_2(x)$	$1 + 1.5\sqrt{x}$	$1 + 0.25x^2$	$1 + x$	$1 + x$
$f_3(x)$	$1 + \sqrt{x}$	$1 + 0.055x^2$	$1 + 0.5x$	$1 + \sqrt{x}$

Tabla 6.10: Grupos de funciones de la distancia utilizados

La resolución de este tipo de programas es muy compleja cuando el número de nodos es elevado ya que habría que combinar un algoritmo de ramificación y acotación para la resolución de programas 0-1, con la resolución de un problema no lineal para determinar los atractivos. Por otro lado, la utilización de algoritmos basados en el gradiente para la resolución de programas no lineales no es aconsejable ya que, dependiendo del tipo de función de costes elegida, la función objetivo puede resultar multiextremo (ver figura 6.5) y el resultado obtenido por este método podría ser un óptimo local. Para resolver este problema se ha combinado el empleo de algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria (greedy (Kuehn y Hamburger, 1963) y de intercambio (Teitz y Bart, 1968)) con un algoritmo de búsqueda global basado en ramificación y acotación.

El problema se ha resuelto utilizando cuatro grupos distintos de funciones de la distancia con el fin de analizar la sensibilidad de la solución a las distintas formas

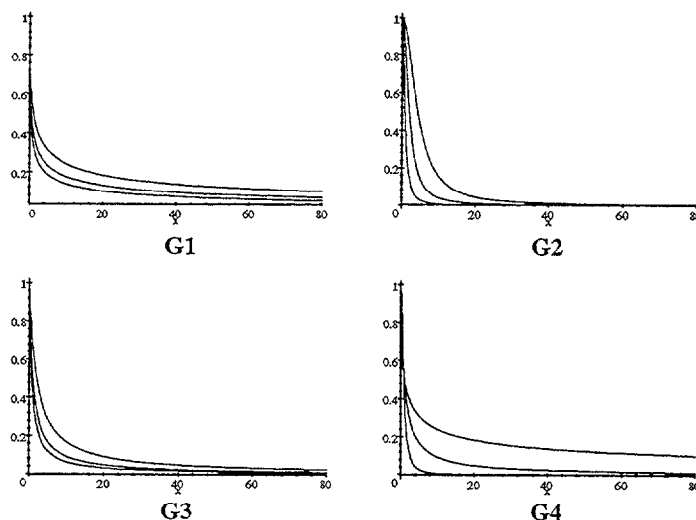


Figura 6.6: Efecto de la distancia en el atractivo del establecimiento

en las que los usuarios perciben la distancia o tiempo de desplazamiento. En la tabla 6.10 se presentan las funciones empleadas y en la figura 6.6 se muestra el efecto que tendría la distancia sobre el atractivo de los establecimientos.

En la tabla 6.11 se muestran los resultados obtenidos para los cuatro grupos tomando como función de costes $F_j(x) = g_1(x), \forall j = 1, 2, \dots, m$. Para resolver los problemas se han empleado dos algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria, el greedy y el algoritmo de intercambio, en combinación con un algoritmo de búsqueda global basado en ramificación y acotación. Este último algoritmo, aunque no es exacto, ofrece soluciones con un error máximo prefijado, siendo en este caso la cota para este error del 0.1 % del valor óptimo del problema. Inicialmente, el algoritmo utilizado es el greedy y, partiendo de la solución obtenida por éste, se aplica el algoritmo de intercambio. Los resultados obtenidos por ambos algoritmos son los mismos en todos los casos estudiados. En la tabla 6.12 se presentan, para cada uno de los grupos de funciones, las mejores localizaciones encontradas, sus niveles de atractivo, que en este caso coincide con la superficie de venta medida en miles de m^2 , y los beneficios obtenidos. Además se muestran los tiempos empleados tanto por el greedy como en el algoritmo de intercambio para los casos en los que se pretende implantar uno, dos o tres nuevos establecimientos. Los tiempos invertidos por los algoritmos en resolver los distintos problemas presentados en este trabajo han sido obtenidos utilizando un ordenador con procesador a 450 Mhz.

Como puede observarse, las soluciones cuando se pretende localizar un único establecimiento ($r = 1$) no son las mismas, siendo las soluciones los nodos 56, 58

y 62. En los tres casos se corresponden con hipermercados y se optaría por la superficie de venta máxima permitida en cada ubicación. Las localizaciones 56 y 58 se encuentran en la misma zona de atracción comercial, correspondiéndose con los nodos ubicados en los municipios de Gáldar y Arucas, respectivamente. En esta zona aún no existe ningún hipermercado, concentrándose la oferta alimentaria en pequeños y medianos supermercados. El nodo 62 se encuentra en la zona central del municipio de Las Palmas de Gran Canaria en la que tan sólo hay actualmente un gran supermercado. Vistos estos resultados, es evidente que las zonas con más expectativas son la Comarca del Noroeste, en la que la oferta no es muy grande, y el municipio de Las Palmas de Gran Canaria, en el que a pesar de la gran oferta existente, la elevada concentración de habitantes parece demandar más establecimientos.

	localizaciones	sup. venta (miles de m^2)	beneficio (mill. ptas.)	tiempo (segs.) Gr / T&B
G1				
r=1	62	5.335	4175.4931	9 / 9
r=2	62, 58	5.335, 7.5	8016.2539	21.7 / 41.1
r=3	62, 58, 68	5.335, 7.5, 3.438	9879.9160	41.3 / 89.6
G2				
r=1	56	7.5	4685.5400	9 / 9
r=2	56, 62	7.5, 5.335	9067.5898	21.6 / 42.0
r=3	56, 62, 66	7.5, 5.335, 3.438	11675.6582	44.5 / 98.6
G3				
r=1	62	5.335	4488.1831	8.9 / 8.9
r=2	62, 58	5.335, 7.5	8166.0674	21.8 / 41.7
r=3	62, 58, 68	5.335, 7.5, 3.438	10335.6904	46.7 / 100.0
G4				
r=1	58	7.5	5605.3305	9 / 9
r=2	58, 62	7.5, 5.335	10664.8457	22.3 / 42.5
r=3	58, 62, 68	7.5, 5.335, 3.438	13125.6787	43.9 / 99.5

Tabla 6.11: Resultados obtenidos para los distintos grupos

Quando se localizan dos nuevos establecimientos ($r = 2$), las alternativas se reducen. En este caso, tan sólo se ofrecen dos pares de localizaciones, (58,62) y (56,62). En ambas situaciones, las soluciones implican ubicar un establecimiento en la Comarca Noroeste (56 ó 58) y otro en el nodo 62. Para el caso de tres nuevos comercios ($r = 3$), la situación es muy similar al caso anterior. Existen dos alternativas que, aunque distintas, mantienen la misma filosofía. Esta consiste en

mantener los dos establecimientos resultantes en el caso anterior y abrir un nuevo hipermercado en la zona sur de la isla. Las soluciones obtenidas son (58,62,68) y (56,62,66). Las dos nuevas localizaciones, 66 y 68, se corresponden con los nodos del municipio de San Bartolomé de Tirajana ubicados en la costa, zona que soporta una elevada carga poblacional como consecuencia de la ocupación turística.

En cuanto a los beneficios obtenidos por los distintos grupos, hay que destacar que, aunque las localizaciones seleccionadas pudieran ser las mismas, los resultados dependen de las funciones de la distancia elegidas. El comportamiento de los grupos G1 y G3 es bastante parecido. Obsérvese que en todos los casos los establecimientos a implantar son hipermercados y que los beneficios obtenidos van a depender de la percepción que tengan los usuarios del tiempo que emplean en el traslado desde su residencia al establecimiento. En estos dos grupos la diferencia entre el efecto percibido por los usuarios de un hipermercado no difiere en gran medida del efecto percibido por los consumidores para pequeños y grandes supermercados. Es por ello, por lo que los hipermercados no están tan favorecidos como en las otras dos situaciones. Según va mejorando el efecto de la distancia en el atractivo de los hipermercados en comparación con los otros dos tipos de establecimientos, los beneficios obtenidos aumentan. Así, por ejemplo, en el caso G4 el efecto de la distancia para los hipermercados es mucho mejor que para el resto de establecimientos, por lo que para este grupo se obtienen los mayores beneficios. De esta forma queda patente que una buena estimación de los beneficios depende en gran medida de las funciones de la distancia consideradas en el estudio.

k	r=1	r=2	r=3
$g_1(x)$			
5	58	58, 62	58, 62, 68
10	58	58, 62	58, 62, 68
20	58	58, 62	58, 62, 68
100	62	62, 58	62, 58, 68
$g_2(x)$			
5	58	58, 62	58, 62, 68
10	62	62, 58	62, 58, 68
20	62	62, 58	62, 58, 68
100	8	8, 9	8, 9, 14

Tabla 6.12: Soluciones obtenidas para distintos niveles de costes para los atractivos

Los tiempos invertidos por el algoritmo greedy para alcanzar la solución en cada uno de los casos aparecen en la última columna de la tabla. Se puede observar como estos tiempos son bastante reducidos incluso cuando se pretende localizar tres

nuevos establecimientos. Los resultados obtenidos por el algoritmo de intercambio han coincidido con los del greedy en todos los casos resueltos.

Para analizar la sensibilidad del problema a las economías de escala y a la variación de los costes para los niveles de atractivo, se han hecho varias simulaciones tomando las funciones de costes g_1 y g_2 . Estas funciones han sido multiplicadas por un factor k que modifica los costes en la función de beneficios. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6.12. En dicha tabla puede observarse como cuando los rendimientos crecientes debido a las economías de escala son mayores, para g_1 , las soluciones obtenidas son iguales en casi todos los casos, aunque aumentaran los costes. Se puede observar como es necesario incrementar los costes utilizando un factor $k = 100$ para que la ubicación del establecimiento cuando $r = 1$ cambie. En los casos correspondientes a dos o tres nuevos establecimientos las soluciones siguen siendo las mismas, incluso si $k = 100$. Sin embargo, si los rendimientos crecientes de escala no son tan significativos, para g_2 , el comportamiento no es tan estable. Para una nueva localización, basta con tomar $k = 10$ para que la localización elegida varíe. Para $r = 2$ y $r = 3$ las soluciones son las mismas que en el caso anterior. Si los costes se incrementan tomando $k = 100$, éstos son tan fuertes que se cambia la tendencia de forma que se eligen pequeños establecimientos con el fin de minimizar las pérdidas.

En definitiva, parece que las soluciones dependen sobre todo de los niveles de coste para los atractivos y que, por lo tanto, sus variaciones, incluyendo el efecto que puede tener en este sentido la existencia o no de economías de escala, pueden llevar asociados cambios en las características y las ubicaciones seleccionadas.

6.4 Conclusiones

En este trabajo se ha tratado un problema de localización competitiva en el que una empresa desea entrar en el mercado de distribución alimentaria de Gran Canaria, implantando uno, dos o tres nuevos establecimientos que han de competir con los ya existentes en la red comercial de la isla. Para ello se ha asumido que el poder de compra del mercado es proporcionalmente repartido entre todos los establecimientos que operan en el mercado atendiendo a las características propias de cada centro, su atractivo, y a la distancia que separa a usuarios y establecimientos. Para determinar el atractivo de un establecimiento se han considerado varios factores tales como, la superficie de venta, la existencia de aparcamientos, su accesibilidad y la existencia de otros servicios colindantes que pudieran favorecer la captación de clientes. En cuanto a la distancia, se han considerado diferentes tipos de funciones, aunque siempre considerando que cuanto mayor es el establecimiento, los clientes están dispuestos a trasladarse desde más lejos.

Este modelo proporciona soluciones sobre las ubicaciones, sus superficies de venta y posibles beneficios que pudieran resultar. En todos los casos, los establecimientos seleccionados son hipermercados. Cuando se quiere implantar

un único establecimiento la zona elegida estaría, dependiendo del tipo de funciones de la distancia utilizado, entre el municipio de Las Palmas de Gran Canaria y la Comarca del Noroeste, más concretamente en los municipios de Gáldar o Arucas. Precisamente, en el momento en el que se realizó este trabajo existía una petición de licencia de un hipermercado de 7500 m² en Gáldar y de otro en Las Palmas de Gran Canaria de 3387 m². Si se pretende establecer dos nuevos establecimientos, en todos los casos estudiados, la opción pasa por implantar un hipermercado en cada una de las dos zonas anteriormente citadas, por lo que se evidencia que estas áreas son las que ofrecerían un mayor volumen de negocio potencial. Si se quisiera implantar un tercer establecimiento, las opciones pasarían por trasladarse a la zona sur de la isla, ya que la gran concentración de establecimientos existente en la zona comprendida entre Las Palmas de Gran Canaria y el municipio de San Bartolomé no favorecería la ubicación de nuevos centros en esta zona. Además, como cabría esperar, las localizaciones que son elegidas en San Bartolomé coinciden con la zona costera donde la afluencia turística es muy elevada durante todo el año.

