

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA



TESIS DOCTORAL

**CONTRIBUCIONES DEL CAOS DETERMINISTA A LA
DINÁMICA DEL COMPORTAMIENTO ESPECULATIVO**

MARÍA DOLORES GARCÍA ARTILES

Las Palmas de Gran Canaria, Julio de 1995

Título de la tesis:

***CONTRIBUCIONES DEL CAOS DETERMINISTA A LA
DINÁMICA DEL COMPORTAMIENTO ESPECULATIVO***

Thesis title:

***CONTRIBUTIOS OF DETERMINIST CHAOS TO THE
DYNAMICS OF SPECULATIVE BEHAVIOR***

Abstract

In this thesis an asset price model of speculative financial market is analysed. The model introduces two groups of traders: fundamentalists, who form rational expectations on the fundamental value of asset, and chartists, who base their trading decisions on an analysis of past price trends

Our model explains bursts of volatility in financial markets, which are not well explained by the traditional finance paradigms, as we will show. Speculative bubbles arise as a complex non-linear dynamic phenomenon brought about naturally by the dynamic interaction of heterogeneous market participants.

Depending on the time lag in the formation of chartists' expectations, the system evolves through several dynamic regimes finishing in a strange attractor. Chaos provides a self-sustained motion around the rationally expected equilibrium that corresponds to a speculative bubble.

In order to explain the role of Chartism, chaotic motion is a very interesting theoretical feature for a speculative financial market model. It provides a complex non-linear dynamic behaviour around the Walrasian equilibrium price produced by deterministic interactions between fundamentalists and chartists.

This model could be a link between two opposite views over the behaviour of financial market: the theorist's literature one that claims the random motion of asset prices and the chartist's position extensively spread by the market professionals.

CONTENIDOS

Capítulo 0. Introducción y Objetivos

0.1. Expectativas Racionales.....	2
0.2. Mercados Eficientes.....	9
0.3. El Análisis Técnico o Chartismo.....	19
0.4. Un Modelo Especulativo de Mercados de Cambios.....	31
0.5. Un Modelo Especulativo de Mercados de Capitales.....	37
Objetivos	58

Capítulo 1. Dos Modelos Complejos de Comportamiento Especulativo

1.1. Un Modelo Discreto de Fundamentalistas y Chartistas.....	64
1.1.1. Análisis Lineal Local. Bifurcaciones.....	67
1.1.2. La Bifurcación de Hopf en Sistemas Dinámicos Discretos.....	75
1.1.3. Detección del Caos por medio de un Punto Fijo Expansivo.....	80
1.1.4. Caos Transitorio.....	89
1.1.5. Estudio del caso $\tau \rightarrow 0$	94
1.1.5.1. Bifurcación Flip.....	102
1.1.6. A Modo de Síntesis.....	109

1.2. Un Modelo de Fundamentalistas y Chartistas con Dos Activos.....	111
1.2.1. Análisis Lineal Local.....	116
1.2.2. La Bifurcación de Hopf en Sistemas de Alta Dimensión.....	117
1.2.3. Análisis Geométrico del Ciclo Límite en Tres Dimensiones.....	124
1.2.4. Variedad Central y Reducción de la Dimensión Efectiva.....	129
1.2.5. Estudio del Caso $\tau \rightarrow 0$	137
1.2.6. Discretización del Modelo: Aparición del Movimiento Caótico..	145
1.2.7. A Modo de Síntesis.....	153

Capítulo 2. Contrastaciones Empíricas

2.1. Introducción.....	156
2.2. Espectros de Fourier.....	157
2.3. Estadístico BDS.....	171
2.4. Estadístico de Hurst.....	179
2.4.1. La Memoria a Largo Plazo en los Precios de los Mercados de Valores.....	179
2.4.2. Análisis del Rango Reescalado.....	181
2.4.3. Detección de Ciclos No Periódicos.....	185
2.5. Patrones de Comportamiento y Predictores Locales en Series Temporales.....	211

Conclusiones	230
---------------------------	-----

Bibliografía	236
---------------------------	-----

Capítulo 0

CAPITULO 0

INTRODUCCION Y OBJETIVOS

0.1. Expectativas Racionales

En Economía, como disciplina que estudia la asignación eficiente de recursos escasos, los procesos de decisión son básicos. Dado que los resultados de estos procesos generalmente se extienden en el tiempo, se hace necesario considerar el futuro, por lo que la *formación de expectativas* se constituye de esta forma en un elemento fundamental de dicha ciencia.

