

MODELO MATEMATICO DE LOS PROCESOS INTERMAREALES DE ACRECION  
Y EROSION, EN PLAYAS ARENOSAS.

Jesús Martínez, Angelo Santana, Elena Melián, Frella Reyes, Cristina Rúa-Figueroa y Carmen del Toro.

Facultad de Ciencias del Mar. Campus Universitario de Tafira. 35017. Las Palmas de Gran Canaria

ABSTRACT

In this work, accretion and erosion processes in intertidal strips of sandy beaches are modelled.

With that aim the following steps have been made:

- 1.- Topographic monitoring of a beach in the Island of Gran Canaria (Spain).
- 2.- Development of a mathematical model.
- 3.- And interpretation of a significative time serie of records of sedimentary volumes.

RESUMEN

Se pretende modelizar los procesos de acreción y erosión en franjas intermareales de playas arenosas. Para ello:

1. Se ha hecho el seguimiento de los cambios topográficos de una playa de Gran Canaria (España).
2. Se desarrolla un modelo matemático.
3. Y se interpreta una serie temporal significativa, referente a observaciones de balances sedimentarios.

TECNICAS EMPLEADAS

Para el desarrollo de la modelización, se han seguido las siguientes técnicas:

- cálculo de cubicajes de arena en el estrán, de la playa arenosa seleccionada. Se emplea la metodología de Martínez et al, (1987).
- y ajuste de curvas logísticas, como las que recogen Beltrami (1987) y Draper Smith (1981).

RESULTADOS Y DISCUSION

**I. DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO**

Se fundamenta el modelo en las tres siguientes hipótesis de partida, en relación con la franja intermareal de una playa arenosa:

1. El proceso de ganancia de volumen se rige por la ecuación:

$$\frac{dv}{dt} = rv(1 - \frac{v}{K}) \quad (1)$$

en donde V = volumen,, t = tiempo,, dv/dt representa la variación de volumen en el tiempo,, r = inverso del intervalo de tiempo, para pasar de un volumen 1 a un volumen 2,, K = volumen máximo admisible para la playa.

2. El proceso de pérdidas se rige por la ecuación:

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\beta v^2}{A^2 + v^2} \quad (2)$$

en donde A = volumen mínimo característico de la playa., β = tasa de erosión (cambio de volumen en un tiempo dado).

3. El parámetro β se mantiene constante, hasta que aparezca un temporal, con el que toma otro valor.

De acuerdo con lo anterior, se plantea la ecuación de balance:

$$\frac{dv}{dt} = rv(1 - \frac{v}{K}) - \frac{\beta v^2}{A^2 + v^2} \quad (3)$$

El equilibrio entre pérdidas y ganancias se alcanza cuando no hay variación de volumen, esto es, cuando  $dv/dt = 0$ . Por tanto, el volumen de equilibrio de la playa será aquel que resulte como solución de:

$$rv(1 - \frac{v}{K}) - \frac{\beta v^2}{A^2 + v^2} = 0 \quad (4)$$

Si se definen:

$$p = \frac{K}{A^2} \frac{\beta}{r} - \frac{K^2}{3A^2} + 1 \quad (5) \quad , \quad q = \frac{1}{3} \frac{K^2}{A^3} \frac{\beta}{r} - \frac{2K}{3A} \left[ \left( \frac{K}{3A} \right)^2 + 1 \right] \quad (6)$$

$$\Delta(p,q) = q^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} p \right)^3 \quad (7)$$

puede probarse que, en función de estos términos, la ecuación (3) está en algunos de los casos recogidos en la figura 1.

Dado que:

$V' > 0$  implica V creciente, y

$V' < 0$  implica V decreciente,

según la figura 1:

- a.- En los casos 1 y 2, cualquiera que sea el volumen inicial de la playa, siempre se alcanza el volumen de equilibrio  $V_1$ .
- b.- En el caso 3, donde  $V_0$  se considera como el volumen inicial, se cumple que:
  - Si  $V_0 \leq V_2$ , el equilibrio se alcanza en  $V_1$
  - Si  $V_0 > V_2$ , el equilibrio se alcanza en  $V_2$
- c.- En el caso 4:
  - Si  $V_0 < V_1$ , el equilibrio se alcanza en  $V_1$
  - Si  $V_0 \geq V_2$ , el equilibrio se alcanza en  $V_2$
- d.- Y, por último, en el caso 5, se verifica que:
  - Si  $V_0 < V_2$ , el equilibrio se alcanza en  $V_1$
  - Si  $V_0 > V_2$ , el equilibrio se alcanza en  $V_3$ .

De todo lo anterior, se infieren una serie de consecuencias, en el análisis de los procesos sedimentarios de ganancias y pérdidas intermareales, de una playa arenosa:

1. Inicialmente la playa se encuentra en un cierto volumen de equilibrio.
2. Cuando cambie  $\beta/r$ , también lo harán las soluciones de equilibrio.
3. Tras un periodo de ajuste, la playa adoptará un nuevo volumen de equilibrio. (Si el  $\beta/r$  permanece constante el tiempo suficiente para ello).