Evidentemente, la utilidad del modelo está ligada a tres aspectos principales. Por un lado, la elección de los factores que intervienen en la definición del nivel de atractivo de los establecimientos, así como su ponderación para obtener dichos niveles. Por otro lado, el análisis de las funciones que representan la influencia sobre los usuarios de la distancia de desplazamiento hasta los distintos tipos de establecimientos. Evidentemente, el comportamiento de los usuarios ante este aspecto no es generalizable ya que depende de muchas circunstancias tales como el tamaño del municipio, las comunicaciones y sobre todo los hábitos de compra de los usuarios de cada una de las zonas. Todo ello indica la necesidad de llevar a cabo estimaciones de estas funciones basadas en datos muestrales particulares, lo que podría repercutir en una mejora evidente de los resultados obtenidos por el modelo. Existe un tercer aspecto que proporciona un mayor realismo al modelo, y es la utilización de funciones de costes reales para los atractivos.

Por último, cabría señalar que aunque el modelo está diseñado para una situación en la que la nueva empresa no tenía establecimientos en el mercado, se podría resolver perfectamente el problema si se considera que la empresa ya se encuentra establecida con un número determinado de establecimientos (ver extensiones).

Capítulo 7

Conclusiones y extensiones

7.1 Conclusiones

En esta memoria se aborda el problema del $(r|X_p)$ -medianoide propuesto inicialmente por Hakimi en 1983. Una empresa desea entrar a competir en un mercado donde ya existen p centros de servicio pertenecientes a firmas rivales. Se trata por tanto de decidir las localizaciones que maximicen la cuota de mercado captada teniendo en cuenta la competencia existente. Posteriormente, en Hakimi (1990) se generaliza este problema, proponiendo diferentes formas de asignar la demanda (preferencias binarias, parcialmente binarias y proporcionales) que podían ser aplicados a escenarios en los que la demanda pudiera ser elástica o no (servicios esenciales y no esenciales). En todos estos casos, las asignaciones se hacen basándose exclusivamente en criterios relacionados con la distancia que separa a los usuarios de los centros de servicio.

Partiendo de esta base se ha hecho un repaso a las propiedades ya conocidas para estos problemas, ampliándolas en algunos casos. Se ha visto la existencia de solución nodal, bajo ciertas condiciones, para el problema en redes en los casos parcialmente binario y proporcional, para las versiones esencial y no esencial. Aunque la mayor parte de estos resultados se deben a Hakimi (1990) presentamos una demostración que amplía los casos propuestos por este autor en los que se asegura la existencia de este tipo de soluciones en el caso proporcional-no esencial.

También se ha demostrado que en los casos binario-esencial y binario-no esencial, el problema en redes puede ser discretizado. En el caso esencial se puede determinar la localización en la red para un nuevo centro sin más que evaluar un máximo de $2|V||A| + |A|$ candidatos. En el caso no esencial, puede que la solución alcanzada no sea óptima, por lo que se recurriría a una ε -solución. El número máximo de candidatos para cada nuevo centro en este caso es $2|V||A| + |V|$.

Por lo tanto, se puede obtener una solución, o ε -solución, según el caso, para el problema en redes para cada uno de los escenarios “preferencia-servicio”

resolviendo un problema discreto. Por ello se formula una serie de modelos de programación entera con los que se puede resolver estos problemas.

También se ha estudiado la condición submodular de la función que determina la cuota de mercado captada por la empresa entrante. Esta condición había sido apuntada para el caso binario-esencial por Benati y Laporte (1994) y se ha demostrado para todas las combinaciones “preferencias-servicios” analizados en el trabajo. Esta propiedad de la función objetivo, junto con el crecimiento, es utilizada para acotar el error cometido por la solución greedy en la resolución del problema. En particular, en los problemas en los que se pretende localizar dos nuevos centros de servicio, el valor obtenido por el algoritmo GR es como mínimo un 75 % del valor óptimo, mientras que cuando $r = 3$, es un 70.35 %.

El problema del $(r|X_p)$ -medianoide ha sido generalizado al caso en el que las asignaciones de los consumidores dependen de la atracción que experimentan con respecto a los centros de servicio. Además de considerar la distancia que separa usuarios y establecimientos, se considera que cada centro de servicio posee unas características propias que lo diferencia del resto. En este caso, el problema consiste en determinar las localizaciones y las características de los nuevos centros de servicio entrantes en el mercado. Una mejora en las características de un establecimiento supone una inversión, lo que se refleja en la función objetivo como unos costes, considerando por tanto que la empresa entrante ha de maximizar los beneficios obtenidos (ingresos menos costes). Este nuevo problema ha sido analizado en los mismos escenarios que el anterior, llegándose también a la conclusión de que en los casos parcialmente binarios y proporcional existe solución nodal para el problema en redes.

En los casos binarios, aunque no se puede asegurar la solución nodal, se demuestra que cuando los atractivos son dados, se puede encontrar una solución para las nuevas localizaciones evaluando un conjunto finito de posibilidades. En el caso binario-no esencial tan sólo se puede asegurar una ε -solución.

El número máximo de candidatos para localizar un nuevo centro (dado su nivel de atractivo en el caso con atractivo) de servicio en los casos binario-esencial y binario-no esencial, puede ser fácilmente reducido, aunque nuestro esfuerzo se ha centrado en demostrar que los problemas en redes pueden ser discretizados.

Cuando las asignaciones son binarias y el servicio es esencial, dadas las localizaciones, el problema no tiene solución óptima, pudiéndose encontrar una ε -solución sin más que evaluar un máximo de $(|V| + 1)^r$ candidatos.

Para la resolución del $(r|X_p)$ -medianoide discreto, en cada uno de los escenarios estudiados, se formulan programas mixtos.

A la vista del elevado esfuerzo computacional que requiere la resolución de estos programas de optimización propuestos anteriormente, especialmente en el caso mixto, se propone el empleo de algoritmos heurísticos. Para la resolución del problema de localización combinatoria resultante se emplean un algoritmo greedy, un algoritmo de intercambio y uno de búsqueda tabú. Sin embargo, cuando se ha

de elegir los niveles de atractivo para los nuevos centros, también se hace necesaria la resolución de un programa no lineal que, dependiendo de la función de costes, puede ser multiextremo. Ante la evidencia de que los algoritmos basados en el gradiente puede no dar la solución óptima, se presentan varias alternativas para la resolución de este programa, haciendo especial énfasis en un algoritmo de búsqueda global basado en ramificación y acotación. Es por ello, por lo que para resolver el problema del $(\tau|X_p)$ -medianoide discreto con atractivos se ha de combinar el uso de algoritmos de búsqueda combinatoria con un algoritmo de búsqueda global.

En el caso sin atractivo se ha resuelto de forma exhaustiva el problema del $(\tau|X_p)$ -medianoide en diferentes situaciones, variando las redes, el número de vértices, el número de centros de servicio (nuevos y existentes) y la distribución de la demanda, con el fin evaluar el error cometido por los distintos algoritmos heurísticos utilizadas para su resolución. Además, este estudio se ha realizado para todos los escenarios “preferencia-servicio” analizados en este trabajo. En este caso se ha comprobado que la solución obtenida por el algoritmo greedy es razonablemente buena, dándose porcentajes medios de error entre el 0.0018 y el 1.11096 %, mejorando en todos los casos las cotas deducidas de la condición de submodularidad de la función objetivo. Tanto el algoritmo de intercambio como el de Búsqueda Tabú se han probado partiendo de soluciones iniciales aleatorias, aunque sin embargo, los resultados realmente buenos se logran cuando estos algoritmos toman como punto de partida la solución greedy (TB(GR) y TS(GR)). Los porcentajes medios de error para estos algoritmos varían entre el 0 y 0.255 % para el TB(GR) y el 0.00025 y el 0.0541 % para el TS(GR).

En la resolución del $(\tau|X_p)$ -medianoide discreto con atractivo, el esfuerzo computacional es mucho más elevado ya que cuando se aplican los algoritmos heurísticos de búsqueda combinatoria, en cada caso, dadas las localizaciones, se ha de resolver un programa no lineal, generalmente multiextremo. Para resolver este problema, eliminando casos muy particulares, se ha de utilizar un algoritmo de búsqueda global basado en ramificación y acotación. Para la implementación de este algoritmo se ha de acotar la función objetivo, por lo que se presentan tres cotas diferentes que dependen de la forma de las funciones de ingresos y de costes. Entre las cotas probadas, parece que la cota 1, que se basa en el crecimiento de ambas funciones y que puede ser aplicada en todos los escenarios, se muestra como la más indicada. La utilización de este algoritmo parece bastante aceptable en los casos en los que se localizan hasta tres nuevos centros de servicio, aunque presentaría muchos problemas si se aumentara este número. Además, este algoritmo presenta gran dependencia de la forma de la función objetivo, variando sustancialmente los tiempos de resolución según los casos, más incluso que con aumentos en el número de nodos de la red.

Al igual que para el caso sin atractivo, se han realizado pruebas en todos los escenarios “preferencia-servicio” analizados variando las redes, el número de vértices, el número de centros de servicio, nuevos y existentes, y la distribución de la demanda de los nodos. Como para resolver el problema del $(\tau|X_p)$ -medianoide

discreto con atractivo de forma exhaustiva se requiere de mucho esfuerzo, se decidió comparar las soluciones encontradas por los distintos algoritmos heurísticos. Así, se obtuvo la solución greedy y partiendo de ésta, se ejecutaron los algoritmos de intercambio y de búsqueda tabú. Al igual que en el caso sin atractivos, la solución greedy es razonablemente buena y las mejoras conseguidas por los otros algoritmos no son significativas. En particular, el algoritmo TB(GR) consigue porcentajes medios de mejora con respecto a la solución greedy que varían entre el 0.0254 y el 1.1757 %, mientras que los conseguidos por el TS(GR) se mueven entre el 0.008 y el 1.779 %. Si se le supone una efectividad al TB(GR) y al TS(GR) similar a la obtenida por estos algoritmos en el caso sin atractivos, se puede concluir incluso que el algoritmo GR se comporta bastante bien. En las dos situaciones, con y sin atractivo, los mayores errores se producen en el caso binario-esencial, mientras que los menores se dan en el proporcional-no esencial. Por otro lado, el porcentaje de error cometido cuando el servicio es esencial es mayor que el cometido en los servicios no esenciales.

Por último, se presenta una aplicación del problema del $(r|X_p)$ -medianoide discreto con atractivo en el sector minorista de distribución alimentaria en Canarias. Con ello se muestra que este tipo de modelos pueden ser una herramienta para la planificación de una adecuada política de localización en un determinado mercado. En este caso, el servicio prestado es esencial y se considera que los usuarios reparten su poder de compra de forma proporcional a la atracción que experimentan con respecto a los establecimientos que operan en el mercado. El modelo ha sido adaptado a las condiciones impuestas por la Ley de Comercio de Canarias de 1994 en la que se regulan ciertos aspectos sobre la implantación de hipermercados.

7.2 Extensiones

Son varias las direcciones en las que se podría extender este trabajo. A continuación se presentan dos de las líneas más avanzadas en relación con las asignaciones proporcionales.

7.2.1 Ampliación del número de centros de servicio operando en el mercado en el caso proporcional

Considérese un mercado en el que existen varias empresas compitiendo y que una de ellas desea incrementar el número de establecimientos con lo que opera. Esta empresa trata de determinar las localizaciones y los niveles de atractivo para los nuevos centros de servicio de forma que se maximicen sus beneficios los beneficios obtenidos por la totalidad de sus centros de servicio.

Para abordar este nuevo caso se definen los siguientes conjuntos:

- $Y_r = \{x_1, \dots, x_r\} \equiv$ localizaciones para los nuevos centros de servicio.

- $A_{Y_r} = \{a_1, \dots, a_r\} \equiv$ atractivos para los nuevos centros de servicio.
- $Z_s = \{x_{r+1}, \dots, x_{r+s}\} \equiv$ localizaciones existentes de la empresa entrante.
- $A_{Z_s} = \{a_{r+1}, \dots, a_{r+s}\} \equiv$ atractivos para los centros existentes de la empresa entrante.
- $X_p = \{x_{r+s+1}, \dots, x_{r+s+p}\} \equiv$ localizaciones existentes de la empresa rival.
- $A_{X_p} = \{a_{r+s+1}, \dots, a_{r+s+p}\} \equiv$ atractivos para los centros rivales existentes.
- $X_{r+s+p} = \{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s}, x_{r+s+1}, \dots, x_{r+s+p}\} \equiv$ todas las localizaciones.
- $A_{r+s+p} = \{a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_{r+s}, a_{r+s+1}, \dots, a_{r+s+p}\} \equiv$ todos los atractivos.

Este problema se puede plantear como

$$\begin{aligned} \max_{s.a.} \quad & W(Y_r, A_{Y_r} | Z_s, A_{Z_s}, X_p, A_{X_p}) \\ & a_j \in [I, S] \quad \forall j = 1, \dots, r \\ & Y_r \subset N \end{aligned}$$

donde $W(Y_r, A_{Y_r} | Z_s, A_{Z_s}, X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in V} \sum_{x_j \in \bar{Y}_r \cup Z_s} w_j(v) - \sum_{x_j \in \bar{Y}_r \cup Z_s} F(a_j)$.