En efecto, para adoptar una decisión, los agentes económicos no tienen en cuenta sólo los valores actuales y pasados de las variables relevantes, sino que formulan y consideran predicciones sobre valores futuros, por lo que en los modelos económicos es necesario describir los mecanismos de formación de expectativas que permitan generar dichas predicciones a partir de la información disponible.

En la literatura se han propuesto varios mecanismos de formación de expectativas. En Begg (1982) podemos encontrar una amplia información al respecto.

Keynes (1936), en su "Teoría General", señaló la importancia de las expectativas, así como la posibilidad de que podrían obedecer a motivaciones más psicológicas que económicas (los denominados por Keynes *animal spirits*), constituyendo una de las causas de la inestabilidad de la economía. Así, en su famoso pasaje sobre el comportamiento del mercado bursátil como un casino, Keynes (1936) describe dichos mercados como lugares donde, especuladores en busca de ganancias de capital inmediatas, anticipan "lo que la opinión media espera que sea la opinión media", en lugar de centrarse en los determinantes fundamentales del mercado.

Las primeras formulaciones sobre formación de expectativas tomaron la forma de mecanismos de expectativas adaptativas y de expectativas extrapolativas.

Según la hipótesis de expectativas adaptativas propuesta por Cagan (1956), los individuos usan la información referente a errores de predicción pasados para revisar las expectativas corrientes. De esta forma, si ${}_{t-1}X_t^e$ representa el valor que los agentes que forman sus expectativas al final del período $t - 1$ esperan tome la variable X en el momento t , tendríamos que el mecanismo de expectativas postulado podría escribirse como

$${}_{t-1}X_t^e - {}_{t-2}X_{t-1}^e = \lambda (X_{t-1} - {}_{t-2}X_t^e), \quad 0 < \lambda < 1$$

reagrupando términos se obtiene

$${}_{t-1}X_t^e = \lambda X_{t-1} + (1 - \lambda) {}_{t-2}X_{t-1}^e$$

y por sustituciones sucesivas podemos transformar esta expresión en la siguiente

$${}_{t-1}X_t^e = \lambda X_{t-1} + \lambda(1-\lambda) X_{t-2} + \lambda(1-\lambda)^2 X_{t-3} +$$

$$+ \dots + \lambda(1-\lambda)^n X_{t-n-1} + \lambda(1-\lambda)^{n+1} {}_{t-n-2}X_{t-n-1}^e$$

donde todos los términos, excepto el último, son observables. Puesto que λ es una fracción positiva, $(1-\lambda)^{n+1}$ se hace cada vez menor conforme aumenta n . Para un valor de n suficientemente elevado podemos despreciar el último término y escribir

$${}_{t-1}X_t^e = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda)^i X_{t-i-1} \quad (0.1.1)$$

Así pues, según esta hipótesis las expectativas corrientes sobre el valor futuro de una variable se basan en una media ponderada de valores corrientes pasados, donde las ponderaciones decaen geoméricamente.

Por su parte, el mecanismo de expectativas extrapolativas sugerido por Modigliani y Sutch (1966) vendría dado por la siguiente expresión :

$${}_{t-1}X_t^e = \lambda \sum_{i=1}^M \alpha_i X_{t-i} + (1-\lambda)\beta (X_{t-1} - X_{t-1}^q), \quad 0 < \lambda < 1 \quad (0.1.2)$$

donde X_{t-1}^q es el valor considerado de *equilibrio* de la variable X_{t-1} , que se especifica generalmente como sigue:

$$X_{t-1}^q = \sum_{i=1}^M h_i X_{t-i}$$

Con lo que (0.1.1) sería un caso particular de (0.1.2).

Si bien estas dos hipótesis supusieron un importante avance en la consideración de las expectativas, no están exentas de críticas. En primer lugar, parece lógico suponer que los agentes económicos, al formar sus expectativas, tienen en cuenta otros factores además del comportamiento pasado de la variable que intentan predecir. En segundo lugar, ambos mecanismos de generación de expectativas conceden a los agentes muy poca capacidad de aprendizaje, al obligarlos a cometer una y otra vez los mismos errores. En tercer lugar, no se ofrece ninguna explicación teórica a la magnitud del parámetro de ajuste λ .