4. Si en la nueva situación hubiera un solo volumen de equilibrio, éste se alcanzará con seguridad. Si hubiera dos o tres, se alcanzará uno u otro, de acuerdo con el caso en que se esté, y con la posición relativa de  $V_0$ , respecto a los nuevos volúmenes de equilibrio.

Cada playa y cada situación concreta de la misma, calma o temporal, dan lugar a un valor  $(p,q)$  que puede situarse en el plano  $pq$ . De acuerdo con (5) y (6), se prueba que para un valor constante de  $K/A$ , los posibles puntos  $(p,q)$  se sitúan sobre rectas. Sus posiciones están recogidas en la figura 2. Sobre esas rectas, la ubicación de un punto depende del valor que toma  $\beta/r$ . De esta forma, al variar  $\beta/r$ , lo hará el número de volúmenes de equilibrio y/o sus valores.

Cuando el cambio es sólo momentáneo y vuelve a su valor inicial, puede ocurrir:

1. Si la playa sólo tiene un volumen de equilibrio, se retorna a éste.
2. Si tiene varios volúmenes de equilibrio, la playa se estabiliza en el volumen de equilibrio que le correspondiese, de acuerdo con la posición del volumen originado por la perturbación.

## II. APLICACION DEL MODELO

El modelo se ha experimentado en la Playa de Sardina del Norte (figura 3), que se localiza en el NW de la Isla de Gran Canaria (España).

En la Playa se delimitó una franja intermareal, con una amplitud operativa de 9 metros y una longitud de 90 metros. De ella, se tiene una serie temporal de seis años de medidas mensuales de cubicajes ( tabla 1).

Se estima que el estrán tiene un  $K/A$  promedio en torno a 1.21. Esto quiere decir que se está en la situación  $c_1$ , de la figura 2. Su ambiente sedimentario intermareal evoluciona en el plano  $pq$ , dentro de la región de una solución.

A partir de análisis cuantitativos de la acreción-erosión en la franja delimitada (Martínez et al, 1991), la anterior evolución se sitúa, además, en las proximidades o dentro, de la banda de los estadios disipativos, conforme a la clasificación morfodinámica de Wright y Short (1983).

La ecuación (1) que modeliza la acreción tiene como solución:

$$V = \frac{K}{1 + ae^{-rt}} \quad (8)$$

A partir de la serie temporal de la tabla I, se analizan los periodos de acreción del 2-2-87 al 19-8-87, y del 23-12-87 al 28-9-88. Los parámetros de (8) pueden estimarse por mínimos cuadrados, a partir de estos datos. Se obtienen así las siguientes curvas:

$$V = \frac{774.6}{1+31.2e^{-0.13t}} \quad V = \frac{773.4}{1+6.6e^{-0.05t}}$$

que muestran un ajuste satisfactorio con los datos observados ( $V$  en  $m^3$  y  $t$  en días). Los perfiles de estas curvas dependen de los condicionantes oceanológicos, durante el proceso de acreción desde la erosión máxima.

Los procesos de erosión intermareal, ante temporales determinados, con sus

condicionantes de entorno, morfodinámicos y oceanológicos en general, ya han sido analizados por Martínez et al (1990), y los resultados se integran coherentemente en el modelo logístico desarrollado.

#### CONCLUSIONES

1. El comportamiento global de ganancias y pérdidas, en una franja intermareal arenosa, se puede describir mediante el modelo desarrollado en este trabajo.
2. La ecuación diferencial, que soporta el modelo, tiene un término de comportamiento logístico y otro de decrecimiento. Este último implica un efecto de saturación.
3. El modelo permite determinar los volúmenes intermareales de equilibrio de una playa, y las pautas de evolución de éstos, como respuestas a nuevas situaciones oceanológicas.
4. Los términos referentes a los procesos de ganancias y pérdidas se ajustan aceptablemente a los comportamientos empíricos.

#### BIBLIOGRAFIA

- Beltrami, E. 1987. Mathematics for dynamics modeling. Academic Press. Boston.
- Draper - Smith, 1981. Applied regression analysis. Second edition. Wiley & Sons.
- Martínez, J., Sastre, J., Alemán, G., Castro, J.J., Martín, A. y Robayna, D. 1987. Los movimientos de las superficies topográficas en las playas de arenas: métodos de investigación e interpretación. Revista de Obras Públicas. Julio - agosto. pp 469 - 483.
- Martínez, J., Melián, E., Reyes, F., Rúa-Figueroa, C., Silveira, P. y del Toro, C. 1990. La predicción de la erosión intermareal por temporales en playas arenosas del entorno canario. Libro del I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. pp 82-89. Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería. Universidad de las Palmas de Gran Canaria.
- Martínez, J., Melián, M., Reyes, F., Rúa-Figueroa, C. y del Toro, C. 1991. Caracterización morfodinámica de la Playa de Sardina del Norte (Gran Canaria, España). Resúmenes de la VIII Reunión sobre el Cuaternario (Valencia 16-20 de Septiembre de 1991. pp 35-36).
- Wright, L. y Short, A. 1983. Morphodynamics of beaches and surf zones in Australia, In: P.D.Komar (Editor), C.R.C. Handbook of Coastal Processes and Erosion, C.R.C. Press, Boca Ratón, Florida, pages 35-64.