Siguiendo la línea del capítulo 2 se puede demostrar que este problema, tanto para servicios esenciales como no esenciales, tiene solución nodal por lo que podría obtenerse una solución resolviendo un programa discreto.

7.2.2 Proporcional con umbral

Considérese un mercado en el que los usuarios de cada nodo v no están dispuestos a asignar su demanda a aquellos centros de servicio para los que no perciban una atracción mínima b_v . Entre todos aquellos centros que alcanzan ese mínimo, la demanda es repartida proporcionalmente con respecto al atractivo percibido de cada uno de ellos.

Así, la demanda de v será repartida entre los centros de servicio pertenecientes al conjunto $U_v(A_X) = \left\{ x_j \in X : \frac{a_j}{f_{vj}} \geq b_v, a_j \in A_X \right\}$. El conjunto

$$U_{A_X}^{-1}(X) = \{v \in V : \exists x \in X \text{ con } x \in U_v(A_X)\}$$

está formado por los nodos que son servidos por algún centro de servicio perteneciente al conjunto X .

La función de beneficios, cuando el servicio es esencial, viene dada por

$$W(Y_r, A_{Y_r} | X_p, A_{X_p}) = \sum_{v \in U_{A_{Y_r}}^{-1}(Y_r)} w(v) \frac{\sum_{x_j \in U_v(A_{Y_r})} \frac{a_j}{f_{vj}}}{\sum_{x_j \in U_v(A_{p+r})} \frac{a_j}{f_{vj}}} - \sum_{a_j \in A_{Y_r}} F(a_j).$$

En este caso, tanto para servicios esenciales como no esenciales, la función objetivo no es continua y no se puede demostrar la existencia de solución nodal para el problema en red. Sin embargo, se puede determinar un conjunto finito de posibilidades para los nuevos centros de servicio, cuando sus niveles de atractivo son conocidos.

Otras de las líneas en las que puede continuar este trabajo son:

- También sería de interés ampliar los estudios al caso en el que la firma entrante ya estuviera implantada previamente en el mercado (ver la sección 7.2.1). Un punto importante a analizar en este punto es la existencia del llamado “canibalismo”, es decir la pérdida de mercado de los establecimientos de la empresa entrante ya instalados por los centros de nueva implantación. También sería interesante incorporar r como una variable de decisión y determinar el número de nuevos centros de servicio con los que se maximizan los beneficios.
- Siguiendo la línea de lo propuesto en 7.2.2, sería interesante buscar otros criterios para asignar la demanda de los usuarios de tal forma que los modelos sean cada vez más realistas y se adapten más a cada situación.
- En cuanto a la resolución de los programan no lineales multiextremo que suelen presentarse cuando se pretende obtener los niveles óptimos de atractivo, dadas las localizaciones, sería de gran interés depurar el algoritmo con el fin de resolver el problema con mayor número de variables. Se podría intentar encontrar cotas más finas para la función objetivo o bien intentarlo utilizando algún otro método de optimización global.
- También se puede plantear si existe algún otro algoritmo, o variante de los utilizados, de localización combinatoria que alcancen mejores resultados, aunque los resultados obtenidos son muy buenos en comparación con el número pares o tríos de localizaciones evaluados.
- Uno de los puntos más interesantes a extender es el aspecto práctico del problema. En la aplicación presentada en la memoria se utilizan funciones que penalizan la distancia elegidas de forma intuitiva. Es evidente que una inferencia de esta función basada en un proceso de encuestación daría una mayor fiabilidad a los resultados obtenidos por el modelo. También sería interesante obtener información sobre la percepción que tienen los usuarios con respecto a las características de los centros de servicio y así poder determinar los valores apropiados para sus atractivos.



Bibliografía

- [1] Achabal, D.D., W.L. Gorr y V. Mahajan (1982): "MULTILOC: A multiple store location decision model," *Journal of Retailing*, vol. 58, n° 2, págs. 5-25.
- [2] Andaluz Funcia, J. (1995): "Competencia en localización y precios: Influencia de los costes de transporte," *Cuadernos Aragoneses de Economía* (2ª época), vol. 5, n° 2, págs. 343-358.
- [3] Bauer, A., W. Domschke y E. Pesch (1993): "Competitive location on a network," *European Journal of Operational Reserach*, n° 66, págs. 372-391.
- [4] Bazaraa, M.S, H.D. Sherali y C.M. Shetty (1993): *Nonlinear programming: Theory and algorithms*, 2ª edición, John Wiley & Sons, Nueva York.
- [5] Benati, S. (1999): "The maximum capture problem with heterogeneous customers," *Computers & Operations Research*, n° 26, págs. 1351-1367.
- [6] Benati, S. y G. Laporte (1994): "Tabu Search algorithms for the $(r|X_p)$ -medianoid and $(r|p)$ -centroid problems," *Location Science*, vol. 2, n° 4, págs. 193-204.
- [7] Berge, C. (1991): *Graphs*, 3ª edición, North-Holland, Amsterdam.
- [8] B.O.C. (1994): "Decreto 219/1994, de 28 de octubre," n° 140, de 16 de noviembre.
- [9] B.O.C. (1994): "Ley 4/1994, de 25 de abril, de Ordenación de la Actividad Comercial de Canarias," n° 53, de 29 de abril.
- [10] B.O.C. (1998): "Decreto 237/1998, de 18 de diciembre," n° 162, de 28 de diciembre.
- [11] B.O.E. (1996): "Ley 7/1996, de 15 de enero, de Ordenación del Comercio Minorista," n° 15, de 17 de enero.
- [12] B.O.E. (1996): "Ley Orgánica 2/1996, de 15 de enero, complementaria de la Ley de Ordenación del Comercio Minorista," n° 15, de 17 de enero.

- [13] Borrás Rocher, F. (2000): "Nuevos modelos probabilísticos de localización de servicios de emergencias," tesis doctoral, Univ. Miguel Hernández, Elche.
- [14] Brandeau, M.L., S.S. Chiu, S. Kumar y T.A. Grossman (1995): "Location with market externalities," en Z. Drezner (editor), *Facility location: A survey of applications and methods*, Springer, Berlín, págs. 121-150.
- [15] Casares Ripol, J y A. Rebollo Arévalo (1996): *Distribución Comercial*, Biblioteca Cívitas Economía y Empresa, Editorial Cívitas, Madrid.
- [16] Chen, P., P. Hansen, B. Jaumard y H. Tuy (1998): "Solution of the multisource Weber and conditional Weber problems by d.-c. programming," *Operations Research*, vol. 46, n° 4, págs. 548-562.
- [17] Chiang, A.C. (1987): *Métodos fundamentales de economía matemática*, 3ª edición, McGraw-Hill, Madrid.
- [18] Church, R y C. ReVelle (1974): "The Maximal Covering Location Problem," *Papers of the Regional Science Association*, n° 32, págs. 101-118.
- [19] Colomé, R. y D. Serra (2000): "Supermarket key attributes an location decisions: A comparative study between British and Spanish consumer," documento de trabajo de la Universidad Pompeu Fabra, Barcelona.
- [20] Converse, P.D. (1949): "New law of retail gravitation," *Journal of Marketing*, n° 14, págs. 379-389.
- [21] Craig, S., A. Ghosh y S. McLafferty (1984): "Models of the retail location process: a review," *Journal of Retailing*, vol. 60, n° 1, págs. 5-36.
- [22] Daskin, M.S. (1995): *Network and discrete location: models, algorithms, and applications*, Wiley-Interscience, Nueva York.
- [23] Diestel, R. (1997): *Graph Theory*, Springer-Verlag, Nueva York.
- [24] Dobson G. y U.S. Karmarkar (1987): "Competitive location on a network," *Operations Research*, vol. 35, n° 4, págs. 565-574.
- [25] Dorta González, P., D.R. Santos Peñate y R. Suárez Vega (1997): "Facility location according to legal conditions. An application to the Canary Islands retail trade," *Studies in Locational Analysis*, vol. 11, págs. 177-192.
- [26] Dorta González, P., D.R. Santos Peñate y R. Suárez Vega (1998): "A Stackelberg model in spatial competition with externalities," X EURO Working Group on Locational Analysis, febrero, Murcia.
- [27] Drezner, T. (1994a): "Locating a single new facility among existing unequally attractive facilities," *Journal of Regional Science*, vol. 34, n° 2, págs. 237-252.

- [28] Drezner, T. (1994b): "Optimal continuous location of a retail facility, facility attractiveness, and market share: an interactive model," *Journal of Retailing*, vol. 70, n° 1, págs. 49-64.
- [29] Drezner, T. (1995): "Competitive facility location in the plane," en Z. Drezner (editor), *Facility location: A survey of applications and methods*, Springer, Berlín, págs. 285-300.
- [30] Drezner, T. y Z. Drezner (1996): "Competitive facilities: Market share and location with random utility," *Journal of Regional Science*, vol. 36, n° 1, págs. 1-15.
- [31] Drezner, T., Z. Drezner y S. Salhi (2000): "Location of multiple retail facilities in a continuous space," *European Journal of Operational Research*, por aparecer.
- [32] Drezner, Z. (1982): "Competitive location strategies for two facilities," *Regional Science and Urban Economics*, n° 12, págs. 485-493.
- [33] Drezner, Z. (1995): *Facility location: A survey of applications and methods*, Springer, Berlín.
- [34] Drezner, Z., G.O. Wesolowsky y T. Drezner (1998): "On the logit approach to competitive facility location," *Journal of Regional Science*, vol. 38, págs. 313-327.
- [35] Eaton B.C. (1972): "Spatial competition revisited," *Canadian Journal of Economics*, vol. 5, págs. 268-278.
- [36] Eiselt, H.A. (1998): "Perception and information in a competitive location model," *European Journal of Operational Research*, vol. 108, págs. 94-105.
- [37] Eiselt, H.A. y G. Laporte (1988a): "Location of a new facility in the presence of weights," *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, vol. 5, págs. 160-165.
- [38] Eiselt, H.A. y G. Laporte (1988b): "Trading areas of facilities with different sizes," *Recherche Opérationnelle/Operations Research*, vol. 22, n° 1, págs. 33-44.
- [39] Eiselt, H.A. y G. Laporte (1989a): "Competitive spatial models," *European Journal of Operational Research*, vol. 39, págs. 231-242.
- [40] Eiselt, H.A. y G. Laporte (1989b): "The Maximum Capture Problem in a weighted network," *Journal of Regional Science*, vol. 29, n° 3, págs. 433-439.
- [41] Eiselt, H.A. y G. Laporte (1996a): "Sequential location problems," *European Journal of Operational Research*, vol. 96, págs. 217-231.

- [42] Eiselt, H.A. y G. Laporte (1996b): "Equilibrium results in competitive location models," *Middle East Forum*, vol. 1, págs. 63-92.
- [43] Eisel, H.A., G. Laporte y G. Pederzoli (1989): "Optimal sizes of facilities on a linear market," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, n° 1, págs. 97-103.
- [44] Eiselt, H.A., G. Laporte y J.F. Thisse (1993): "Competitive location models: a framework and bibliography," *Transportacion Science*, vol. 27, n° 1, págs. 44-54.
- [45] Feo, T. y M. Resende (1989): "A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem," *Operations Research Letters*, vol. 8, págs. 433-439.
- [46] Friesz, T.L., T. Miller y R.L. Tobin (1988): "Competitive network facility location models: a survey," *Papers of the Regional Science Association*, vol. 65, págs. 47-57.
- [47] Gannon, C.A. (1973): "Optimization of market share in spatial competition," *Southern Economic Journal*, vol. 40, págs. 66-79.
- [48] García Falcón, J.M. y M. Rodríguez Díaz (1995): "Implicaciones del desarrollo de centros comerciales e hipermercados," *Papeles de Economía Española*, n° 15, págs. 222-229.
- [49] García Pérez, M.D. y B. Pelegrín Pelegrín (1997): "Two-stage competitive location on a tree," *Studies in Locational Analysis*, vol. 11, págs. 101-114.
- [50] Ghosh, A. y C.S. Craig (1983): "Formulating retail location strategy in a changing environment," *Journal of Marketing*, vol. 47, págs. 56-68.
- [51] Ghosh, A. y C.S. Craig (1984): "A location allocation model for facility planning in a competitive environment," *Geographical Analysis*, vol. 16, n° 1, págs. 39-51.
- [52] Ghosh, A. y F. Harche (1993): "Location-allocation models in the private sector: progress, problems, and prospects," *Location Science*, vol. 1, n° 1, págs. 81-106.
- [53] Ghosh, A. y S.L. McLafferty (1982): "Locating stores in uncertain environments: A scenario planning approach," *Journal of Retailing*, vol. 58, n° 4, págs. 5-22.
- [54] Glover, F. (1996): "Búsqueda Tabú," en A. Díaz (coordinador), *Optimización heurística y redes neuronales en dirección de operaciones e ingeniería*, Editorial Paraninfo, Madrid, págs. 105-142.

