ENSEÑANZA GENETICA DEL CALCULO INFINITESIMAL UNA APROXIMACION A LA LOGICA HISTORICA DE ESTA DISCIPLINA

Fernando Fernández Rodríguez
(S.C.P.M. «Isaac Newton»)

RESUMEN

Desde el planteamiento de los primeros problemas volumétricos por los griegos, el Cálculo recorre un largo camino de veintidós siglos, hasta introducir el concepto de Función.

El Cálculo se introduce hoy en las aulas desde una aproximación abstracta y muy poco geométrica que produce entre los alumnos una seria descontextualización.

La larga colección de métodos infinitesimales heurísticos, surgidos antes de la aparición de los métodos analíticos, no puede ser ignorada a la hora de elaborar una secuencia didáctica significativa de los conceptos del Cálculo.

La lógica histórica presenta al Cálculo como una *«geometría experimental»* que explora las figuras curvilíneas a partir de las rectilíneas y las espaciales a partir de las planas.

Algunas de las ideas que se exponen a continuación son el punto de partida para una introducción de los conceptos del Cálculo Infinitesimal, que podrán ya iniciarse en la Segunda Etapa de la E.G.b. o en la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la Reforma en curso.

ABSTRACT

Since the first volumetric problms were created by Greeks, Claculus went through a long way of twenty two centuries before the concept of Function was introduced.

Nowadays, Calculus is explained in the classroom from an abstract and barely geometric approach which produces a serious lack of comprehension.

The large collection of heuristic infinitesimal methods, which appeared before the analitic methods, can not be ignored when we formulate a significant didactic sequence of the concepts of Calculus.

Historical logic presents Calculus as an *«experimental geometry»* which explores curvilinear figures starting from the rectilinear ones, and the space figures from the plane ones.

Some of the ideas which follow are the starting point for an introduction of the concepts of Infinitesimal Calculus, which could be introduced in the second stage of Obligatory Education.

INTRODUCCION

La función es un concepto bastante tardío en la historia del Cálculo. Pese a que la idea de dependencia funcional rondase ya por la cabeza de Descartes, no será hasta bien entrado el siglo XVIII cuando Lenard Euler introduce de forma explícita las funciones y transforma el Cálculo en aquella parte de las matemáticas que tiene por objetivo el estudio de dichos objetos.

El Cálculo, cuyo punto de partida puede situarse en el siglo V (a.C) cuando Demócrito se enfrenta con el problema del volumen de la pirámide, había tardado más de veintidós siglos en recorrer el largo camino hacia el concepto de función.

El objetivo de este artículo es intentar mostrar como la recuperación de la memoria histórica, de una larga colección de *métodos infinitesimales heurísticos,* puede ser de gran ayuda en los intentos de elaborar cualquier secuencia didáctica significativa de los conceptos del Cálculo.

El principal problema por el que atraviesa la enseñanza del Cálculo es su brutal descontextualización, la génesis falsa con que se muestra a los alumnos. La *lógica histórica* puede ser de gran ayuda a la hora de superar la transposición didáctica que produce el concepto de función en este área de conocimientos.

La colección de problemas que se mostrarán a continuación sirven además para presentar el Cálculo a modo de una *geometría experimental,* en la que se han de buscar procedimientos audaces para rectificar figuras curvilineas a partir de las rectilineas. Todas estas ideas tienen igualmente el objetivo de rellenar el vacío, particularmente abismal en la introducción del Cálculo, entre lo inductivo y lo deductivo, entre el razonamiento y la experiencia concreta.

Métodos mecánicos de Arquímedes

La matemática griega tropezó progresivamente con problemas, cuya solución precisa recurrir a lo *«infinitamente pequeño»;* pese a las contradicciones que encerraba este dudoso y escurridizo concepto, las ideas infinitesimales, se mostraba imprescindible en los incipientes cálculos de áreas y volúmenes.

En el siglo IV (a.C), Eudoxo encuentra un método de controlar las aproximaciones sucesivas a una figura curvilinea por otras rectilineas, evitando utilizar cualquier referencia a lo infinitamente pequeño. Se trataba del laborioso *«Método de Exahusción»,* que garantizará a los matemáticos griegos y a las futuras generaciones, un procedimiento de cálculo lógicamente incuestionable.

Arquímedes perfeccionó em método exahustivo, y obtuvo las áreas y volúmenes de múltiples objetos geométricos.

