SUMA Y PRODUCTO DE RAICES COMPLEJAS: UN METODO INTUITIVO

José Angel Dorta Díaz
(Universidad de La Laguna)

SUMARIO

En este trabajo introducimos un método intuitivo para la resolución del conocido problema de hallar la suma y el producto de las raíces enésimas de un número complejo arbitrario no nulo, y se basa, fundamentalmente, en utilizar exclusivamente la primera raíz del elemento complejo elegido.

ABSTRACT

The objective of this paper is to introduce a intuitive method for the resolution of the well known problem of to find the sum and the product of all the n-ths roots of an arbitrary complex number non zero. This method is founded, principally, in to make use exclusively ofthe first root, z_0, of the complex element that has been chosen.

INTRODUCCION

Llamemos $\mathcal{R}_n(z)$ al conjunto de las raíces enésimas de z, $z\in\mathbb{C}^*$, es decir:

$0\le\alpha'<2\pi$. Es bién conocido que si $z_k\in\mathcal{R}_n(1)$, $n\ge 2$, entonces se tiene:

$$\mathcal{R}_n(z)=\left\{z_o,z_1,\dots,z_{n-1}\right\} \quad , \quad z_k=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha'+2\pi k}{n}} \quad \text{con} \quad k=0,1,\dots,n-1, \quad y \quad \alpha'+2\pi k=\alpha=\mathrm{Arg}(z),$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \quad y \quad \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \pm 1}$$

según que n sea impar o par respectivamente, donde

$$\mathcal{R}_n(1)=\left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{n}},\ e^{i\frac{4\pi}{n}},\dots,\ e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}\right\}$$

Véase (3) o (4) p. 20-problema 35.

Por otra parte, los elementos de $\mathcal{R}_n(z)$, $z\in\mathbb{C}^*$ pueden obtenerse a partir de los de $\mathcal{R}_n(1)$ sin más que aplicar a éstos el producto de las transformaciones geométricas: *homotecia de centro el origen de coordenadas y razón raíz enésima del módulo de z, por un giro de centro el orígen de coordenadas y amplitud* $\frac{\alpha'}{n}$, *es decir:*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}_n(1) & & \xrightarrow{\quad h\cdot g \quad} & & \mathcal{R}_n(z) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
1 & \xrightarrow{h} & |z|^{\frac{1}{n}} & \xrightarrow{g} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha'}{n}} \\
e^{i\frac{2\pi}{n}} & \xrightarrow{h} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{2\pi}{n}} & \xrightarrow{g} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{2\pi}{n}}e^{i\frac{\alpha'}{n}} \\
e^{i\frac{4\pi}{n}} & \xrightarrow{h} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{4\pi}{n}} & \xrightarrow{g} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{4\pi}{n}}e^{i\frac{\alpha'}{n}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}} & \xrightarrow{h} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}} & \xrightarrow{g} & |z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}e^{i\frac{\alpha'}{n}}
\end{array}$$

Es por esa razón por la que el PRODUCTO de todos los elementos de $\mathcal{R}_n(z)$, $n\ge 2$ toma la forma:

$$P = \left(|z|^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(e^{i\frac{\alpha'}{n}}\right)^n \left(1\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{n}}\cdot\ldots\ldots\cdot e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}\right) = \pm|z|e^{i\alpha'} = \pm z$$

ya que el tercer paréntesis del segundo miembro de la igualdad anterior es ±1, según que n sea impar o par respectivamente, y la SUMA esta otra:

$$S = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha'}{n}} \left(1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+e^{i\frac{4\pi}{n}}+\ldots\ldots+e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}\right) = 0$$

puesto que la expresión entre paréntesis es nula. Por todo ello podemos afirmar que

$$\boxed{z\in\mathbb{C}^* \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \quad y \quad \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \pm z}$$

según que n sea impar o par respectivamente, donde $z_k\in\mathcal{R}_n(z)$, $\forall k=0,1,\ldots,n-1$; $n\geq2$.