- [55] Glover, F. y M. Laguna (1993): "Tabu Search," en C. Reeves (editor), *Modern heuristic techniques for combinatorial problems*, Blackwell Scientific Publishing, Oxford, págs. 70-150.
- [56] Glover, F. y M. Laguna (1997): *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.
- [57] Goodchild, M.F. (1984): "ILACS: A location-allocation model for retail site selection," *Journal of Retailing*, vol. 60, n° 1, págs. 84-100.
- [58] Hakimi, S.L. (1964): "Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph," *Operations Research*, vol. 12, págs. 450-459.
- [59] Hakimi, S.L. (1983): "On locating new facilities in a competitive environment," *European Journal of Operational Research*, vol. 12, págs. 29-35.
- [60] Hakimi, S.L. (1990): "Location with spatial interactions: Competitive locations and games," en Mirchandani, P.B. y R.L. Francis (editores), *Discrete Location Theory*, John Wiley & Sons, Nueva York, págs. 439-478.
- [61] Hansen, P. y M. Labbé (1988): "Algorithms for voting and competitive location on a network," *Transportation Science*, vol. 22, n° 4, págs. 278-288.
- [62] Hansen, P., D. Peeters, D. Richard y J.F. Thisse (1985): "The Minisum and Minimax Location Problems revisited," *Operations Research*, vol. 33, n° 6, págs. 1251-1265.
- [63] Hansen, P., D. Peeters y J.F. Thisse (1995): "The Profit-Maximizing Weber Problem," *Location Science*, vol. 3, n° 2, págs. 67-85.
- [64] Hansen, P., D. Peeters y J.F. Thisse (1997): "Facility location under zone pricing," *Journal of Regional Science*, vol. 37, n° 1, págs. 1-22.
- [65] Hodgson, M.J. (1981): "A location-allocation model maximizing consumer's welfare," *Regional Studies*, vol. 15, n° 6, págs. 493 - 506.
- [66] Horst, R. y H. Tuy (1993): *Global optimization, deterministic approaches*, (2ª edición), Springer, Berlín.
- [67] Hotelling, H. (1929): "Stability in competition," *Economic Journal*, vol. 39, págs. 41-57.
- [68] Huff, D.L. (1964): "Defining and estimating a trading area," *Journal of Marketing*, vol. 28, págs. 34-38.
- [69] Huff, D.L. (1966): "A programmed solution for approximating an optimum retail location," *Land Economics*, vol. 42, págs. 293-303.

- [70] Infante Macías, R. y J. Muñoz Pérez (1995): "Competitive location with rectilinear distances," *European Journal of Operational Research*, vol. 80, págs. 77-85.
- [71] Instituto Canario de Estadística (1996): "Encuesta de Población de Canarias 1996," Gobierno de Canarias, Las Palmas.
- [72] Instituto Canario de Estadística (1997): "Anuario estadístico de Canarias, 1997," Gobierno de Canarias, Las Palmas.
- [73] Instituto Nacional de Estadística (1998): "Cifras de población referidas al 1/1/98," Servidor web del INE: www.ine.es.
- [74] Instituto Nacional de Estadística (1998): "Encuesta de presupuestos familiares," Servidor web del INE: www.ine.es.
- [75] Karkazis, J. (1989): "Facilities location in a competitive environment: A promethee based multiple criteria analysis," *European Journal of Operational Research*, vol. 42, págs. 294-304.
- [76] Kaufman, P.J. y V. K. Rangan (1990): "A model for managing system conflict during franchise expansion," *Journal of Retailing*, vol. 66, n° 2, págs. 155-173.
- [77] Kuehn, A.A. y M.J. Hamburger (1963): "A heuristic program for locating warehouses," *Management Science*, vol. 9, n° 4, págs. 643-666.
- [78] Labbé, M. y S.L. Hakimi (1991): "Market and location equilibrium for two competitors," *Operations Research*, 39, págs. 749-756.
- [79] Labbé, M., D. Peeters y J.F. Thisse (1995): "Location on networks," en *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 8: Network Routing, págs. 551-624.
- [80] Levy, J. (1972): "An extended theorem for location on a network," *Operations Research Quarterly*, vol. 18, n° 4, págs. 433-442.
- [81] Megiddo, N. y K.J. Supowit (1984): "On the complexity of some common geometric location problems," *SIAM Journal of Computing*, vol. 13, n° 1, págs. 182-196.
- [82] Megiddo, N., E. Zemel y S.L. Hakimi (1983): "The Maximum Coverage Location Problem," *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, vol. 4, págs. 253-261.
- [83] Miquel Peris, S., F. Parra Guerrero, Ch. L'hermie y M.J. Miquel Romero (1996): *Distribución comercial*, Colección Universidad, ESIC Ed., Madrid.

- [84] Mirchandani, P.B. y R.L. Francis (1990): *Discrete Location Theory*, John Wiley & Sons, Nueva York.
- [85] Montero Muradas, I. (1998): "El comercio minorista en Canarias," *Colección Investigación Empresarial*, 2, Fundación Formación y Desarrollo Empresaria FYDE.
- [86] Moreno Pérez, J.A. (1995): "El Problema de Localización Discreto," documento de trabajo de la Univ. de La Laguna.
- [87] Moreno Pérez, J.A. (1996): "Heurísticas de búsqueda para problemas discretos de localización-asignación," en J. Puerto Albandoz (editor), *Lecturas en Teoría de Localización*, Secretariado de Publicaciones de la Univ. de Sevilla, págs. 107-134.
- [88] Nakanishi, M. y L.G. Cooper (1974): "Parameter estimation for a Multiplicative Competitive Interaction Model-Least Squares approach," *Journal of Marketing Research*, vol. 11, págs. 303-311.
- [89] Nakanishi, M. y L.G. Cooper (1982): "Simplified estimation procedures for MCI models," *Marketing Science*, vol. 1, n° 3, págs. 314-322.
- [90] Nemhauser, G.L. y L.A. Wolsey (1978): "Best algorithms for approximating the maximum of a submodular set function," *Mathematics of Operations Research*, vol. 3, n° 3, págs. 177-188.
- [91] Peeters, D. y J.F. Thisse (1995): "Economic models of firm locations," en Z. Drezner, (editor), *Facility location: a survey of applications and methods*, Springer, Berlín, págs. 331-366.
- [92] Peeters, P. (1997): "Static competitive location models on networks," documento de trabajo de la Vrije Universiteit, Bruselas.
- [93] Peeters, P.H. y F. Plastria (1998): "Discretization results for the Huff and Pareto-Huff competitive location models on networks," *Top*, vol. 6, n° 2, págs. 247-260.
- [94] Plastria, F. (1992): "GBSSS: The Generalized Big Square Small Square method for planar single-facility location," *European Journal of Operational Research*, vol. 62, págs. 163-174.
- [95] Plastria, F. (1996): "Profit maximising location in the plane of a single competitive facility with deterministic gravity-type consumer behaviour," documento de trabajo BEIF/93, Vrije Universiteit, Bruselas.
- [96] Plastria, F. (1997): "Profit maximising single competitive facility location in the plane," *Studies in Locational Analysis*, vol. 11, págs. 115-126.

- [97] Plastria, F. (2001): "Static competitive facility location: An overview of optimization approaches," *European Journal of Operational Research*, vol. 129, págs. 461-470.
- [98] ReVelle, C. (1986): "The Maximum Capture or "Sphere of Influence" Location Problem: Hotelling revisited on a network," *Journal of Regional Science*, vol. 26, n°2, págs. 343-358.
- [99] ReVelle, C., D. Marks y J.C. Liebman (1970): "An analysis of private and public sector location models," *Management Science*, vol. 16, n° 11, págs. 692-707.
- [100] Rodríguez Díaz, M. (1998): "El comercio en Gran Canaria ante las nuevas tendencias en la distribución comercial," Jornadas sobre Innovación y Cooperación como Factores de Cambio en el Sector Comercio, Las Palmas.
- [101] Santos Peñate, D.R., P. Dorta González y R. Suárez Vega (1996): "Spatial configuration of shopping centers in the Canary Islands," 9th EURO Working Group on Locational Analysis, septiembre, Birmingham.
- [102] Santos Peñate, D.R., P. Dorta González y R. Suárez Vega (2000): "Modelo de competencia espacial incorporando externalidades," *Investigación Operacional*, vol. 21, n° 1, págs. 61-74.
- [103] Santos Peñate, D.R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1997): "Localización competitiva con criterios basados en funciones de atracción," XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, marzo, Valencia.
- [104] Santos Peñate, D.R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1998a): "Análisis del equilibrio localización-atractivo para el modelo de Huff," XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, octubre, Almería.
- [105] Santos Peñate, D.R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1998b): "Attraction criteria in competitive location problems," X EURO Working Group on Locational Analysis, febrero, Murcia.
- [106] Santos Peñate, D.R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1998c): "Localización competitiva aplicando los modelos de Huff and Pareto-Huff," XII Reunión anual Asepelt-España, junio, Córdoba.
- [107] Santos Peñate, D.R., R. Suárez Vega y P. Dorta González, P. (1999a): "Equilibrio localización-atractivo para dos competidores con cadenas de centros de servicio igualmente atractivos," *Estudios de Economía Aplicada*, n° 12, págs. 145-164.
- [108] Santos Peñate, D.R., R. Suárez Vega y P. Dorta González (1999b): "Localización competitiva con criterios basados en funciones de atracción," *Investigación Operacional*, vol. 20, n° 3, págs. 213-225.

- [109] Schildt, H. (1997): *C: Manual de referencia*, McGraw Hill (3ª edición), Madrid.
- [110] Serra, D. (1989): The pq-median problem: location and districting of hierarchical facilities, PhD thesis, Department of Geography and Environmental, John Hopkins University.
- [111] Serra, D. (1996): "Estrategias de localización de servicios en régimen de competencia," en J. Puerto Albandoz (editor), *Lecturas en Teoría de Localización*, Secretariado de Publicaciones de la Univ. de Sevilla, págs. 297-216.
- [112] Serra, D. y R. Colomé (2001): "Consumer choice and optimal locations models: formulations and heuristics," *Paper in Regional Science*, vol. 8, nº 4, págs. 439-464.
- [113] Serra, D., H.A. Eisel, G. Laporte y C. ReVelle (2000): "Market capture models under various customer choice rules," *Environment and Planning B*, vol. 26, nº 5, págs. 141-150.
- [114] Serra, D., V. Marianov y C. ReVelle (1992): "The maximum-capture hierarchical location problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 62, págs. 363-371.
- [115] Serra, D. y C. ReVelle (1994): "Market capture by two competitors: the preemptive location problem," *Journal of Regional Science*, vol. 34, págs. 549-561.
- [116] Serra, D. y C. ReVelle (1995): "Competitive location in discrete space," en Z. Drezner (editor), *Facility location: A survey of applications and methods*, Springer, Berlín, págs. 367-386.
- [117] Serra, D., ReVelle, C. y Rosing, K. (1999): "Surviving in a competitive spatial market: The Threshold Capture Model," *Journal of Regional Science*, vol. 39, nº 4, págs. 637-652.
- [118] Smithies A. (1941): "Optimum location in spatial competition," *Journal of Political Economics*, vol. 49, págs. 423-439.
- [119] Suárez Vega, R., P. Dorta González y D.R. Santos Peñate (1998): "Externality in a Stackelberg spatial competition model," *Studies in Locational Analysis*, vol. 14, págs. 191-209.
- [120] Suárez Vega, R., P. Dorta González y D.R. Santos Peñate (1999): "Competencia espacial con externalidades considerando decisiones individuales de los usuarios," *Estudios de Economía Aplicada*, nº 13, págs. 143-165.

- [121] Suárez Vega, R., D.R. Santos Peñate y P. Dorta González (1996): "Un modelo de localización de grandes superficies comerciales en la Comunidad Autónoma de Canarias," X Reunión anual Asepelt-España, junio, Albacete.
- [122] Suárez Vega, R., D.R. Santos Peñate y P. Dorta González (1997): "Spatial competition with attraction functions," EURO/INFORMS-97, julio, Barcelona.
- [123] Suárez Vega, R., D.R. Santos Peñate y P. Dorta González (1999): "Proportional customers' preferences for a nonessential demand competitive location problem," VIIIth International Symposium on Locational Decisions, junio, Coimbra-Estoril.
- [124] Suárez Vega, R., D.R. Santos Peñate y P. Dorta González (2000): "Localización competitiva para servicios esenciales con asignaciones proporcionales. Una aplicación a la distribución comercial alimentaria en Canarias," X Congreso Latino Iberoamericano de investigación de Operaciones, septiembre, Ciudad de México.
- [125] Suárez Vega, R., D.R. Santos Peñate y P. Dorta González (2001): "Implantación de nuevos centros de distribución alimentaria en Gran Canaria," *Revista Asturiana de Economía*, nº 20, págs. 157-182.
- [126] Teitz, M.B. y P. Bart (1968): "Heuristic methods for estimating the Generalized Vertex Median of a weighted graph," *Operation Research*, vol. 16, págs. 955-961.
- [127] Wendell, R.E. y R.D. McKelvey (1981): "New perspectives in competitive location theory," *European Journal of Operational Research*, vol. 6, págs. 174-182.
- [128] Wong, S.C. y H. Yang (1999): "Determining market areas captured by competitive facilities: A continuous equilibrium modeling approach," *Journal of Regional Science*, vol. 39, nº 1, 51-72.