Como reacción a estas críticas aparece la hipótesis de las expectativas racionales. Esta hipótesis, definida originariamente por Muth (1961), formalizando un trabajo previo de Modigliani y Grunberg (1954), implica simplemente que los agentes no cometerán errores sistemáticos al predecir los valores futuros de las variables económicas. Para ello utilizan toda la información disponible de la mejor manera posible, lo que significa que la expectativa de una variable coincidirá con la esperanza matemática de dicha variable, condicionada al conjunto de información disponible por el agente en el momento de formar sus expectativas.

Siguiendo a Mishkin (1983), la hipótesis de expectativas racionales afirma que la distribución de probabilidad subjetiva de cualquier variable es idéntica a la distribución de probabilidad objetiva de esa variable, condicionada a toda la información pasada disponible; es decir, las esperanzas impuestas por el mercado son iguales a las esperanzas condicionadas reales usando toda la información disponible

$$E_m(X_t/\phi_{t-1}) = E(X_t/\phi_{t-1})$$

donde E_m es la esperanza subjetiva proporcionada por el mercado y E se refiere a la esperanza objetiva condicionada a la información disponible ϕ_{t-1}

Las implicaciones de las expectativas racionales se investigaron sistemáticamente en los años siguientes. En la demanda agregada se introdujeron en la teoría de la renta permanente del consumo por Hall (1978) y Flavin (1981) y en la función de inversión por Abel (1982) y Hayashi (1982).

La introducción de las expectativas racionales también dio lugar a resultados importantes en la oferta agregada. Así, por ejemplo, Lucas (1972, 1973) consideró que los agentes racionales individuales se encuentran dispersos en un gran número de mercados competitivos, y la información disponible es imperfecta en el sentido que no pueden distinguir entre variaciones del nivel general de precios y variaciones de los precios relativos, siendo estas últimas las que afectan a sus decisiones. Entonces, ante una variación mayor que la esperada en el nivel general de precios, los agentes tenderán a pensar que lo que realmente ha aumentado es el precio relativo de los bienes que producen, lo que les llevaría a incrementar la cantidad ofrecida.

Esta situación se generalizaría al conjunto de la economía, de manera que la desviación positiva de la inflación actual con respecto a la esperada haría aumentar los niveles de producción y empleo por encima de su nivel "natural". Ahora bien, puesto que según la hipótesis de expectativas racionales el error de predicción es aleatorio, resulta que la tasa de desempleo no puede diverger de la natural de una manera sistemática sino aleatoria; esto es, si los agentes reciben una sorpresa que les hace equivocarse en sus expectativas.

De aquí se deduce una implicación básica para la política económica: las políticas de estabilización sólo tendrán efectos sobre los niveles de producción y empleo en el corto plazo si sorprenden a los agentes. Para ello, la política económica debería llevarse a cabo de una manera aleatoria, imposible de prever por los agentes.

En este sentido, Sargent y Wallace (1975) demuestran que si los agentes tienen la información sobre la política que la autoridad monetaria va a seguir, pueden anticipar correctamente sus efectos, y sus decisiones óptimas harán que la política monetaria no tenga efectos reales.

La aplicación de la hipótesis de expectativas racionales a los mercados financieros se realizó de la mano de la denominada *hipótesis de mercado eficiente*, formulada originariamente por Fama (1965), que define tales mercados como aquellos "donde hay un número elevado de agentes racionales maximizadores de beneficios compitiendo activamente, cada uno de ellos tratando de predecir el valor futuro de valores individuales, y donde toda la información corriente importante es disponible sin coste para todos los participantes en dicho mercado". Así pues, en un mercado eficiente las cotizaciones reflejarían en todo momento la información disponible, por lo que no quedarían oportunidades de beneficios sin ser explotadas: al precio de hoy, los inversores no pueden esperar ganar más que el rendimiento normal invirtiendo en una acción.