El hallazgo en 1906 de un antiguo pergamino ha puesto de manifiesto que Arquímedes poseía un método auxiliar con el que calcular las áreas y volúmenes, aplicando el método de exahusción para demostrar resultados que ya conocía de antemano. Se trataba de una colección de procedimientos mecánicos, consistentes en subdividir la superficie que pretendía medirse, en una infinidad de segmentos *«indivisibles»,* carentes de espesor, que posteriormente serían recompuestas, dando lugar a otra figura más sencilla, cuyos indivisibles, habrán de equilibrarse con los de la primera, en los platillos de una balanza. Arquímedes saca así el máximo partido a las leyes físicas que él mismo va descubriendo: En una palanca en equilibrio, la potencia por su brazo, es igual a la resistencia por el suyo.

El ejemplo más característico de aplicación de estas ideas, es el cálculo del área del segmento parabólico.

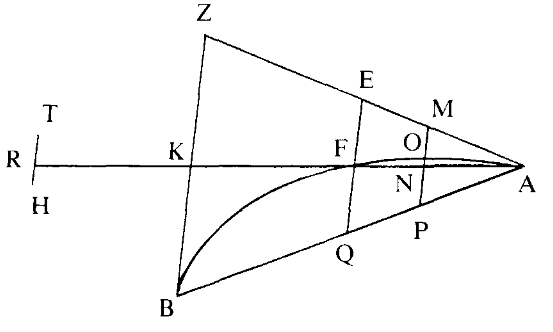
Sea ABF un segmento parabólico. Consideremos la recta tangente AZ trazada a la parábola por el punto A.

Por el punto medio Q de AB, tracemos la línea QE paralela al eje de la parábola, que cortará al segmento AZ en el punto E y a la parábola en F.

Sea BZ paralela a EQ, intersectando a la tangente en Z, y que cortará a la recta AF en un punto K. Sea la parelela a EQ por P, cortando en N a KA, y en el punto O a la parábola.

Tomamos un punto R en la prolongación del segmento KA, tal que

$$KF = KR$$



Arquímedes demuestra basándose en la geometría de la parábola que:

$$PM \cdot KN = PO \cdot KR$$

Seguidamente considera la recta RA como una palanca de brazo AR y punto de apoyo situado en K. Coloca en uno de sus extremos el contrapeso OP = TH y en el otro extremo el contrapeso MP, con ello la palanca quedará en equilibrio.

Como el triángulo BZA está formado por líneas como la PM, y en segmento parabólico consta de líneas como PO, si trasladamos los respectivos segmentos obtenidos de modo similar al OP, a la posición TH, y concentramos con ello toda la masa del segmento parabólico en el punto R, si dejamos el triángulo BZA situado en la misma posición que ocupa en la figura, el sistema resultante estará en equilibrio mecánico.

Es decir, que toda la masa del segmento parabólico concentrada en el punto R, equilibrará a la masa del triángulo concentrada en su centro de gravedad X.

Como $KX = \frac{1}{3}$ KA por ser X el centro de gravedad, resulta

$$RK. \text{ Area } (BFA) = KX \text{ . Area } (BZA) = \frac{1}{3} RK. \text{ Area } (BZA)$$

por tanto

$$\text{Area } (BFA) = \frac{1}{3} \text{ Area } (BZA)$$

En virtud de las propiedades de la tangente a la parábola, tendremos que QF = FE y aplicando el teorema de Tales, BK = KZ.

En consecuencia: Area (BZA) = 2. Area (BKA) = 4. Area (BFA)

y en definitiva,

$$\text{Area } (BFA) = \frac{4}{3} \text{ . Area } (BFA)$$

Lo que concluye que el área del segmento parabólico, es $\frac{4}{3}$ la del triángulo inscrito BFA.

Estos *«indivisibles»*, cuya existencia será desconocida hasta el siglo XX cuando se recuperan los trabajos de Arquímedes, habrán de ser objeto de sucesivos redescubrimientos.

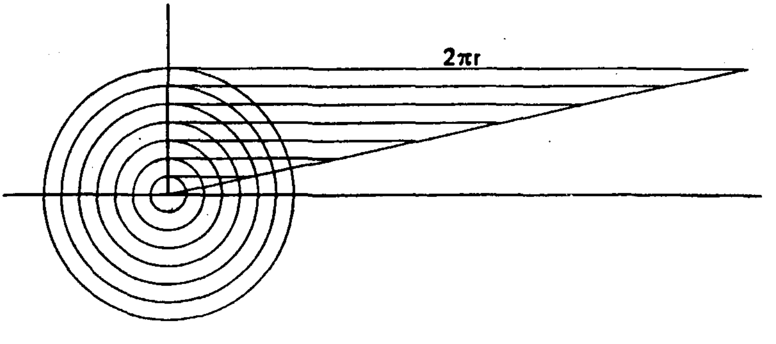
El denominador común de todos estos trabajos, aparte de un extraordinario derroche de ingenio, es la búsqueda de una alternativa al engorroso método exahustivo, de nuevos sistemas de cálculo que permitan un acceso rápido y directo los resultados. Estos hallagos se pierden en la Edad Media.