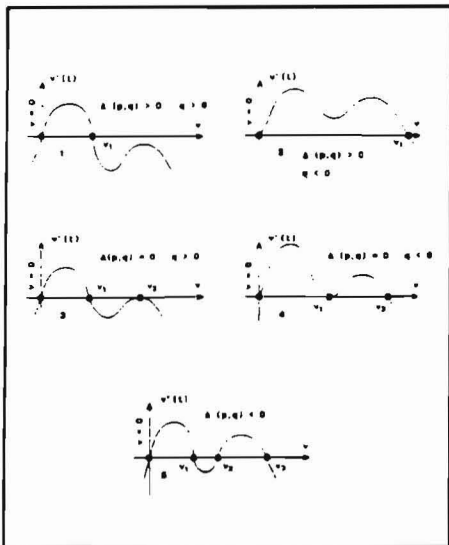


Figura 1. Posibles casos de volúmenes intermareales de equilibrio en una playa arenosa.

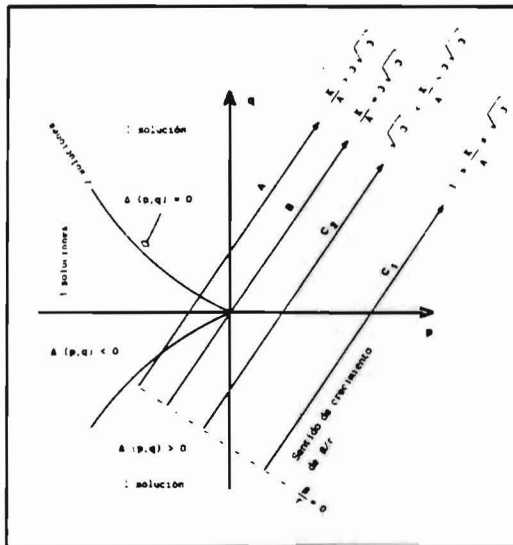


Figura 2. Condiciones de equilibrio en el plano pq.

Campaña	Ganancias o pérdidas	Campaña	Ganancias o pérdidas
19-12-85	1428.466	02-01-89	1411.910
21-01-86	1415.866	02-02-89	1411.210
21-02-86	1179.556	01-03-89	1342.080
23-03-86	1255.103	25-03-89	1270.910
01-05-86	1154.576	21-04-89	1225.820
30-05-86	1235.116	22-05-89	1336.130
28-06-86	1406.436	22-06-89	1380.198
26-07-86	1570.086	21-07-89	1435.460
01-09-86	1582.766	19-08-89	1276.116
04-10-86	1442.086	15-09-89	901.600
30-10-86	1541.176	21-10-89	1428.610
27-11-86	1466.956	30-10-89	1193.900
26-12-86	1544.316	17-11-89	1335.364
02-02-87	748.386	23-11-89	970.940
05-03-87	1214.276	10-02-90	674.794
08-04-87	1638.746	11-03-90	101.388
03-05-87	1455.766	11-04-90	0.000
01-06-87	1488.486	09-05-90	45.269
09-07-87	1370.206	09-06-90	1168.056
27-07-87	1502.806	05-07-90	1110.356
19-08-87	1488.166	06-08-90	1231.745
30-09-87	1336.446	27-09-90	1142.467
04-11-87	1035.046	04-10-90	1459.836
26-11-87	1071.196	04-11-90	1367.511
23-12-87	716.026	02-12-90	1146.804
21-01-88	1098.536	06-01-91	1255.238
26-02-88	1239.240	02-02-91	1235.620
26-03-88	1447.794	15-02-91	1390.212
03-05-88	1389.580	23-02-91	1104.068
03-06-88	1260.811	02-03-91	1239.246
30-06-88	1325.422	12-03-91	3901.097
28-07-88	1378.178	28-04-91	1344.827
28-08-88	1477.867	30-05-91	2409.969
28-09-88	1798.032	31-07-91	2221.106
27-10-88	1394.161	29-08-91	1285.079
04-12-88	1373.070		

Tabla 1. Serie temporal (6 años) de ganancias y pérdidas sedimentarias intermareales. Playa de Sardina del Norte.

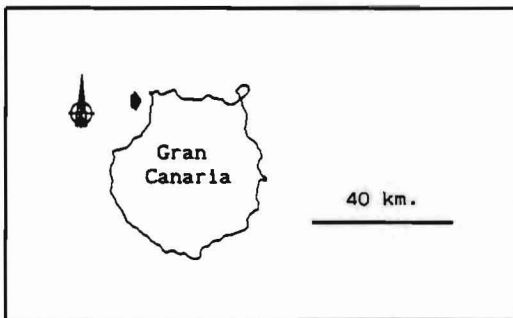


Figura 3. Localización geográfica de la playa arenosa en seguimiento: Sardina del Norte (Gran Canaria).