Según la hipótesis de expectativas racionales, en un mercado de valores los agentes económicos forman sus expectativas en base a predicciones del modelo económico que describe la estructura del sistema económico relevante. Sus predicciones no están sesgadas y se basan en toda la información disponible. El conocimiento de la teoría económica y la información existente dio paso al *análisis fundamental*, el cual debería ser capaz de comprender todas las reglas y estrategias sistemáticas que utilizan los mercados.

El análisis fundamental se basa en estudios teóricos y fundamentados con el fin de determinar el valor real o intrínseco de una acción. Los agentes que actúan

dentro de este esquema de comportamiento se les denomina *fundamentalistas*. Dichos agentes fijan el precio de las acciones de forma racional según el valor descontado o presente de la serie futura de dividendos que se espera obtener. Para los fundamentalistas, el valor intrínseco de una acción es, por tanto, el valor actual de los beneficios que se espera recibir, teniendo en cuenta que existe una diferencia entre el valor que se espera de manera inmediata y el que se espera recibir posteriormente, que se debe descontar.

Es bien sabido que el valor de una acción depende de muy distintos factores como son, entre otros, la tasa de crecimiento esperada, las expectativas de reparto de dividendos, las ampliaciones de capital, el grado de riesgo, el nivel de los tipos de interés del mercado, etc. Realizando la estimación de los distintos factores que intervienen en el precio de una acción, los fundamentalistas, o partidarios de la base sólida, llegan a una estimación del valor intrínseco de un título; si este se encuentra por encima del precio de mercado, se aconseja al inversor que compre.

Formalmente, los inversores con expectativas racionales buscan la eficiencia media-varianza. Los rendimientos potenciales se miden por un método probabilístico ponderado que promedie los rendimientos medios esperados, penalizando los activos con alto riesgo. El riesgo de un activo se mide por la desviación típica de sus rendimientos. La aversión al riesgo que caracteriza al inversor que actúa racionalmente conlleva la búsqueda de activos que proporcionen el máximo rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo.

La hipótesis de expectativas racionales trasladada a los mercados financieros conduce a la teoría de los Mercados Eficientes.

0.2. Mercados Eficientes

Desde hace más de tres décadas, la teoría financiera moderna ha basado su análisis de las cotizaciones bursátiles en el concepto de *eficiencia* de los mercados financieros. Un mercado es eficiente cuando la nueva información, que es comprendida rápidamente por todos los participantes, se absorbe instantáneamente y se incorpora a los precios del mercado. Así pues, en un mercado eficiente los precios de los distintos valores reflejan instantáneamente toda la información relevante. El ajuste inmediato de los precios a la nueva información implica que los sucesivos cambios en los precios de cada acción son independientes. Esto es, por definición, un mercado de "camino aleatorio", lo cual indica que el mercado no tiene memoria; es decir, las series históricas de precios no se pueden utilizar para predecir los precios futuros.

La Hipótesis de Mercado Eficiente se puede expresar matemáticamente como

$$P_t = E(P_{t+1}/I_t)$$

donde I_t es el conjunto de información disponible en t , que incluye la historia pasada de la serie de precios junto con el flujo de innovaciones o noticias ε_t , que es recibido por el mercado, y E es el operador predicción que en el equilibrio de expectativas racionales es idéntico, con la esperanza matemática condicionada al conjunto de información I_t . Esta hipótesis supone que todos los individuos poseen de forma homogénea los conjuntos de información. La solución lineal de la expresión matemática de la Hipótesis de Mercado Eficiente es el camino aleatorio

$$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t$$

Un mercado eficiente es una *martingala* (juego equitativo y limpio), ya que no sólo los precios reflejan toda la información conocida, sino que la eficiencia impide el exceso persistente de beneficios extraordinarios. La clase de inversores que son considerados racionales conocen en un sentido colectivo cuál es la información importante y cuál no. Después de recopilar toda la información y tasar el riesgo involucrado en la misma, el conocimiento colectivo del mercado encuentra un precio de equilibrio.

Aunque sin formalizar, podría decirse que la Hipótesis del Mercado Eficiente (HME) comienza a desarrollarse desde principios de siglo. Su objetivo fundamental era justificar el uso del cálculo de probabilidades en el análisis de los mercados de capitales. La HME, utilizando una metodología de tipo estadístico y econométrico, trata de comprobar si los precios que rigen en el mercado descuentan automáticamente toda la información que afecta al valor intrínseco de los títulos. En investigaciones posteriores se aprecia una considerable relación entre la Hipótesis del Mercado Eficiente y la Teoría del Mercado de Capitales. La finalidad de ésta última teoría es estudiar los mecanismos internos para que el funcionamiento del mercado conduzca a una situación de equilibrio utilizando los precios resultantes para contrastar su veracidad.