1.- Producto de las raíces enésimas de z, $z\in\mathbb{C}^*$, en función de z_n.

1.1.- Caso en el que n *(íncide de las raíces)* es PAR.

Comencemos el exponieno un ejemplo sencillo para más tarde generalizar el procedimiento; para ello tratemos de multiplicar las raíces octavas de un número complejo arbitrario $z\in\mathbb{C}^*$. Al ser el índice par puede observarse que la opuesta de una raíz octava de z es otra raíz octava de z, propiedad que se verifica siempre que n sea par; en otras palabras:

Si n es par entonces es cierto que

$$\boxed{\forall z_k\in\mathcal{R}_n(z)\Rightarrow -z_k = z_{\frac{n}{2}+k}\in\mathcal{R}_n(z)},$$

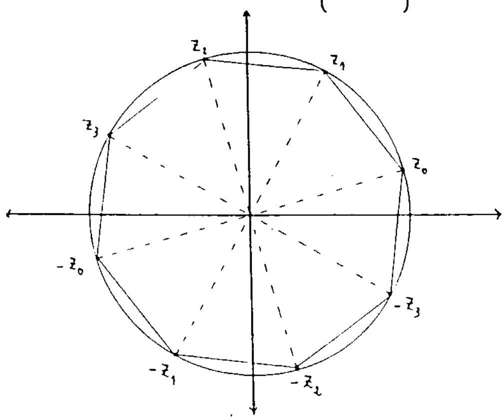
$k=0,1,\ldots,\frac{n}{2}-1$, *(véase intuitivamente en la Fig. 1);* Así pues el producto de los elementos de $\mathcal{R}_8(z)$ podremos escribirlo de la manera siguiente:

$$P = z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 \cdot z_6 \cdot z_7 = (z_0 \cdot z_4)\cdot(z_1 \cdot z_5)\cdot(z_2 \cdot z_6)\cdot(z_3 \cdot z_7) =$$

$$= \left[z_0(-z_0)\right]\left[z_1(-z_1)\right]\left[z_2(-z_2)\right]\left[z_3(-z_3)\right] =$$

$$= (-1)^4 z_0^2 \left[z_0 e^{i\frac{2\pi}{8}}\right]^2 \left[z_0 e^{i\frac{4\pi}{8}}\right]^2 \left[z_0 e^{i\frac{6\pi}{8}}\right]^2 =$$

$$= z_0^8\, e^{i\frac{24}{8}\pi} = z_0^8\, e^{i3\pi} = z_0^8\, e^{i\pi} = -z_0^8 = -\left(|z|^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\alpha'}{8}}\right)^8 = -|z|\, e^{i\alpha'} = -z.$$



3

Generalizando este procedimiento y siempre que n sea par, el producto de las n raíces de z, $z \in \mathbb{C}^*$, toma la forma:

$$P = (-1)^{\frac{n}{2}} z_0^2 \left[z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}}\right]^2 \left[z_0 e^{i\frac{4\pi}{n}}\right]^2 \cdots\cdots \left[z_0 e^{i\frac{2\left[\frac{n}{2}-1\right]}{n}\pi}\right]^2 =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} z_0^n \left[e^{i\frac{2\pi}{n}\left[2+4+6+\dots\dots+2\left[\frac{n}{2}-1\right]\right]}\right]$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} z_0^n \; e^{i\frac{2\pi}{n}\left[\frac{2-n+2}{2}\left[\frac{n}{2}-1\right]\right]}.$$

Así pues, el producto de las n raíces enésimas de z es:

$$\boxed{P = (-1)^{\frac{n}{2}}\, z\, e^{i\left[\frac{n}{2}-1\right]\pi}},$$

ya que $z_0^n \overset{\smile}{=} z$ al ser z_0 raíz enésima de z y $n/2$ el número de *«parejas» (raíz enésima + su opuesta)* que intervienen en el producto.