Anexo 1

En las siguientes tablas se muestra la distribución de los errores cometidos por los distintos algoritmos de búsqueda combinatoria según los escenarios para el caso sin atractivos.

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	3
(1,3,0)	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	6
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	5
(2,3,0)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	4
(3,2,0)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	4
(3,3,0)	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	5
(1,2,1)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
(1,3,1)	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	4
(2,2,1)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
(2,3,1)	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	3
(3,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(3,3,1)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
(2,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	3
(3,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
fallos 2	0	0	0	0	0	2	3	0	4	2	3	4	3	21
fallos 3	0	0	0	1	1	2	4	2	4	0	5	9	1	29
fallos	0	0	0	1	1	4	7	2	8	2	8	13	4	50

Tabla 1: Errores cometidos por el GR. Binario-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	2
(1,3,0)	0	7	0	0	0	1	0	0	0	0	5	0	0	12
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,0)	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5
(3,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	9
(3,3,0)	0	0	0	0	8	0	8	0	0	0	8	0	0	24
(1,2,1)	0	0	0	0	0	0	10	0	8	0	15	0	0	33
(1,3,1)	0	0	0	0	0	5	7	0	0	0	18	0	0	30
(2,2,1)	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	6
(2,3,1)	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3
(3,2,1)	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	0	5
(3,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	6
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	8
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	0	12
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
(3,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5
fallos 2	0	0	0	0	0	6	13	0	8	0	34	4	0	65
fallos 3	0	7	0	0	13	8	15	0	0	0	43	16	0	102
fallos	0	7	0	0	13	14	28	0	8	0	77	20	0	167

Tabla 2: Errores cometidos por el TB. Binario-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	2	3	3	1	7	15	0	4	5	4	9	0	8	61
(1,3,0)	0	11	4	1	16	13	4	13	2	3	11	0	15	93
(2,2,0)	0	3	0	0	12	3	0	2	3	2	13	0	12	50
(2,3,0)	0	13	6	3	12	4	8	12	1	2	7	4	13	85
(3,2,0)	0	0	3	0	11	2	0	0	4	1	12	0	6	39
(3,3,0)	5	7	6	5	11	6	12	1	4	1	12	8	13	91
(1,2,1)	5	0	3	2	11	7	11	0	11	4	3	0	2	69
(1,3,1)	2	3	6	0	13	12	16	10	15	5	12	1	14	109
(2,2,1)	2	0	0	7	10	8	8		11	2	0	0	11	59
(2,3,1)	0	1	1	2	12	6	14	11	6	5	3	7	10	78
(3,2,1)	1	0	3	0	13	6	8	0	4	1	12	3	13	64
(3,3,1)	0	4	2	16	15	2	7	9	14	10	13	11	14	117
(1,2,2)	2	11	9	3	3	6	10	15	3	17	12	0	14	98
(1,3,2)	11	12	16	18	15	13	16	14	17	15	14	9	18	188
(2,2,2)	3	8	15	12	4	3	14	15	2	13	0	0	17	106
(2,3,2)	13	13	11	14	15	17	15	16	17	16	5	7	18	177
(3,2,2)	4	7	15	9	2	4	11	14	7	13	13	1	15	115
(3,3,2)	19	12	18	5	19	17	12	15	8	17	4	13	18	177
fallos 2	19	25	51	34	73	54	62	50	50	57	74	4	108	661
fallos 3	50	76	70	64	128	90	104	101	84	74	81	60	133	1115
fallos	69	101	121	98	201	144	106	151	134	131	155	64	241	1776

Tabla 3: Errores cometidos por el TS. Binario-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	6
(1,3,0)	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	5
(2,2,0)	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	5
(2,3,0)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6
(3,2,0)	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	5
(3,3,0)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6
(1,2,1)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	6
(1,3,1)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6
(2,2,1)	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	5
(2,3,1)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6
(3,2,1)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	4
(3,3,1)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	3
(1,3,2)	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	10
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	3
(2,3,2)	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	8
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	3
(3,3,2)	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	9
fallos 2	0	0	0	0	6	0	2	0	8	0	6	9	9	40
fallos 3	3	5	4	0	6	0	8	3	3	3	9	9	9	62
fallos	3	5	4	0	12	0	10	3	11	3	15	18	18	102

Tabla 4: Errores cometidos por el GR. Parcialmente binario-esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	15	20
(1,3,0)	3	5	5	0	0	0	9	0	0	0	10	0	2	34
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	5
(2,3,0)	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	11
(3,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	5
(3,3,0)	0	10	0	0	0	0	15	0	0	0	5	0	0	30
(1,2,1)	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	3	15	7	36
(1,3,1)	0	5	5	0	0	0	9	0	0	0	6	0	0	25
(2,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	15	0	18
(2,3,1)	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	17
(3,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	15	0	18
(3,3,1)	0	10	0	0	0	0	15	0	0	0	7	0	0	32
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	16	0	17
(1,3,2)	13	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	34
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	16	5	24
(2,3,2)	15	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	28
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	16	6	23
(3,3,2)	0	0	8	0	0	0	15	0	0	0	0	11	0	34
fallos 2	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	17	105	33	166
fallos 3	31	60	0	0	0	0	63	0	0	0	36	33	2	245
fallos	31	60	30	0	0	0	74	0	0	0	53	138	35	411

Tabla 5: Errores cometidos por el TB. Parcialmente binario-esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	7	0	0	1	0	0	4	2	3	5	7	0	10	39
(1,3,0)	12	1	11	9	2	2	2	5	4	5	12	1	16	82
(2,2,0)	5	0	0	4	0	1	1	7	0	3	5	0	9	35
(2,3,0)	12	3	1	1	4	5	3	3	3	4	12	0	17	68
(3,2,0)	7	0	0	4	0	2	0	4	1	3	7	0	12	40
(3,3,0)	9	3	0	1	5	5	3	4	5	6	9	0	17	67
(1,2,1)	13	0	0	2	0	0	2	4	1	4	13	4	11	54
(1,3,1)	7	0	7	9	4	3	4	5	2	2	7	1	18	69
(2,2,1)	9	1	0	5	2	4	1	7	0	4	9	2	14	55
(2,3,1)	6	1	3	0	4	4	3	6	4	3	6	1	17	58
(3,2,1)	7	0	0	5	2	1	1	9	2	5	7	0	10	49
(3,3,1)	10	3	3	1	2	10	6	2	2	6	10	1	17	73
(1,2,2)	8	0	0	1	0	0	1	1	4	7	8	2	11	43
(1,3,2)	5	2	4	10	0	4	7	2	7	6	5	10	17	82
(2,2,2)	13	0	0	0	0	0	0	0	2	6	13	1	11	46
(2,3,2)	5	7	3	1	0	4	1	3	4	6	5	9	18	66
(3,2,2)	8	0	0	4	0	0	0	0	0	5	8	1	11	37
(3,3,2)	3	3	3	0	0	4	3	3	2	7	3	10	16	57
fallos 2	77	1	0	26	4	5	10	34	13	42	77	10	99	330
fallos 3	69	23	5	32	21	44	32	33	33	45	69	33	153	632
fallos	146	24	35	58	25	49	42	67	46	87	146	43	252	962

Tabla 6: Errores cometidos por el TS. Parcialmente binario-esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2
(1,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	4
(2,2,0)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2
(2,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	3
(3,2,0)	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	4
(3,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	3
(1,2,1)	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	3
(1,3,1)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	4
(2,2,1)	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	3
(2,3,1)	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	5
(3,2,1)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
(3,3,1)	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	4
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
(2,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
(3,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
fallos 2	0	0	0	0	0	4	3	1	2	0	0	9	3	22
fallos 3	0	0	0	0	0	2	3	2	3	0	9	9	1	29
fallos	0	0	0	0	0	6	6	3	5	0	9	18	4	51

Tabla 7: Errores cometidos por el GR. Parcialmente binario-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
(1,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	5
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	2	0	15
(2,3,0)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	13
(3,2,0)	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0	2	0	17
(3,3,0)	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	14
(1,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	1	0	16
(2,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	7
(2,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	1	0	17
(3,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	8
(3,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	1	0	16
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5
fallos 2	0	0	0	0	0	0	28	0	0	0	15	6	0	49
fallos 3	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	62	18	0	96
fallos	0	16	0	0	0	0	28	0	0	0	77	24	0	145

Tabla 8: Errores cometidos por el TB. Parcialmente binario-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	1	1	6	2	7	3	0	2	0	2	2	1	11	38
(1,3,0)	4	6	3	6	8	3	5	16	8	3	7	4	13	86
(2,2,0)	0	5	4	1	6	8	0	6	1	5	4	0	7	47
(2,3,0)	5	9	4	5	13	9	3	14	4	0	5	4	6	81
(3,2,0)	0	3	4	2	7	8	1	2	6	5	3	0	8	49
(3,3,0)	8	5	6	1	11	11	5	11	4	1	6	1	6	76
(1,2,1)	0	1	3	2	13	7	1	0	8	4	3	3	11	56
(1,3,1)	2	6	2	1	10	9	15	15	13	8	16	2	10	109
(2,2,1)	2	0	6	4	10	4	6	0	8	4	5	2	10	61
(2,3,1)	4	6	2	1	13	8	13	11	11	7	13	0	9	98
(3,2,1)	1	0	6	1	11	4	6	2	5	3	4	1	11	55
(3,3,1)	6	8	2	5	13	8	9	17	14	7	6	0	9	104
(1,2,2)	1	5	6	1	3	13	17	14	2	17	8	1	19	107
(1,3,2)	8	11	14	19	12	15	15	17	16	17	4	10	18	176
(2,2,2)	2	3	6	1	2	6	10	11	2	16	7	0	19	85
(2,3,2)	11	12	13	15	16	11	16	18	17	17	3	10	18	177
(3,2,2)	9	6	7	2	10	4	13	13	0	14	9	2	19	108
(3,3,2)	13	11	19	18	18	12	19	16	17	15	6	11	18	193
fallos 2	16	24	48	16	69	57	54	50	32	70	45	10	115	606
fallos 3	61	74	65	71	114	86	100	135	104	75	66	42	107	1100
fallos	77	98	113	87	183	143	154	185	136	145	111	52	222	1706

Tabla 9: Errores cometidos por el TS. Parcialmente binario-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	5
(1,3,0)	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	4
(2,2,0)	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	4
(2,3,0)	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	5
(3,2,0)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2
(3,3,0)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	4
(1,2,1)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	4
(1,3,1)	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	4
(2,2,1)	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	4
(2,3,1)	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	5
(3,2,1)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2
(3,3,1)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	4
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	3
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	3
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
(2,3,2)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2
(3,3,2)	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	4
fallos 2	0	0	0	0	6	0	2	0	6	3	3	0	7	27
fallos 3	0	0	3	0	6	0	9	2	4	1	1	0	9	35
fallos	0	0	3	0	12	0	11	2	10	4	4	0	16	62

Tabla 10: Errores cometidos por el GR. Proporcional-esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	15
(1,3,0)	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	2	8
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,0)	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
(3,2,0)	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
(3,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	7	16
(1,3,1)	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	6
(2,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,2,1)	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2
(3,3,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	5
(1,3,2)	0	0	0	0	13	0	9	0	0	0	0	0	0	22
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	5	10
(2,3,2)	0	0	4	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	19
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6
(3,3,2)	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	6
fallos 2	0	0	0	0	0	4	5	5	0	0	9	0	33	47
fallos 3	0	0	4	0	13	2	42	0	0	0	0	0	2	63
fallos	0	0	4	0	13	6	47	5	0	0	9	0	35	110

Tabla 11: Errores cometidos por el TB. Proporcional-esencial.