El primer estudio que utiliza métodos estadísticos para analizar la rentabilidad de los precios fue realizado en 1900 por Louis Bachelier. Sus conclusiones afirmaban que las rentabilidades eran variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Sin embargo, éste trabajo fue olvidado durante mucho tiempo y sólo en los últimos años, a propósito del estudio del comportamiento de los precios en el mercado, ha vuelto a cobrar actualidad.

En la década de los treinta, Cowles (1933) y Working (1934) observaron que los métodos convencionales de predicción de los precios de las acciones no producen mejores resultados que los que se obtendrían siguiendo un procedimiento aleatorio. A este mismo resultado llegaron Kendall (1953), concluyendo que los coeficientes de correlación de los precios de las acciones en el mercado no difieren significativamente de cero, y Roberts (1959), que comprobó que las primeras diferencias de los precios de las acciones guardaban una gran analogía con una sucesión de números aleatorios. Un trabajo que influyó decisivamente fue el de Osborne (1959), donde manifestaba que el precio de las acciones se ajusta bastante bien a la ley física que gobierna el "movimiento browniano" (movimiento de una partícula suspendida en un líquido).

Sin embargo, el proceso de formación de precios de las acciones en los mercados de valores recobró verdadera actualidad en la década de los años sesenta. En ésta década, Cootner (1964) realizó diversos estudios de las características del mercado utilizando el análisis cuantitativo. En este mismo período aparece el estudio sobre la Teoría de Selección de Carteras de Markowitz (1959) a raíz de un famoso trabajo de Tobin (1958). Fueron, sin embargo, Sharpe (1964) y Lintner (1965) quienes completaron el estudio de la composición óptima de una cartera de valores. El Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM) surge ideado por Sharpe en la década de los setenta, en donde el riesgo sistemático, también llamado riesgo de mercado, encierra la reacción de las acciones hacia los cambios del mercado en general.

El trabajo que formaliza la racionalidad de la Hipótesis de los Mercados Eficientes fue descrito por Fama (1970). La HME, en su forma pura, establece que el mercado es una martingala; la información no puede ser usada para obtener beneficios extraordinarios.

Según Lorie y Hamilton (1973), la afirmación de que un mercado es eficiente, tiene más peso que asegurar que los sucesivos cambios en los precios de las acciones son independientes unos de otros. Esta última suposición indica simplemente que el análisis de los esquemas del precio en el pasado no sirve para pronosticar el precio en el futuro, ya que toda la información deducible de tal análisis habrá sido incorporada a los precios del mercado. Sin embargo, en un mercado eficiente los precios no sólo reflejan toda la información contenida en las series históricas, sino también toda la información hecha pública y toda la información privada. Esto sugiere la infructuosidad del esfuerzo para obtener rendimientos superiores mediante el análisis de los parámetros fundamentales.

El término "eficiencia" no es fácil de concretar cuando se enfrenta al mundo real. Un mercado eficiente es un mercado perfecto, pero la realidad puede alejarse más o menos de esta situación ideal. El ataque al análisis fundamental dividió la HME en tres distintos niveles de eficiencia: la forma "débil", la forma "intermedia" y la forma "fuerte".

En la *hipótesis débil* del mercado eficiente los precios sólo reflejan la información contenida en las series históricas; por tanto, examinar el pasado de las cotizaciones no sirve para predecir los precios futuros. El ajuste de los precios es instantáneo. Los cambios en los precios son independientes entre sí, por lo que el nivel de precios es aleatorio. Ningún inversor podrá obtener, por tanto, una rentabilidad superior a la normal.

La *hipótesis intermedia o semifuerte* del mercado eficiente postula que los precios reflejan toda la información hecha pública que pueda afectar al valor intrínseco de una acción. El ajuste de los precios se produce después de un período de adaptación o aprendizaje del mercado. Existe, por tanto, un desfase temporal en el ajuste de los precios, que será tanto menor cuanto más eficiente sea el mercado. Sólo los inversores con información privilegiada podrán obtener una rentabilidad superior.