Abrahan Savasorda

Este comentarista del Talmud, libro de la sabiduría hebrea, vivió en Barcelona en el siglo XI, y es autor de un curioso sistema para calcular el área del círculo, denominado de la *«media cebolla»*.

Sea un círculo de radio R. Savasorda imaigna esta figura compuesta por una infinidad de circunferencias concéntricas cuyos radios disminuyen progresivamente desde R hasta cero.

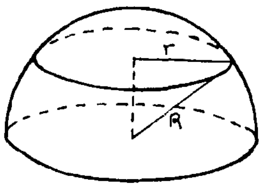
A continuación extiende todas estas circunferencias en forma de segmentos rectilineos, que apilados en un mismo orden darán lugar a un triángulo rectángulo.

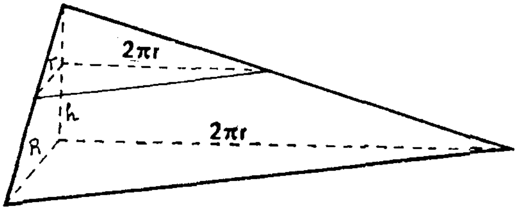


La base de este triángulo, será la longitud de la circunferencia exterior, por tanto **2πr** y su altura será R. El área del círculo coincidirá entonces con la del triángulo.

Profundizando en esta idea, se puede calcular igualmente el volumen de una semiesfera de radio R.

Las secciones circulares de una semiesfera a una altura h, podemos hacerlas corresponder con las secciones de una pirámide a esa misma altura h.





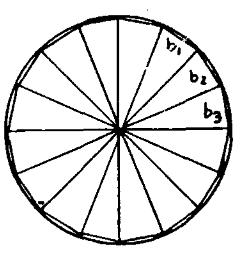
Los volúmenes de ambas figuras son iguales, y a través de la pirámide conoceremos el volumen de la esfera.

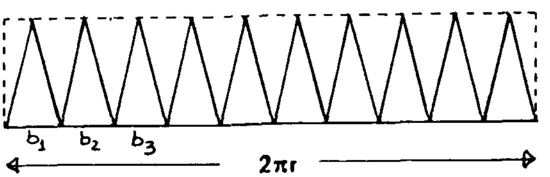
Nicolás de Cusa

En el siglo XV, un ilustre eclesiástico, pasará a la historia de las matemáticas, gracias a una peculiar solución del problema de la cuadratura del círculo, que desafía las cuidadosas demostraciones empleadas por Arquímedes.

Cusa aproxima el círculo de radio R por una infinidad de triángulos sucesivos más estrechos, que colocaba de manera radial. Sus bases b_1, b_2, ..., b_n, ... quedarían situadas sobre la circunferencia exterior, formando un polígono que la aproxima cuanto se quiera. El área del círculo también será una perfecta aproximación de la suma de las áreas de los triángulos.

Si extendemos ahora la circunferencia sobre un segmento rectilineo de longitud 2nR, los triángulos cubren la mitad de un paralelogramo que tiene como base dicho segmento, y como altura R.



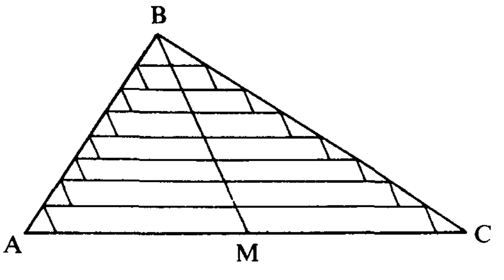


Simon Stevin: Arquímedes de Holanda

A finales del siglo XVI, el ingeniero de Brujas Simon Stevin, en sus tratados de *«Estática»* e *«Hidrostática»* de 1586, da un considerable paso adelante en la aplicación de las argucias infinitesimales a los problemas que plantea la Física de su época. El punto de vista con que los acomete Stevin es puramente geométrico, pero en sus ideas subyace peerfectamente claro el concepto de límite. Son especialmente reseñables, sus versiones del cálculo del centro de gravedad de un triángulo y de la presión ejercida por un fluido contra las paredes del recipiente que lo contiene.