Ahora bien:

Si n es un número par de la forma $n=2t$, t entero impar, entonces $n/2$ es impar $(n=2t,\ t=2h+1,\ h\in\mathbb{N} \Rightarrow n/2 = 2(2h+1)/2 = 2h+1,\ h\in\mathbb{N})$, de donde se deduce que el producto es

$$\boxed{P = (-1)\cdot z\cdot 1 = -z}$$

Si n en un número par de la forma $n=2t$, t entero par, entonces $n/2$ es par $((n=2t,\ t=2h,\ h\in\mathbb{N} \Rightarrow n/2 = 2(2h)/2 = 2h,\ h\in\mathbb{N})$, de donde se deduce que el producto **P** es:

$$\boxed{P = 1\cdot z\cdot(-1) = -z}$$

En todo caso si n es par se llega a

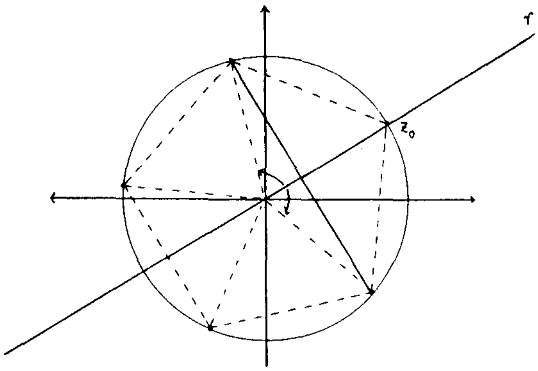
$$\boxed{z\in\mathbb{C}^{\bullet} \quad y \quad z_k\in\mathcal{R}_n(z) \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} z_k = -z}$$

1.2.- Caso en el que n *(índice de las raíces)* es IMPAR:

Igual que en el caso anterior comencemos por un ejemplo para posteriormente generalizarlo. *(Hagamos notar que cuando el índice n es impar, la puesta de una raíz enésima NUNCA es una raíz enésima y por ello el proceso a seguir, en este caso, es diferente).* Así pues tratemos de multiplicar las cinco raíces quintas de un número complejo arbitrario $z\in\mathbb{C}^{\bullet}$, en función de la primera de ellas, $z_0\in\mathcal{R}_5(z)$. Tal como se observa en la *Figura 2,* tracemos la recta r que pasa por el origen y por z_0. Obviamente esta recta será un eje de simetría del *«Pentágono»* en cuyos vértices se encuentran las cinco raíces de z. En vista de todo ello podemos escribir:

$$P = z_0\left[z_0 e^{i\frac{2\pi}{5}}\cdot z_0 e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right]\left[z_0 e^{i\frac{4\pi}{5}}\cdot z_0 e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right]$$

donde cada uno de los paréntesis indica el producto de una raíz por su simétrica respecto de r. Además, el producto de las exponenciales complejas de cada uno de los paréntesis anteriores es, obviamente, 1, de donde se obtiene que **P** es P es $z_0^5 = z$.



La generalización de este problema es como sigue: Sea $z \in \mathbb{C}^*$ y $z_k \in \mathcal{R}_n(z)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$; n impar. El producto **P** de estas z_k se podrá escribir en función de z_0 de la forma siguiente:

$$\mathbf{P} = z_0 \left[z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}} \cdot z_0 e^{-i\frac{2\pi}{n}} \right] \left[z_0 e^{i\frac{4\pi}{n}} \cdot z_0 e^{-i\frac{4\pi}{n}} \right] \cdots\cdots \left[z_0 e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} \cdot z_0 e^{-i\frac{(n-1)\pi}{n}} \right]$$

y desde el momento que el producto de la exponenciales de cada paréntesis es 1 se llega a que $\mathbf{P} = z_0^n = z$.

Sintetizando los apartados 1.1 y 1.2 podemos concluir:

$$\boxed{z \in \mathbb{C}^* \quad \text{y} \quad z_k \in \mathcal{R}_n(z) \;\Rightarrow\; \prod_{k=0}^{n-1} z_k = \pm z}$$

según que n sea impar o par respectivamente.