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	1	0	1	2	4	2	3	2	3	1	1	1	11	32
(1,3,0)	10	1	10	2	17	10	1	8	1	2	12	5	17	96
(2,2,0)	5	6	0	2	2	5	2	0	0	0	3	0	11	36
(2,3,0)	5	2	8	1	8	3	1	7	0	17	17	6	16	91
(3,2,0)	1	4	0	1	4	4	2	0	0	0	6	1	12	35
(3,3,0)	1	1	0	1	8	2	4	10	0	17	19	7	17	87
(1,2,1)	0	0	0	2	3	2	2	1	3	0	3	1	13	30
(1,3,1)	11	5	8	10	14	13	2	10	1	6	16	8	17	121
(2,2,1)	1	5	0	2	1	5	2	4	4	0	4	1	14	43
(2,3,1)	5	0	7	0	10	3	3	3	1	14	17	12	18	93
(3,2,1)	1	7	0	1	4	3	5	0	0	0	6	3	12	42
(3,3,1)	5	2	0	1	10	3	5	8	3	17	15	8	19	96
(1,2,2)	1	0	0	2	10	1	5	1	2	0	2	2	11	37
(1,3,2)	12	5	9	1	15	9	6	20	3	6	11	6	18	121
(2,2,2)	7	6	0	1	4	1	7	0	0	0	7	0	14	47
(2,3,2)	7	14	0	1	12	12	2	8	1	11	18	5	18	109
(3,2,2)	6	7	0	2	0	1	5	2	2	0	5	0	12	42
(3,3,2)	5	1	9	11	5	1	2	14	2	17	18	8	16	99
fallos 2	23	35	1	15	32	24	33	10	14	1	37	9	110	344
fallos 3	61	31	51	28	99	56	26	88	12	97	143	65	156	913
fallos	84	66	52	43	131	80	59	98	26	98	180	74	266	1257

Tabla 12: Errores cometidos por el TS. Proporcional-esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,2,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
(3,3,0)	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2
(1,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3,1)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
(2,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,1)	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
(3,2,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,3,1)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
(1,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(2,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(2,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(3,2,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,3,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
fallos 2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
fallos 3	0	0	0	0	4	1	0	0	1	0	0	2	0	8
fallos	0	0	0	0	4	1	0	0	2	0	0	2	0	9

Tabla 13: Errores cometidos por el GR. Proporcional-no esencial

(p,r,d)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	fallos
(1,2,0)	0	9	0	6	8	7	5	0	6	5	8	0	11	65
(1,3,0)	1	8	15	1	13	12	7	9	10	0	15	5	16	113
(2,2,0)	0	11	0	4	8	8	9	0	6	6	12	3	12	79
(2,3,0)	1	11	13	3	14	13	6	6	11	2	17	6	13	116
(3,2,0)	0	12	1	3	8	9	6	1	8	6	12	2	13	81
(3,3,0)	2	10	11	3	13	13	6	1	11	1	6	4	18	99
(1,2,1)	1	13	3	9	2	4	3	1	9	4	7	1	10	67
(1,3,1)	1	12	6	2	13	12	16	3	7	4	6	15	15	112
(2,2,1)	0	14	0	7	5	11	8	0	13	10	11	1	11	91
(2,3,1)	0	7	5	0	15	10	6	1	10	7	2	17	16	96
(3,2,1)	1	13	1	5	4	11	9	0	2	5	5	1	16	73
(3,3,1)	2	4	9	1	14	14	13	7	8	3	6	5	19	104
(1,2,2)	2	10	10	0	3	13	7	14	6	16	4	0	18	103
(1,3,2)	9	9	16	19	10	14	8	17	12	16	7	7	19	173
(2,2,2)	6	13	11	3	2	12	8	10	3	14	2	0	17	101
(2,3,2)	13	11	16	19	15	18	18	20	8	17	6	18	20	199
(3,2,2)	8	10	7	6	9	18	12	12	0	14	3	2	17	118
(3,3,2)	15	11	17	17	17	8	17	19	7	7	8	7	20	190
fallos 2	18	105	33	43	49	93	67	38	53	80	64	10	125	778
fallos 3	44	83	108	65	124	124	107	83	84	66	73	85	156	1202
fallos	62	188	141	108	73	217	174	121	137	146	137	95	281	1980

Tabla 14: Errores cometidos por el TS. Proporcional-no esencial

Anexo 2

En este apéndice se presenta el código C de algunos de los algoritmos empleados para la resolución de los problemas planteados en este trabajo. El programa `super6.cpp` resuelve el problema de obtener los niveles óptimos para los atractivos y el beneficio máximo, dadas las localizaciones, en el caso proporcional-esencial. Este programa ha sido utilizado en la aplicación presentada en el capítulo 6. El fichero `lista.h` contiene determinadas funciones que han sido utilizadas por los distintos programas de optimización global diseñados. Por último, se presenta el `tabu.cpp` como modelo de algoritmo de búsqueda tabú empleado en la resolución del problema de optimización combinatoria resultante al tener que decidir cuáles son las localizaciones que maximizan los beneficios.

`Super6.cpp` (esencial-monótono-supermercados)

*/*Resuelve el problema de obtener los niveles óptimos de atractivo dadas las localizaciones para el caso esencial con funciones de coste crecientes. Se presentan dos variantes de la función `cota()` para cacular las cotas superiores e inferiores de la función objetivo. En una de las versiones se utiliza la `cota1`, mientras que en la otra la cota empleada es la `cota3`. En este caso el problema se ha adaptado a las exigencias de la Ley de Comercio de Canarias que impone ciertas restricciones en la concesión de licencia de apertura de hipermercados.*

Ficheros de entrada:

salida.dat: Introduce `numloc`, `nodos`, `eps`, `loc-a-b[1..3]`

atrachb.dat: Introduce los atractivos para los centros existentes

dsuper.dat: Introduce las distancias de la red

demanda.dat: Introduce el poder de compra de los nodos.

Fichero de salida:

*solucion.dat: Almacena la solución del problema */*

```
#include <stdlib.h>
```

```
#include <io.h>
```

```
#include <string.h>
```

```
#include <alloc.h>
```

```
#include <conio.h>
```

```
#include <stdio.h>
```

```

#include <time.h>
#include <lista.h>
#include <malloc.h>
#include <math.h>
#define maxit 50000 /* Número máximo de iteraciones permitidas*/

double func(float *a);
void cota(float *a,float *b);
void particion(float *a,float *b);
double fcostes(float *a);
double cotabis(float *a,double *gradiente);
void factalea(float *a,float *b);
double grad1(int k);
int factibilidad(float *punto);
float fact[3], ki[33], alfasol[3], deman[33], dist[73][33],
total, maximozona[10];
double beta,alfa,betapadre;
int loc[3], caso, zona[75];
struct rectangulo *info,*sol;
void main()
{int i, j;
long int it;
float atracb[73], tiempoacumulado;
clock_t start, end;
randomize();
clrscr();
fin=fopen("salida.dat","r");
if(fin==NULL)printf("\n El fichero salida.dat no se ha abierto
");
fscanf(fin,"%d %d %d %f %f %f", &numloc, &nodos, &locb, &eps,
&tmin, &mb);
for(i=0;i<numloc;i++)
{fscanf(fin,"%d",&loc[i]);
loc[i]--;
fscanf(fin,"%f",&a[i]);
fscanf(fin,"%f",&b[i]);
}
fscanf(fin,"%f %d",&total,&caso);
/*caso: es un indicador de la situación que se va a resolver dependiendo del
número de hipermercados que se vayan a implantar y del tipo de zona de atracción
comercial donde se vayan a localizar
total: indica la superficie de venta máxima que se puede emplear en la
implantación de hipermercados en el caso particular que se resuelve*/
fclose(fin);

```

```

/*Se lee el atractivo para los centros ya establecidos*/
fin=fopen('atrach.dat','r');
for(i=0;i<locb;i++)
    fscanf(fin,'%f",&atrach[i]);
fclose(fin);
numv=1;
for(i=1;i<numloc+1;i++)numv*=2;
/*Se leen las distancias.
dist[j][i]=distancia entre la localización potencial o existente j {0,..., 72} y el
nodo de demanda i {0,...,31}.
Los nodos a partir del 32 son ficticios verificándose la siguiente correspondencia:
    32 al 53 → 0 al 31
    54 al 72 → 0 al 18*/
fin=fopen('dsuper.dat','r');
if(fin==NULL)puts('\n El fichero dsuper.dat no esta abierto');
clrscr();
for(j=0;j<nodos;j++)
    for(i=0;i<nodos;i++)
        {fscanf(fin,'%f",&dist[j][i]);
         if(j<22) dist[j+nodos][i]=dist[j][i];
         if(j<18) dist[j+nodos+22][i]=dist[j][i];
        }
fclose(fin);
/*Se redefinen las distancias dependiendo del tipo de establecimiento que se
corresponda con el nodo, por ejemplo*/
for(j=0;j<locb;j++)
    {if(j<32) for(i=0;i<nodos;i++) dist[j][i]=1+2*sqrt(dist[j][i]);
      else if (j<54)
          for(i=0;i<nodos;i++) dist[j][i]=1+1.5*sqrt(dist[j][i]);
      else
          for(i=0;i<nodos;i++) dist[j][i]=1+sqrt(dist[j][i]);
    }
fin=fopen('demanda.dat','r');
for(i=0;i<nodos;i++)
    fscanf(fin,'%f",&deman[i]);
fclose(fin);
/*Calculamos los ki*/
for(i=0;i<nodos;i++)
    {ki[i]=0; /*Se supone que las localizaciones de B son las primeras:1,2,
    ...,72*/
      for(j=0;j<locb;j++)
          ki[i]+=atrach[j]/dist[j][i];
    }

```

```

for(j=0;j<locb;j++)printf('\nloc%d= %d,j,loc[j]);
start=clock();
beta=elementoslista=0;
it=1;
betapadre=1000000; /*Un valor lo suficientemente grande*/
sol=(struct rectangulo *)malloc(sizeof(rectangulo));
if(!sol)
    {printf('\nNo hay memoria');
    return;
    }
sol->alfa=-1000000; /*Un valor suficientemente pequeño*/
sol->beta=10000000; /*Un valor suficientemente grande*/
for(i=0;i<numloc;i++)
    {sol->a[i]=a[i];
    sol->b[i]=b[i];
    sol->alfasol[i]=a[i];
    }
do{
    alfa=-1000000000;
    if(it!=1)
        {for(i=0;i<numloc;i++)
            {a[i]=ppio->a[i];
            b[i]=ppio->b[i];
            betapadre=ppio->beta;
            }
        eliminar(&ppio,&final,ppio);
        }
    particion(&a[0],&b[0]);
    if(ppio!=NULL && ppio->alfa>=sol->alfa)
        {sol->alfa=ppio->alfa;
        sol->beta=ppio->beta;
        for(i=0;i<numloc;i++)
            {sol->a[i]=ppio->a[i];
            sol->b[i]=ppio->b[i];
            sol->alfasol[i]=ppio->alfasol[i];
            }
        depurar(sol->alfa);
        }
    it++;
}while(ppio!=NULL & it<maxit); /*El proceso se repite hasta que no
quede ningún rectángulo en la lista o si el algoritmo no se prolonga demasiado
sin converger*/
end=clock(); /*Tiempo final del algoritmo*/
/*Se almacena en el fichero "solucin.dat" la solución del problema*/

```

```

fsol=fopen('solucion.dat','w');
if(fsol==NULL)printf('\n El fichero solucion.dat no se ha
abierto');
fprintf(fsol,'\n%f',sol->alfa);
for(i=0;i<numloc;i++)fprintf(fsol,' %f', sol->alfasol[i]);
fprintf(fsol,' %6.0ld',it);
fprintf(fsol,' %f',(end-start)/CLK_TCK);
free(sol);
fclose(fsol);
}

/*****
/*La función fcostes() calcula el valor de la función de costes fijos en el punto
a*/
double fcostes(float *a)
{double paso,valor;
int j;
valor=0;
for(j=0;j<numloc;j++)
    valor+=*(a+j)*3+10*pow(*(a+j)-0.00049,0.3333);
return(valor);
}

/*****
/*factalea() calcula aleatoriamente un punto factible (fact) para un rectángulo
dado por los vertices a y b. En este caso, además lleva a cabo una prueba de
factibilidad ya que en el caso de hipermercados existen restricciones que podrían
hacer que no todo el rectángulo fuera factible*/
void factalea(float *a,float *b)
{int i, veces, factible;
float paso;
veces=0;
do{
    veces++;
    for(i=0;i<numloc;i++)
        {paso=(float)random(101)/100;
        fact[i]=*(a+i)+paso*(*(b+i)-*(a+i));
        }
    factible=factibilidad(&fact[0]);/*Se comprueba si el punto
obtenido aleatoriamente es factible*/
}while(factible==0
&& veces<10);/*Se hacen 10 intentos para obtener un punto factible de forma
aleatoria*/
if(veces==10 && factible==0)

```

```

    for(i=0;i<numloc;i++) fact[i]=*(a+i); /*Si no se consigue un
punto factible tras los 10 intentos se devuelve el vértice inferior izquierdo que
siempre será factible ya que el rectángulo ha pasado el filtro que elimina a aquellos
que no tienen ningún punto factible*/
}

```

```

/*****/
/* La función factibilidad() comprueba si un punto es factible dependiendo del
caso particular que se trate. Devuelve 0 si el punto no es factible y 1 en otro caso*/
int factibilidad(float *punto)
{switch(caso)
{
    case 1:
        return 1;
        break; /*No coinciden las localizaciones en una misma zona*/
    case 2:
        if(*punto+(punto+1)>total)return 0;
        else return 1;
        break; /*Coinciden las 2 primeras localizaciones en una misma
zona*/
    case 3:
        if(*punto+(punto+2)>total)return 0;
        else return 1;
        break; /*Coinciden las localizaciones 1 y 3 en una misma
zona*/
    case 4:
        if(*(punto+2)+(punto+1)>total)return 0;
        else return 1;
        break; /*Coinciden las localizaciones 2 y 3 en una misma
zona*/
    case 5:
        if(*punto+(punto+1)+(punto+2)>total)return 0;
        else return 1;
        break; /*Coinciden las 3 localizaciones en una misma zona*/
}
}