Para demostrar que el centro de gravedad de un triángulo se encuentra situado en el baricentro *(punto de intersección de las medianas),* es suficiente probar que se encuentra sobre una cualquiera de ellas. Stevin procede del siguiente modo:

Consideremos como base al lado AC del triángulo, en el que inscribiremos sucesivos paralelogramos de lados paralelos a la base AC y a la mediana BM, respectivamente.



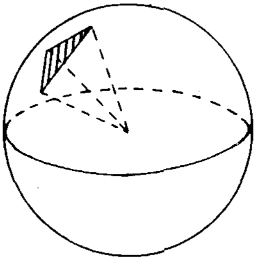
La figura así formada, tendrá su centro de gravedad situado sobre la mediana BM, debido a la simetría que ésta presenta.

Solo queda transformar la pila de paralelogramos en su figura límite: el triángulo que la circunda. Para ello aumentamos indefinidamente el número de paralelogramos en cuestión, con lo que desaparecerá progresivamente cualquier diferencia entre la figura en cuestión y el triángulo de partida.

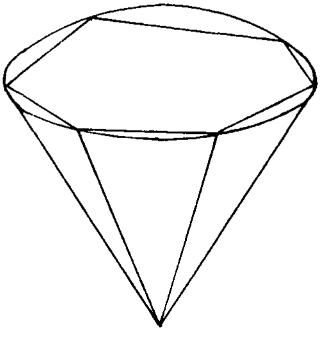
Kepler

El año 1612 fue de una excelente cosecha de vino. Kepler aprovechó para elaborar un tratado sobre el cálculo de volúmenes que tituló *«Nova stereometría doliorum vinariorum»*. Diversos tipos de toneles y sólidos de revolución son cubicados por procedimientos infinitesimales, que en muchos casos recuerdan a los de Nicolás de Cusa.

El volumen de la esferá será calculado considerando esta figura compuesta de una infinidad de pirámides, cuyo vértice común será el centro de la esfera, y su altura el radio de la misma.

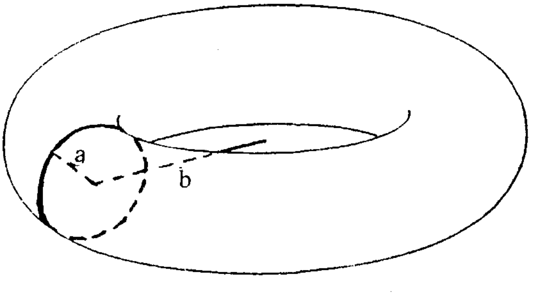


El cono circular es considerado como un tipo especial de pirámide cuya base está formada por infinitos lados.

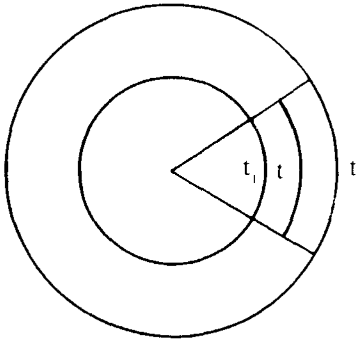


Kepler resucita también un antiquísimo hallazgo de la geometría griega conocido hoy como teorema de Papus. Se trata de que volumen del toro de radio a y b, es igual al área del círculo generador, multiplicado por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad, al engendrar por revolución el toro.

$$V = (\pi a^2)(2\pi b)$$



Para demostrarlo, Kepler diseciona el toro en una infinidad de rodajas, con planos que pasan através de su eje. Como cada rodaja es más fina en la cara interior que en la exterior, Kepler supone que su volumen infinitesimal es $V = \pi a^2 t$, siendo $t = t_1 + t_2 / 2$.



El volumen del toro lo encontraremos sumando el volumen de todas las rodajas:

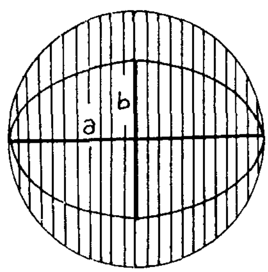
$$V = (\pi a^2)(\Sigma t) = (\pi a^2)(2\pi b)$$

Donde Σt se ha identificado con la circunferencia de radio b.

Fue también obra de Kepler el redescubierto de un resultado de Arquímedes, desconocido en su época. Se trataba del área de la elipse.

Consideremos una circunferencia de radio «a» y una elipse de semiejes «a» y «b».