2.- Suma de las raíces enésimas de z, $z \in \mathbb{C}^*$, **en función de** z_0.

2.1.- Caso n PAR.

La demostración de que la suma de las n raíces enésimas de z, n par, es nula, es trivial, puesto que como ya se ha dicho la opuesta de una raíz enésima es otra raíz enésima, cuando n es par, y por ello

$$S = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_{\frac{n}{2}-1} + \underbrace{z_{\frac{n}{2}}}_{-z_0} + \underbrace{z_{\frac{n}{2}+1}}_{-z_1} + \cdots + z_{n-2} + \underbrace{z_{n-1}}_{-z_{\frac{n}{2}-1}} =$$

$$= \left[z_0 + (-z_0) \right] + \left[z_1 + (-z_1) \right] + \left[z_2 + (-z_2) \right] + \cdots + \left[z_{\frac{n}{2}-1} + (-z_{\frac{n}{2}-1}) \right] = 0$$

2.2.- Caso n IMPAR.

Si n es impar la suma se podrá expresar:

$$S = z_0 + \left[z_0 e^{i\frac{2\pi}{n}} + z_0 e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right] + \left[z_0 e^{i\frac{4\pi}{n}} + z_0 e^{-i\frac{4\pi}{n}}\right] + \ldots\ldots + \left[z_0 e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}} + z_0 e^{-i\frac{(n-1)\pi}{n}}\right]$$

Ahora bien, puesto que las partes imaginarias de las expresiones entre paréntesis se anulan, la suma anterior se puede escribir

$$S = z_0\left[1 + 2\cos 2\pi/n + 2\cos 4\pi/n + \ldots\ldots + 2\cos (n-1)\pi/n\right] =$$

$$= z_0\left[1 + 2\{\cos 2\pi/n + \cos 4\pi/n + \ldots\ldots + \cos (n-1)\pi/n\}\right]$$

La expresión encerrada entre las llaves del último corchete vale -1/2, como justificaremos posteriormente, y por ello la suma toma la forma:

$$\boxed{S = z_0\ (1 + 2(-1/2)) = z_0 \cdot 0 = 0.}$$

La justificación de que $\{\cos 2\pi/n + \cos 4\pi/n + \ldots\ldots + \cos(n-1)\pi/n\}$ es igual a -1/2 estriba en lo siguiente: Como ya hemos dicho, la suma de las raíces enésimas de la unidad compleja es cero para $n \geq 2$, por ello podemos escribir:

$$0 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \ldots\ldots + e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}} =$$

$$= 1 + \{\cos 2\pi/n + \cos 4\pi/n + \ldots + \cos 2(n-1)\pi/n\} + i\{\mathrm{sen}\, 2\pi/n + \mathrm{sen}\, 4\pi/n + \ldots + \mathrm{sen}\, 2(n-1)\pi/n\}$$

$$= 0 + i0$$

de donde se deduce que

$$\{\cos 2\pi/n + \cos 4\pi/n + \ldots\ldots + \cos 2(n-1)\pi/n\} = -1$$

y

$$\{\mathrm{sen}\, 2\pi/n + \mathrm{sen}\, 4\pi/n + \ldots\ldots + \mathrm{sen}\, 2(n-1)\pi/n\} = 0$$

Por otra parte, como n es impar podemos escribir:

$$\cos 2\pi/n + \cos 4\pi/n + \ldots + \cos(n-3)\pi/n + \cos(n-1)\pi/n + \cos(n+1)\pi/n + \cos(n+3)\pi/n + \ldots +$$

$$+ \cos 2(n-2)\pi/n + \cos 2(n-1)\pi/n = -1$$

pero es fácil ver que el primer y último sumando del primer miembro de la igualdad anterior son iguales:

$$\cos 2(n-1)\pi/n = \cos(-2\pi/n + 2\pi) = \cos 2\pi/n \ ,$$

que el segundo sumando es idéntico al penúltimo:

$$\cos 2(n-2)\pi/n = \cos(-4\pi/n + 2\pi) = \cos 4\pi/n \ ,$$

y así llegamos a los dos sumandos intermedios *(nótese que el número de éstos es par ya que hemos pasado el 1 al segundo miembro)* que evidentemente son iguales al ser los argumentos que comparecen de la forma:

$$\pi - \pi/n \quad y \quad \pi + \pi/n$$

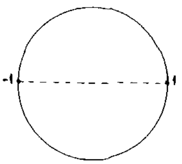
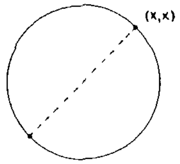
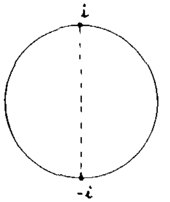
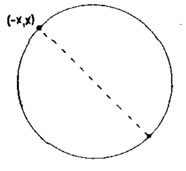
Todos estos razonamientos nos permiten afirmar que

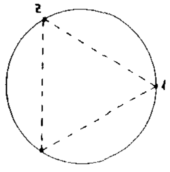
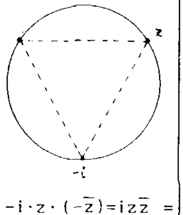
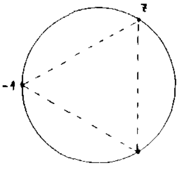
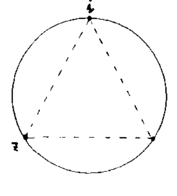
$$\cos 2\pi/n + \cos 4\pi/n + ...+ \cos(n-1)\pi/n = -1/2$$

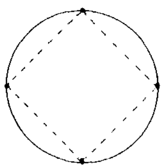
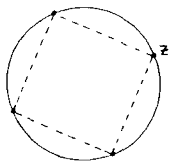
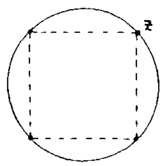
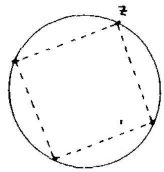
c.q.d.

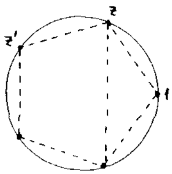
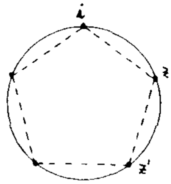
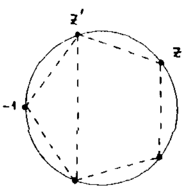
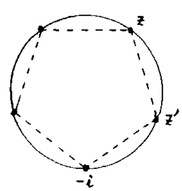
3.- Una forma de trabajo INTUITIVO-DIDACTICA para los alumnos.

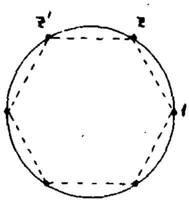
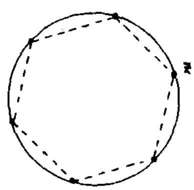
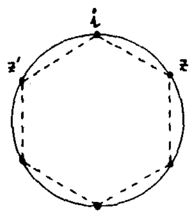
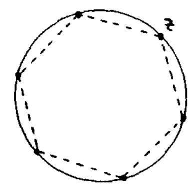
En este apartado estudiaremos, esquemáticamente, algunos casos particulares que serán de gran utilidad para la formación, en este campo, de nuestros alumnos. Nos circunscribiremos al estudio de las raíces de **1, i, -1 y -i.**

$\mathcal{R}_2(1)$	$\mathcal{R}_2(i)$	$\mathcal{R}_2(-1)$	$\mathcal{R}_2(-i)$
			
$P = 1\cdot(-1) = -1$	$P=(x,x)\cdot[-(x,x)]= -(0,2x^2)=-(0,1)=-i$	$P = i\cdot(-i)=-i^2= 1$	$P=(-x,x)\cdot(-x,x) = -(0,-2x^2)=(0,1)=i$
$S = 0$	$S = 0$	$S = 0$	$S = 0$