```

```

/*****/
/*Esta función calcula la partición de un rectángulo, sus cotas y gestiona el
almacenamiento de un nuevo rectángulo en la lista si fuese oportuno*/
void particion(float *a,float *b)
{int i, j, valido;
float bprima[3], v1[3], v2[3], vbase[8][3];
for(i=0;i<numloc;i++)

```

```

        {bprima[i]=*(b+i)-*(a+i))/2;
        v2[i]=*(a+i)+bprima[i];
    }
    vertices(&a[0],&v2[0]);/*Se calculan los vértices del rectángulo base, a
partir del cual, sin mas que sumarle (b-a)/2 se obtiene el resto de los rectángulos
de la partición. Están almacenados en v[][]*/
    for(i=0;i<numv;i++)
        for(j=0;j<numloc;j++) vbase[i][j]=v[i][j];
    for(i=0;i<numv;i++)
        {valido=0;/*El tamaño del cuadrado es superior a tmin*/
        for(j=0;j<numloc;j++)
            {v1[j]=vbase[i][j];
            v2[j]=v1[j]+bprima[j];
            } /*Sólo se hace ficha cuando el tamaño del cuadrado es suficiente y
no se puede descartar por las cotas*/
        for(j=0;j<numloc;j++)if(bprima[j]<tmin)valido++;
        if(valido==0)
            {vertices(&v1[0],&v2[0]);
            cota1(&v1[0],&v2[0]);
            if(sol->alfa*(1+eps)<beta)/*Se crea una nueva ficha en la lista
cuando la cota superior la diferencia resultante entrela cota inferior y la superior
del rectángulo es superior al (eps×100) % de la actual cota inferior*/
                haceficha(&v1[0],&v2[0],alfa,beta,&alfasol[0]);
            }
        }
    }
}

/*****
/*La funcion cota() calcula las cotas superior (cota1) e inferior para un
rectángulo dado por los vértices a y b*/
void cota1(float *a,float *b)
{int i, l;
float temp[3];
double dato, beta2;
alfa=-10000000;
beta=1000000;
for(l=0;l<numv;l++)
    {for(i=0;i<numloc;i++) temp[i]=v[l][i];
    dato=func(&temp[0])-fcostes(&temp[0]);
    if(dato>alfa)
        {alfa=dato;
        for(i=0;i<numloc;i++)alfasol[i]=temp[i];
        }
    }
}

```



```

    beta2=func(&b[0])-fcostes(&a[0]);
    if(beta>beta2)beta=beta2;
    if(beta>betapadre) beta=betapadre; /*La cota superior del rectángulo
    padre también lo es de los hijos*/
}

/*****/

/*La función cota() calcula las cotas superior (cota3) e inferior para un
rectángulo dado por los vértices a y b*/
void cota(float *a,float *b)
{int i,k,l;
float temp[3];
double dato, beta2, suma, sumaminimo, gradiente[3], grad[3],
betapro;
alfa=betapro=-10000000;
beta=1000000;
sumaminimo=1000000;
for(k=1;k<4;k++)
    {factalea(&a[0],&b[0]);
    suma=0;
    for(i=0;i<numloc;i++)
        {grad[i]=grad1(i);
        suma+=grad[i];
        }
    /*Se elige el punto factible en el que el gradiente es más próximo a 0*/
    if(fabs(suma)<fabs(sumaminimo))
        {for(i=0;i<numloc;i++)
            {gradiente[i]=grad[i];
            temp[i]=fact[i];
            }
        sumaminimo=suma;
        }
}
for(i=0;i<numloc;i++)fact[i]=temp[i];
for(l=0;l<numv;l++)
    {for(i=0;i<numloc;i++) temp[i]=v[l][i];
    dato=func(&temp[0])-fcostes(&temp[0]);
    if(dato>alfa)
        {alfa=dato;
        for(i=0;i<numloc;i++)alfasol[i]=temp[i];
        }
    beta2=func(&fact[0])+cota(&temp[0],&gradiente[0]);
    if(beta2>betapro) betapro=beta2;
}

```

```

    }
    beta2=betaprov-fcostes(&a[0]);
    if(beta>beta2)beta=beta2;
    if(beta>betapadre) beta=betapadre; /*La cota superior del rectángulo
padre también lo es de los hijos*/
}

/*****
/*func() calcula el valor de la función de ingresos en el punto a*/
double func(float *a)
{int i,j;
double paso1, valor;
valor=0;
for(i=0;i<nodos;i++)
    {paso1=0;
    for(j=0;j<numloc;j++) paso1+==(a+j)/dist[loc[j]][i];
    valor+=deman[i]*paso1/(paso1+ki[i]);
    }
return(mb*valor);
}

/*****
/*Esta función calcula el elemento p(a-fact) que forma parte de la cota superior:
fact=pto factible; a=pto a evaluar; p=gradiente(fact)*/
double cotabis(float *a,double *gradiente)
{int i, j;
double dif[10], valor;
valor=0;
for(i=0;i<numloc;i++)
    {dif[i]=*(a+i)-fact[i];
    valor+=(*(gradiente+i))*dif[i];
    }
return(valor);
}

/*****
/*grad1() calcula la componente k-esima del gradiente de la funcin que mayor
a la funcion concava en el punto fact*/
double grad1(int k)
{int i, j;
double valor1, paso;
valor1=0;
for(i=0;i<nodos;i++)
    {paso=ki[i];

```

```
    for(j=0;j<numloc;j++)
    paso+=fact[j]/dist[loc[j]][i];
    paso*=paso;
    valor1+=deman[i]*ki[i]/(dist[loc[k]][i]*paso);
    }
return(valor1*mb);
}
/*****/
```

lista.h

*/*En este fichero se almacenan funciones que son empleadas por distintos programas. Entre otras se encuentran todas las funciones que se utilizan para gestionar la lista en la que se almacenan los rectángulos resultantes en el algoritmo de ramificación y acotación*/*

```

int nodos, numv, numloc, locb;
float eps, tmin, a[3], b[3], v[8][3], mb;
FILE *fout,*fin2,*fsol;
struct rectangulo{
    float alfa;
    float beta;
    float alfasol[3];
    float a[3];
    float b[3];
    struct rectangulo *sig; /*puntero al siguiente elemento de la lista*/
    struct rectangulo *ant; /*puntero al elemento anterior de la lista*/
} elemento;
struct rectangulo *ppio; /*puntero al primer elemento de la lista*/
struct rectangulo *final; /*puntero al ultimo elemento de la lista*/
void haceficha(float *a,float *b,float alfa,float beta,float
*alfasol);
void depurar(float alfa);
void eliminar(struct rectangulo **, struct rectangulo **,struct
rectangulo *info);
void insert(struct rectangulo *i,struct rectangulo **ppio,struct
rectangulo **final);
void vertices(float *a,float *b);
char *miscanf(int max_lon);

/*****
/*Almacena los datos de un nuevo rectángulo*/
void haceficha(float *a,float *b,float alfa,float beta,float
*alfasol)
{struct rectangulo *info;
int i;
info=(struct rectangulo *)malloc(sizeof(rectangulo));
if(!info)
    {printf('\nNo hay memoria con %d elementos en la lista'',
    elementoslista);
    exit (1);
    return(1);
    }
info->alfa=alfa;

```

```

info->beta=beta;
for(i=0;i<numloc;i++)
    {info->a[i]=*(a+i);
    info->b[i]=*(b+i);
    info->alfasol[i]=*(alfasol+i);
    }
insert(info,&ppio,&final);
}

/*****
/* Crea una lista doblemente enlazada*/
void insert(struct rectangulo *i,struct rectangulo **ppio,
struct rectangulo **final)
{struct rectangulo *ant,*p;
if(*final==NULL) /*primer elemento de la lista*/
    {i->sig=NULL;
    i->ant=NULL;
    *final=i;
    *ppio=i;
    return;
    }
p=*ppio; /*principio de la lista*/
ant=NULL;
while(p)
    {if(p->beta > i->beta)
        {ant=p;
        p=p->sig;
        }
    else
        {if(p->ant)
            {p->ant->sig=i;
            i->sig=p;
            i->ant=p->ant;
            p->ant=i;
            return;
            }
        i->sig=p; /*nuevo primer elemento*/
        i->ant=NULL;
        p->ant=i;
        *ppio=i;
        return;
        }
    }
ant->sig=i; /*ponerlo en el final*/

```

```

i->sig=NULL;
i->ant=ant;
*final=i;
}

/*****
/*Eliminar un elemento de la lista*/
void eliminar(struct rectangulo **ppio,struct rectangulo **final,
struct rectangulo *info)
{if(info)
  {if(*ppio==info)
    {*ppio=info->sig;
    if(*ppio) (*ppio)->ant=NULL;
    else *final=NULL;
    }
  else
    {info->ant->sig=info->sig;
    if(info!=*final)info->sig->ant=info->ant;
    else *final=info->ant;
    }
  free(info); /*devolver la memoria al sistema*/
}
}

/*****
/* Elimina los rectangulos cuyo beta es menor que el alfa max*/
void depurar(float alfa)
{struct rectangulo *info, *paso;
info=ppio;
while(info)
  {if(alfa*(1+eps) > info->beta)
    {paso=info;
    eliminar(&ppio,&final,info);
    info=paso->sig;
    }
  else info=info->sig;
}
}

/*****
/*vertices() calcula los vértices de un rectángulo dados el vértice inferior
izquierdo (a) y el superior derecho (b)*/
void vertices(float *a,float *b)
{float paso1, paso2, temp;

```

```

int i, j, prod, mod;
prod=1;
for(i=0;i<numloc;i++)
    {pasol=*(a+i);
    paso2=*(b+i);
    prod=prod*2;
    mod=numv/prod;
    for(j=0;j<numv+1;j++)
        {v[j][i]=pasol;
        if((j%mod)==0)
            {temp=pasol;
            pasol=paso2;
            paso2=temp;
            }
        }
    }
}

/*****
/*función para leer datos desde el teclado*/
char *miscanf(int max_lon)
{register i;
int basura, x, y, atr;
struct text_info r;
char c, buffer[255];
x=wherex();
y=wherey();
gettextinfo(&r);
atr=((r.attribute & 112)>>4)+((r.attribute & 7)<<4);
/* intercambia colortexto con colorfondo*/
textattr(atr);
cprintf(''%c'',max_lon,' ');
gotoxy(x,y);
for (i=0;i<max_lon;i++)
    {
    c=getch();
    basura=c;
    if(c==13)
        {
        buffer[i]='\0';
        textattr(r.attribute);
        return (buffer);
        }
    if (c==0) /* si se pulsa una tecla especial se salta*/

```

```
    {
    putchar(7);
    getch();
    i--;
    }
else if(c==8)
    {
    if(i>0) /* si hay al menos un caracter que borrar*/
        {
        putchar(8);
        putchar(' ');
        putchar(8);
        i-=2;
        }
    else i--;
    }
else if(c==9) i--;
else
    {
    putchar(c);
    buffer[i]=c;
    }
if (i==max_lon-1)
    {
    putchar(8);
    putchar(' ');
    putchar(8);
    i--;
    }
}
buffer[max_lon]='\0';
textattr(r.attribute);
return(buffer);
}
```


Tabu.cpp

```

#include <stdlib.h>
#include <io.h>
#include <process.h>
#include <string.h>
#include <alloc.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include <time.h>

FILE *fin, *fout;
int vecino(int x,int tmaximo, float *max);
float solucion(int viejo, int nuevo);
void ordenarint(int valor,int numero);
void ordenarfrecuencias(int n);
char *miscanf(int max_lon);
void inicia(int n);
float intensificartb(float max, int tmaximo);
static struct nod
    {int adyacentes[9];
      int tstatus; /*Iteración en la que es etiquetado como tab*/
      int frecuencia; /*Número de veces que forma parte de la solución
actual*/
    };
struct nod nodo[75];
int s, t, r , yr[3], orden[3], llamadas;
float atrac[3], trango, toploc[3];

main()
{int i, it, j, p, numnodos, nuevo, viejo, tmax, smax,
rmedianoide[3], maxllam, cambio;
float zmax, zopt, solatrac[3], salto, valor, valormax;
clock_t start,end;
/*zmax= mejor valor óptimo encontrado partiendo de la actual solución inicial
zopt= mejor valor óptimo encontrado para las diferentes soluciones iniciales
utilizadas
valormax= mejor valor entre los vecinos de una solución actual
it= número de movimientos de no mejora
rmedianoide[]= localizaciones de la mejor solución encontrada hasta el
momento
solatrac[]= atractivos de la mejor solución encontrada hasta el momento
toploc[]= almacena las localizaciones correspondientes a la mejor solución
encontrada hasta el momento a partir de la actual solución inicial