Kepler descompone la elipse en indivisibles perpendiculares a su eje mayor, prolongando tal descomposición a la circunferencia que circunscribe la elipse.



Como hoy día podemos observar fácilmente a través de las ecuaciones, las ordenadas de dos puntos con la misma abscisa x en ambas figuras, son respectivamente:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

La razón de ambas ordenadas será entonces $\frac{b}{a}$.

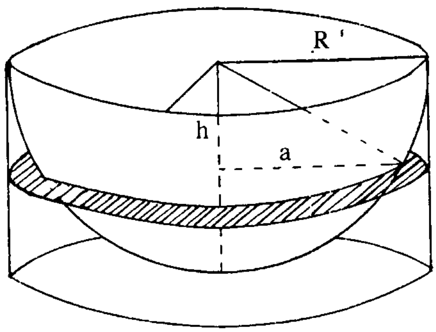
Los indivisibles de ambas figuras están en la razón $\frac{b}{a}$; Kepler concluye que las áreas de ambas figuras guardan también dicha relación $\frac{b}{a}$.

Conocida el área del círculo, cuyo valor es πa^2, el área de la elipse de semiejes «a» y «b», será entonces πab.

Luca Valerio

A este personaje de comienzos del XVII, atribuye Galileo el cálculo del volumen de la siguiente figura geométrica.

En un cilindro de radio y altura R, suprimimos la semiesfera interior del cilindro.



Luca Valerio obtuvo su volumen, descomponiendo la escudilla en secciones perpendiculares al eje del cilindro, cuya superficie viene dada por

$$S = \pi (R^2 - a^2) = \pi h^2$$

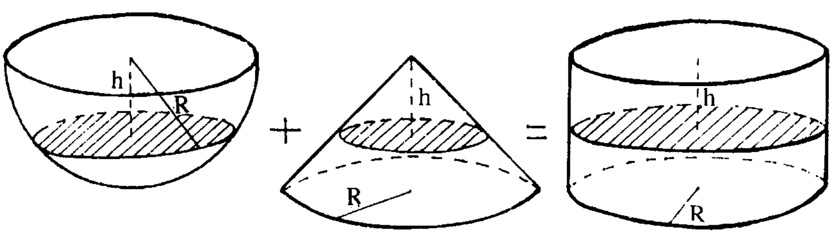
Un cono de radio y altura R, tendrá por tanto, a una distancia h de su vértice, unas secciones circulares cuyas áreas coinciden con las respectivas coronas circulares de la escudilla. en definitiva cono y escudilla tienen el mismo volumen.

Esta misma idea puede ser utilizada para calcular el volumen de la semiesfera conocidos el del cono y el del cilindro. Para ello es suficiente observar que:

Sección de la semiesfera + Sección del cono = Sección del cilindro.

A partir de donde concluiremos que

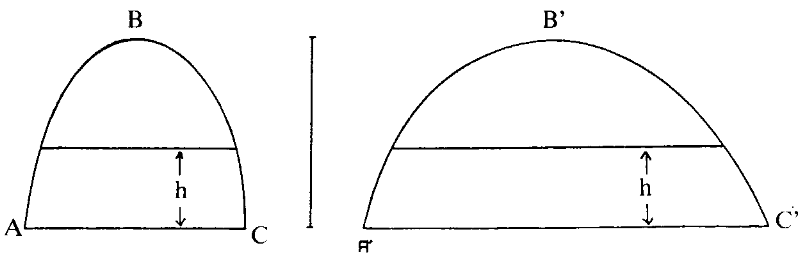
Vol. semiesfeera + Vol. cono = Vol. cilindro



Bonaventura Cavalieri

En 1635 Cavalieri publica un gran tratado sobre el cálculo de áreas y volúmenes, titulado *«Geometría indivisibilibus continuorum»*. Al descomponer una figura en *«todas sus líneas»*, conseguirá establecer correspondencias uno a uno entre los indivisibles de las distintas figuras. El cálculo se realizará en base al siguiente postulado:

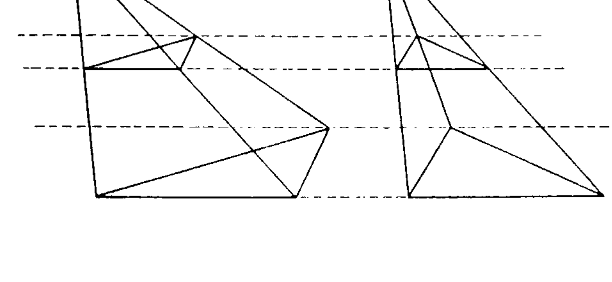
«Si dos áreas tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una misma razón, entonces los volúmenes de estas figuras están en esta razón».