$\mathcal{R}_3(1)$	$\mathcal{R}_3(i)$	$\mathcal{R}_3(-1)$	$\mathcal{R}_3(-i)$
			
$P = 1\cdot z\cdot z^{-1}= 1$	$P= -i\cdot z\cdot(-\bar{z})=iz\bar{z} = i(x^2+y^2,0)=i(1,0)= = i$	$P = -1\cdot z\cdot z^{-1}= -1$	$P= i\cdot z\cdot(-\bar{z})=-iz\bar{z} = -i(x^2+y^2,0) = -i$
$S=1+2\cos 2\pi/3 = 0$	$S=-i+2i\,\mathrm{sen}\,\pi/6 = 0$	$S=-1+2\cos\pi/3 = 0$	$S=i+2i\,\mathrm{sen}(-\pi/6)= 0$

$\mathcal{R}_4(1)$	$\mathcal{R}_4(i)$	$\mathcal{R}_4(-1)$	$\mathcal{R}_4(-i)$
			
$P = 1\cdot i\cdot(-1)\cdot(-i)$ $= -1$	$P=z(iz)(iiz)(iiiz)$ $= i^6z^4=-z^4 = -i$	$P = z(-z)\bar{z}(-\bar{z}) =$ $=z^2\cdot\bar{z}^2=(z\bar{z})^2= 1$	$P=z(iz)(iiz)(iiiz)$ $=i^6z^4=-(-i) = i$
$S = 0$	$S = 0$	$S = 0$	$S = 0$

$\mathcal{R}_5(1)$	$\mathcal{R}_5(i)$	$\mathcal{R}_5(-1)$	$\mathcal{R}_5(-i)$
			
$P=1\cdot z\cdot z^{-1}\cdot z'\cdot z'^{-1}$ $= 1$	$P= iz(-\bar{z})z'(-\bar{z}') =$ $i\|z\|^2\|z'\|^2 = i$	$P = -1zz^{-1}z'z'^{-1}=$ $= -1$	$P=-iz(-\bar{z})z'(-\bar{z}')$ $-i\|z\|^2\|z'\|^2 = -i$
$S=1+2(\cos 2\pi/5 + \cos 4\pi/5)=$ $1+2(-1/2) = 0$	$S=i+2i(\operatorname{sen}\pi/10 - \operatorname{sen}3\pi/10)=$ $i+2i(-1/2) = 0$	$S=-1+2(\cos\pi/5 + \cos 3\pi/5)=$ $-1+2(1/2) = 0$	$S=-i+2i(\operatorname{sen}3\pi/10 - \operatorname{sen}\pi/10)=$ $-i+2i(1/2) = 0$

$\mathcal{R}_6(1)$	$\mathcal{R}_6(i)$	$\mathcal{R}_6(-1)$	$\mathcal{R}_6(-i)$
			
$P=1zz^{-1}z'z'^{-1}(-1)$ $= -1$	$P= z^6 e^{15\pi/3} = z^6 e^{5\pi} =$ $= -z^6 = -i$	$P=zz^{-1}\, i\, z'z'^{-1}(-i)$ $= 1$	$P= z^6 e^{15\pi/3} = z^6 e^{5\pi} =$ $= -z^6 = -(-i) = i$
$S = 0$	$S = 0$	$S = 0$	$S = 0$

B i b l i o g r a f í a

(1) APOSTOL, T.M.: *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, S.A. Barcelona 1960.

(2) DERRICK, W.R.: *Variable compleja con aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. México, 1987.

(3) DORTA DIAZ, J.A.: «Algunas consideraciones sobre la circunferencia unidad», Revista *Números* n°19, pags. 13-40. Tenerife 1989.

(4) SPIEGEL, M.R.: *Variable compleja.* Serie de compendios SCHAUM, McGraw-Hill, Bogotá, 1974.