Por último, en la *hipótesis fuerte* del mercado eficiente, los precios reflejan toda la información pública y privada. Los cambios en los precios son variables aleatorias independientes que incorporan toda la información conocida. Nadie puede obtener una rentabilidad superior a la que obtendría cualquier inversor con una cartera aleatoria.

A mediados de los años 70, la versión semifuerte de la HME fue la teoría aceptada generalmente. La evidencia estadística en favor de la eficiencia de los mercados discutida por Fama (1976) ha sido tomada como soporte para el modelo de camino aleatorio, y hasta hace muy poco los economistas financieros no han tenido la menor duda en aceptar este punto de vista como explicación del comportamiento de las series temporales de los precios de los activos. Pero el mundo económico, en general, es incierto, el valor intrínseco de una acción o de cualquier otro título no puede determinarse con exactitud. Las estimaciones (expectativas) de los dividendos futuros de una determinada empresa, el horizonte económico o período de planificación, las predicciones acerca de la evolución del marco socioeconómico, etc., son diferentes para los distintos inversores, aún en el supuesto de que todos ellos dispongan de la misma información.

Estas podrían ser algunas de las distintas razones por lo que la teoría de los mercados eficientes no concuerda con los acontecimientos sucedidos en octubre de 1929 o en octubre de 1987. La observación directa del funcionamiento de los mercados financieros a lo largo de éstas jornadas históricas permite comprender la lógica de la evolución de los precios. El *crash* de los mercados financieros de 1987 ha inducido a considerar más profundamente la virtualidad del paradigma de los mercados eficientes, y ha propiciado nuevas visiones sobre los mercados especulativos y nuevos modelos dinámicos para explicar su funcionamiento. Incluso en los períodos llamados normales, la teoría de la eficiencia de los mercados financieros es criticada por algunos teóricos. Recientes trabajos empíricos manifiestan diversas objeciones a los principios básicos del modelo de mercados eficientes, o al menos al punto de vista que dicho modelo sugiere para la dinámica de los precios.

A partir de la década de los 80, ya eran muchos los investigadores que presentaban serias dudas sobre la eficacia del mercado, mostrando distintas evidencias contradictorias con la HME. Algunos de estos estudios han sido inconsistentes con el modelo puro del camino aleatorio o forma débil de la HME. Otros trabajos reportan anomalías relativas al exceso de rendimientos debidos a una variedad de factores tales como tamaño de la firma, sentimientos del mercado, días de la semana, mes del año, etc.

Muchas de estas anomalías son revisadas por Keim (1986), Lo y MacKinlay (1988), que utilizan tests basados en estimadores de la varianza. En sus trabajos se concluye que el modelo de camino aleatorio es, en general, no consistente con el comportamiento estocástico de las rentabilidades bursátiles semanales; también encuentran una correlación significativamente positiva para períodos productivos semanales y mensuales.

Trabajos realizados a lo largo de los años 80 llegan a la conclusión de que la evidencia relacionada con las reversiones de beneficios es inconsistente con la hipótesis del mercado eficiente, que afirma que los beneficios de la inversión son serialmente independientes. Los precios de los títulos cambian de dirección con el tiempo, y por tanto los beneficios tienden también a cambiar. Este es el descubrimiento de la investigación realizada por Fama y French (1988), los cuales comprueban que aunque los beneficios de las acciones en períodos cortos de tiempo pueden tener una correlación serial positiva, en períodos más largos muestran una correlación serial negativa. Igualmente, Poterba y Summers (1987) encuentran evidencia de componentes transitorias para una fracción larga de la varianza en las rentabilidades bursátiles.

Las reversiones de los beneficios en distintos períodos de tiempo están generalmente enraizadas en hechos económicos. La volatilidad de los tipos de interés constituye una de las principales influencias económicas en los precios de las acciones. Puesto que los bonos (que son los que reflejan la orientación de los tipos de interés) compiten con las acciones para conseguir el dinero de los inversores, se podría esperar de forma lógica relaciones sistemáticas entre los tipos de interés y los precios de las acciones. Por tanto, en un ciclo de fluctuaciones de los tipos de interés, se observará unos rendimientos de acciones relativamente elevados seguidos de rendimientos bajos de las acciones.