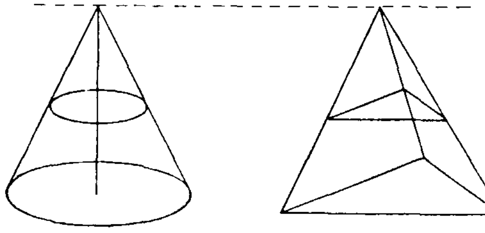


El postulado tiene una formulación análoga para las figuras espaciales; en este caso viene sugerido por el hecho de que si deformamos una pila de folios, su volumen no se verá alterado.

Cavalieri resuelve con su postulado un problema crucial de la volumetría de los poliedros: Dos pirámides, recta y oblicua, que tengan la misma altura y la misma área en la base, tienen el mismo volumen. Por un sencillo principio de homotecia espacial, las secciones indivisibles a una misma altura de la base, son iguales en ambas figuras.

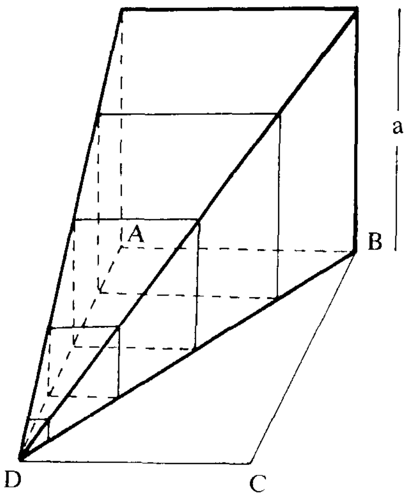
El mismo principio es capaz de explicar que la fórmula volumétrica de un cono sea la misma que la de una pirámide.

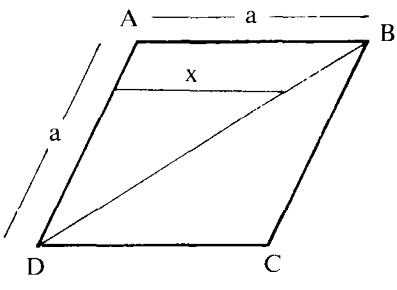




Cavalieri calculará tamibén las áreas y volúmenes de muy diversas figuras. entre sus hallazgos, destaca la obtención de la fórmula fundamental de cuadraturas $\int_0^a x^n \, dx = a^{n+1}/_{n+1}$.

En caso n = 2 puede resolverse con proverbial sencillez:
Sea el cuadrado ABCD de lado BC = a.
Designemos simbólicamente con $\Sigma\ x^2$, al conjunto de los cuadrados construidos sobre los sucesivos segmentos indivisibles x, paralelos al lado DC, del triángulo BDC, y situados en planos perpendiculares a la figura.





Tal conjunto $\Sigma\ x^2$, puede asimilarse fácilmente, como muestra la figura, a una pirámide de vértice B, base cuadrada DC = a y altura a, cuyo volumen será por tanto $a^3/3$

Con las teorías de Cavalieri, la geometría alcanza de alguna forma, el punto final de la geometría de los griegos: Los indivisibles de Arquímedes.

Los matemáticos del siglo XVII, contaban no obstante con un amplio legado de álgebra y aritmética procedente de los árabes, que permitiría una pronta evolución de las teorías infinitesimales.

La traducción al lenguaje algebráico de todas estas técnicas, permitirá el salto definitivo de Newton y Leibniz.

Bibliografía

BARON E.M.: *The origins of the Infinitesimal Calculus.* Dover 1987.
BOYER, CARL B. —*Historia de las matemáticas.* Alianza Universidad 1987.
«Cavalieri, limits and discarded infinitesimals». *Scripta Matemática 8* (1941) 79-91.
FERNANDEZ F. «Demócrito de Abdera: El secreto de la pirámite y los orígenes del Cálculo Infinitesimal». *Ventana 1* (1990) 43-49.
«Diversos Niveles de la enseñanza del Cálculo Diferencial». *I Congreso Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas.* Sevilla 1990.
SCHNEIDER—GILOT, M. *Des objets mentaux «aire» et «volume» au clacul des primitives.* Dissertation. Louvain La Nueve 1988.
VAN DER WAERDEN, B.L. *Science Awakening.* Oxford University Press. Thir edition.