```

atractiv.dat: contiene los niveles superior e inferior para los atractivos para cada una de las localizaciones/*

```

clrscr();
randomize();
puts('\nCuántos nodos tiene la red? ');
numnodos=atoi(miscanf(4));
puts('\nCuántos nuevos centros se establecern? ');
r=atoi(miscanf(2));
puts('\nCuántos centros existen en el mercado? ');
p=atoi(miscanf(2));
puts('\nIntroducir tmax ');
tmax=atoi(miscanf(5));
puts('\nIntroducir smax ');
smax=atoi(miscanf(3));
puts('\nIntroducir trango ');
trango=atoi(miscanf(3));
puts('\nIntroducir el salto');
salto=atof(miscanf(5));
puts('\nIntroducir el número máximo de llamadas ');
maxllam=atoi(miscanf(5));
puts('\nIntroducir el margen de beneficio');
mb=atof(miscanf(5));
puts('\nIntroducir el eps');
eps=atof(miscanf(7));
puts('\nIntroducir el tmin');
tmin=atof(miscanf(7));
fin=fopen('atractiv.dat','r');
for(i=0;i<nodos) fscanf(fin,'%f %f',a[i],b[i]);
fclose(fin);
/*Inicialización*/
puts('\nIntroducir las localizaciones iniciales ');
for(i=0;i<r;i++)
    {printf('\nloc%d=',i+1);
    yr[i]=atoi(miscanf(3));
    yr[i]--;
    nodo[yr[i]].frecuencia++;
    rmedianoide[i]=yr[i];
    }
start=clock(); /*Tiempo de inicio del algoritmo*/
zopt=-10000000;
llamadas=0;
inicia(numnodos);
/*Paso 5*/
while(s<=smax)

```

```

{zmax=solucion(0,yr[0]);
if(t==1 && s==1)
  {zopt=zmax;
  for(i=0;i<r;i++)
    {solatrac[i]=atrac[i];
    toploc[i]=yr[i];
    }
  } /*El valor óptimo y los niveles de atractivo de la primera solución
inicial se utilizan para asignarla a la mejor solución encontrada*/
  it=1;
/* Paso 2*/
  while(t<=tmax)
    {valormax=-100000;
    for (i=0;i<r;i++)
      {/*Resolver el problema con el nuevo vecino de yr[i]*/
      cambio=vecino(yr[i],tmax, &valor);
      if(cambio==1)
        {valor=-1000000;
        t=tmax;
        } /*Se ha de cambiar de solución inicial*/
      else if(valor>=valormax)
        {viejo=i;
        nuevo=cambio;
        valormax=valor;
        }
      }
    { nodo[yr[viejo]].tstatus=tmax*(s-1)+t+3+random(trango);
    /*Orden[i]=k significa que el vecino que tiene el i-ésimo mayor valor es el k.
Vecino[k].cambio es el vecino elegido para la localización k de la solución yr. La
nueva r-upla de localizaciones es la misma que yr cambiando la componente k por
vecino[k].cambio*/
    /*Paso 3.- Se elige el vecino con mayor valor ya que aunque no mejore la
solución anterior*/
    yr[viejo]=nuevo;
    zmax=valormax;
    for(i=0;i<=r;i++)nodo[yr[i]].frecuencia++;
    if(zmax<valormax)
      {zmax=valormax;
      it=1;
      for(i=0;i<r;i++) toploc[i]=yr[i];
      }
    else it++;
    if(zmax>zopt)
      {zopt=zmax;

```

```

        for(i=0;i<=;i++)
            {rmedianoide[i]=yr[i];
             solatrac[i]=atrac[i];
            }
        }
        if(it>=salto*tmax)t=tmax;
        if(llamadas>=maxllam)
            {s=smax;
             t=tmax;
            }
        }
        t++;
    }
    if(zmax>salto*zopt)/*La solución local es lo suficientemente buena como
para intensificar la búsqueda en su entorno. Este parámetro se puede variar
dependiendo de lo que se considere como buena*/
        {zmax=intensificartb(zopt,tmax);
         if(zmax>zopt)
             {zopt=zmax;
              for(i=0;i<=;i++)
                  {rmedianoide[i]=yr[i];
                   solatrac[i]=atrac[i];
                  }
             }
        }
    s++;
    t=1;
    ordenarfrecuencias(numnodos); /*Se toma como nueva solución inicial la
formada por las localizaciones menos utilizadas*/
    for(i=0;i<r;i++)
        {yr[i]=orden[i];
         nodo[yr[i]].frecuencia++;
        }
    }
    end=clock();
    fout=fopen('solucion.dat','w');
    fprintf(fout,'\nLa solución para el(%d/%d)-medianoide
es:',r,p);
    for(i=0;i<r;i++) fprintf(fout,'\nloc= %d atrac=%f',
rmedianoide[i], solatrac[i]);
    fprintf(fout,'\nSu valor objetivo es %f',zopt); fprintf(fout,
'\ntiempo transcurrido: %f seg.', (end-start)/CLK_TCK);
    fprintf(fout,'\nnumero de llamadas=%d',llamadas);
    fclose(fout);
}

```

```

/*****/
/*Esta función inicializa los contadores, las etiquetas tabú y de frecuencia, y
lee los nodos adyacentes*/
void inicia(int n)
{int i, j;
float k;
s=1; /*Contador de soluciones iniciales*/
t=1; /*Contador de movimientos a partir de una solución inicial*/
fin=fopen(''adyacent.dat'', 'r'); /*Fichero donde
se encuentran almacenados los nodos adyacentes para cada uno de los nodos de
la red*/
if(fin != NULL) puts(''\nEl fichero adyacent.dat está abierto'');
else puts(''\nEl fichero adyacent.dat no está abierto'');
);
for(i=0;i<n;i++)
{fscanf(fin, '%d', &nodo[i].adyacentes[0]);
nodo[i].adyacentes[0]--; /*Los nodos están numerados desde 0*/
j=0;
while(nodo[i].adyacentes[j] != -1) /*El (-1) indica el final de la lista
de nodos adyacentes del nodo i*/
{j=j+1;
fscanf(fin, '%d', &nodo[i].adyacentes[j]);
nodo[i].adyacentes[j]--;
}
nodo[i].frecuencia=0;
nodo[i].tstatus=-1;
}
fclose(fin);
}

/*****/
/*Función que almacena en el array orden[] las r localizaciones menos
frecuentadas durante el desarrollo del algoritmo*/
void ordenarfrecuencias(int n)
{int i, j, contador, partida;
contador=i=0;
while(nodo[i].adyacentes[0] == -1) i++; /*Si no tiene nodos adyacentes
pasamos al siguiente ya que no consideramos nodos separados*/
orden[0]=i;
partida=i-1;
if(nodo[i].frecuencia == 0) contador++;
while(contador < r && i < n-1) /*Ordena los nodos por frecuencia y va
contando los nodos con frecuencia 0. Si se alcanza r nodos con frecuencia 0, se
para la ordenación y se toman estos nodos como nueva solución inicial*/

```

```

    {i++;
    if(nodo[i].adyacentes[0]!=-1)
        {ordenarint(nodo[i].frecuencia,i-partida);
        if(nodo[i].frecuencia==0) contador++;
        }
    }
}

```

*/*Esta función introduce un nodo en la r-upla de localizaciones menos frecuentes cuando su frecuencia se encuentra entre las r frecuencias más bajas de entre las leídas*/*

```

void ordenarint(int valor,int numero)
{int l, k, fin, paso;
if(numero>=r)paso=r;
else paso=numero;
if(paso<r && valor>=nodo[orden[paso-1]].frecuencia) orden[paso]
=paso;
if (valor<nodo[orden[paso-1]].frecuencia)
    {fin=1;
    k=0;
    while(k<paso && fin)
        {if (valor<nodo[orden[k]].frecuencia)
            {for(l=paso;l>k;l--)if(l<r) orden[l]=orden[l-1];
            orden[k]=numero;
            fin=0;
            }
        k++;
    }
}
}

```

*/*Esta función devuelve el vecino elegido del nodo x. Como regla general elige el nodo adyacente etiquetado como no tabú y con menor frecuencia*/*

```

int vecino(int x,int tmaximo, float *max)
{int j, frec, vec, tabu, k, i, prov, diferente, cambio, diftotal;
float paso;
*max=-9999999;
j=cambio=diftotal=0;
while (nodo[x].adyacentes[j]!=-1)
    {diferente=1;
    k=0;
    while(k<r && diferente==1)

```

```

        {if(yr[k]==nodo[yr[x]].adyacentes[j]) diferente=0;
        k++;
        }
    diftotal+=diferente;
    if(diferente!=0)/*El adyacente no está en la solución inicial*/
        {prov=nodo[yr[x]].adyacentes[j];
        if (nodo[prov].tstatus==-1 || nodo[prov].tstatus<=t+
tmaximo*(s-1))/*No está etiquetado como tabú*/
            {cambio++;
            paso=solucion(x,prov);
            if(paso>(*max))
                {vec=prov;
                *max=paso;
                }
            } /*Entre los etiquetados como no tabú se elige el vecino que
reporte mayores beneficios*/
        }
    j++;
    }
    if(diftotal==0 || nodo[x].adyacentes[0]==-1)
        vec=nodo[x].adyacentes[0];/*La función devuelve -1 si todos los nodos
adyacentes forman parte de la actual solución o si el nodo x está aislado*/
    else
        {if(cambio==0) /*Si no se ha elegido ningún vecino porque todos los
posibles están etiquetados como tabú se elige aquel que dejaría de estarlo antes*/
        {j=0;
        tabu=10000;
        while(nodo[x].adyacentes[j]!=-1)
            {prov=nodo[yr[x]].adyacentes[j];
            i=0;
            while(prov!=yr[i] && i<r) i=i+1;
            if(i==r)
                {if(tabu>nodo[prov].tstatus)
                {tabu=nodo[prov].tstatus;
                cambio=prov;
                }
                }
            j++;
            }
        }
        vec=cambio;
    }
    return(vec);
}

```

```

/*****/
/*Esta función hace una llamada al programa que resuelve el problema de
obtener los beneficios y los niveles de atractivo para las localizaciones actuales.
Dependerá del programa que se utilice por lo que se presenta es una idea general de
lo que sería esta función. Los argumentos son: viejo= la posición en la solución
actual de la localización que va a ser sustituida por un nodo adyacente y nuevo el
nodo que entra a formar parte de la solución. Devuelve el valor de los beneficios*/
float solucion(int viejo,int nuevo)
{float znow,dato[6];
int i, j;
if(nuevo!=-1)
    {fout=fopen('salida.dat','w');
    fprintf(fsal,'\n %f %d %d
%d %f %f', mb, r, p,nodos, eps, tmin); /*habría que introducir todos los
datos necesarios para que se pueda resolver el problema*/
    for(i=0;i<r;i++) /*Se almacena la información en el fichero que utiliza
el programa que se va a emplear*/
        {if(i==viejo) fprintf(fout,' %d', nuevo);
        else fprintf(fout,' %d yr[i]);
        fprintf(fout,' %f %f', a[i], b[i]);
        }
    fclose(fout);
    system('global.exe');/*global.exe: programa de optimización global
que se utiliza para hallar el valor óptimo, por ejemplo, super6.exe*/
    fin=fopen('solucion.dat','r');
    if(fin==NULL)printf('\nEl fichero solucion.dat no se abrió
');
    fscanf(fin,'%f', &znow); /*Valor óptimo*/
    for(j=1;j<r+1;j++) fscanf(fin,'%f',atrac[j]);
    fclose(fin);
    }
else znow=-1000000;
return(znow);
}

/*****/
/*Esta función intensifica la búsqueda aplicando un algoritmo que se asemeja
al Teitz and Bart utilizando los nodos adyacentes a cada uno de las localizaciones
que pertenecen a la mejor solución partiendo de una solución inicial cuando se
encuentra próxima a la mejor solución encontrada*/
float intensificartb(float max,int tmaximo)
{int i, j, cambio, k, repetido;
float sol;
for(i=0;i<r;i++) yr[i]=toploc[i];

```



```

for(i=0;i<r;i++)
    {j=0;
    cambio=yr[i];
    while(nodo[yr[i]].adyacentes[j] !=-1)
        {repetido=0;
        for(k=0;k<r;k++)
            if(nodo[yr[i]].adyacentes[j]==yr[k]) repetido=1;
        if(repetido==0)
            {sol=solucion(i,nodo[yr[i]].adyacentes[j]);
            nodo[nodo[yr[i]].adyacentes[j]].frecuencia++;
            nodo[nodo[yr[i]].adyacentes[j]].tstatus=(s-1)*
tmaximo+t+3 +random(trango);
            if(sol>max)
                {cambio=nodo[yr[i]].adyacentes[j];
                max=sol;
                }
            }
        j++;
    }
    yr[i]=cambio;
}
return(max);
}

/*****/
char *miscanf(int max_lon)
/*Esta función está desarrollada en lista.h*/

/*****/

```