El trabajo realizado por los autores French y Roll (1986) revisa la idea básica de la HME según la cual los movimientos del mercado son ocasionados por la llegada de información nueva. Estos autores demostraron que esto no sucede así. Su estudio refleja que la difusión de información privada es la causa principal de las varianzas de los precios en el mercado. Este análisis deja abierta la posibilidad de influencias

adicionales en el mercado, aparte de la llegada de información pública nueva. En un trabajo posterior, Roll (1988) mostró que una parte de la volatilidad en los precios de las acciones se puede explicar por noticias relacionadas con la economía, la industria y noticias específicas sobre empresas privadas. La información privilegiada y la actuación de los profesionales y otros inversores puede jugar un papel importante en el proceso de formación de precios.

Por otro lado, existe un número creciente de investigaciones relativas al exceso de volatilidad de los precios de los activos. Una recopilación de estos datos es posible encontrarlos en West (1988), que ponen en cuestión el punto de vista de que el precio de los activos está determinado exclusivamente por los valores fundamentales esperados racionalmente, que de acuerdo con Samuelson (1965) deberían seguir un camino aleatorio. Un test estadístico, propuesto por Shiller (1989), muestra que los precios de los títulos presentan "demasiada variabilidad" para poder ser explicada por una teoría de valoración de precios de mercado eficiente, y se deben tener en cuenta consideraciones de comportamiento y de *psicología de multitudes* para explicar el proceso de la determinación de precios en el mercado de valores.

Peters (1991) investiga la función de densidad de los rendimientos de los mercados de valores y observa que su comportamiento se ajusta sólo a una distribución "aproximadamente normal". Los rendimientos están sesgados negativamente (Fama, 1965) y existen demasiadas observaciones en las colas lejos de la media (Osborne, 1959). Asimismo, Peters observa que el pico que se produce alrededor de la media es más alto que lo predicho por una distribución normal. Esta leptokurtosis (anchas colas y alto pico) advertida en la función de densidad de las rentabilidades bursátiles, es otra de las inconsistencias con la HME. Según Sterge (1989), pueden esperarse cambios en los precios mucho mayores y ocurrirán dos o

tres veces más a menudo de lo que predice una distribución normal. Ya en 1964 Mandelbrot propuso sustituir la normal por una distribución paretiana estable caracterizada por varianza infinita o indefinida.

Lo que es incuestionable es que el mercado reacciona a muy distintos factores que afectan a los precios. Tanto los inversores que acuden a los mercados de valores en busca de colocación para sus ahorros, como los empresarios que acuden a los mismos en busca de recursos con los que financiar sus actividades productivas, utilizan innumerables trucos y estratagemas con el objeto de obtener una mayor rentabilidad o pagar un menor coste por la financiación. Como señala Peters (1994), "es inconcebible que una institución hecha por el hombre, como es el caso del mercado, pueda ser mecánicamente perfecta de forma que todas las discrepancias que surjan puedan ser totalmente controladas antes de que sea posible observarlas".

Es por lo que cabe plantearse la pregunta: ¿son eficientes los mercados? La HME supone que los inversores son racionales, es decir, valoran las acciones en base a toda la información disponible y obtienen un precio acorde a la misma. Los rendimientos se fijan mediante un método probabilístico ponderado, y en particular son adversos al riesgo. ¿Pero es la gente racional considerada incluso agregadamente? Peters (1991) analiza distintas razones por las que los inversores no se comportan de la manera descrita en la teoría de expectativas racionales.

Los inversores pueden no conocer la manera de interpretar toda la información conocida, y pueden reaccionar por esta causa a las tendencias; la sobre-reacción ante la información sobre dividendos futuros es una realidad cuando la gente se enfrenta a una pérdida o ganancia potencial. La existencia de amplias influencias en los precios del mercado sugiere la posibilidad de que los inversores no

acepten el precio establecido como el mejor reflejo de su valor intrínseco. No hay necesariamente aversión al riesgo cuando existen pérdidas seguras por no jugar. La gente no es insesgada, usa probabilidades subjetivas.

Existe una reacción no lineal ante la información. Las noticias se acumulan y la reacción se produce a partir de un cierto nivel. El pasado puede influir sobre el presente originando una reacción retardada. Los cambios en los precios son demasiado volátiles, no pudiendo achacarse esta variabilidad a cambios en los dividendos esperados. Las anchas colas de densidad pueden ser explicadas por la reacción no lineal de los inversores ante la llegada de nueva información.

De acuerdo con esto, se espera que los profesionales de la inversión especulen sobre lo que ellos perciben de cuál sería la dirección del mercado. Cuando los agentes intentan aprovecharse de las *imperfecciones* del mercado y actúan según su percepción de la tendencia del precio actual, sus acciones pueden causar fenómenos que son totalmente inconexos con los fundamentos económicos, y son impredecibles por el análisis fundamental. Este comportamiento describe una dinámica endógena que se basa esencialmente en las interacciones de los agentes y que tiene un efecto sobre los precios.

Se plantea, por tanto, la necesidad de considerar modelos alternativos para analizar la dinámica de los precios de los activos: alternativas desde el punto de vista de que los precios no sólo reflejan los valores fundamentales de los activos esperados racionalmente por los agentes. Estos modelos deberán tener en cuenta la incorporación en el mercado de los *chartistas*, un grupo de agentes que basan su actuación en el análisis de las tendencias de los precios ocurridas en el pasado.

0.3. El Análisis Técnico o Chartismo

El término *técnico*, aplicado al mercado de valores, se refiere al *estudio de la actividad del mercado en sí misma* en tanto que se opone al estudio de los bienes de que se ocupa ese mercado. El análisis técnico consiste, en esencia, en crear e interpretar gráficas de títulos. A sus profesionales se les denomina chartistas. Estudian el pasado, tanto los movimientos de las cotizaciones como el volumen de negocio, buscando la dirección de los cambios futuros. Los chartistas son inversores que basan su estimación en el comportamiento del mercado en sí mismo, usando el comportamiento pasado para predecir el comportamiento futuro.

El primer principio del análisis técnico es que toda la información sobre los beneficios, los dividendos, y el desarrollo futuro de una empresa queda reflejado automáticamente en las cotizaciones de las acciones de la empresa en el pasado. Una gráfica que muestre éstos precios y el volumen de negocio, incluye toda la información fundamental que debe saber el analista de inversión. El segundo principio es que los precios tienden a moverse siguiendo una tendencia. El analista técnico afirma que existe un momento de inercia en el mercado: los títulos que han estado subiendo lo van a seguir haciendo, y los que empiezan a bajar continuarán del mismo modo.

Para los chartistas, los principios del análisis técnico tienen sentido dentro del mercado de valores por dos razones fundamentales: la primera se refiere al *instinto de la multitud*, de la *psicología de masas*, y la segunda es la existencia de un acceso desigual a la información fundamental de una empresa. El precio del mercado no sólo refleja toda la información fundamental que el analista estadístico puede esperar aprender (y de alguna otra que quizás sea secreta para él y que sólo conocen algunos

iniciados), sino también todas las esperanzas, temores, conjeturas y estados de ánimo, ya sean racionales o no, de todos los posibles compradores y vendedores, así como sus necesidades y recursos. El análisis técnico defiende, por tanto, que la variabilidad de los precios no depende del estudio y análisis de los parámetros fundamentales, sino de la evolución constatada de las cotizaciones y la observación del comportamiento de los otros inversores.

Los gráficos son herramientas de trabajo del analista técnico. Han sido desarrollados en multitud de formas y estilos para representar casi todo lo que ocurre en el mercado o para trazar un índice a partir de ellos. En los gráficos aparecen ciertos esquemas de formaciones, niveles y áreas que tienen significado y pueden interpretarse en términos del futuro desarrollo de una tendencia.

La construcción de una gráfica dentro del análisis técnico consiste básicamente en una línea vertical, cuya base es la cotización mínima del título ese día y cuya parte superior es la cotización máxima, dicha línea se cruza para indicar la cotización al cierre del día (Figura 0.1).

El proceso se repite por cada día de contratación. A menudo, el analista técnico también indica el volumen de acciones de un título que se negocian durante el día con otra línea vertical en la base de la gráfica. Los altos y bajos de la gráfica del título analizado reproducen una figura cuya interpretación es fundamental para el chartista.

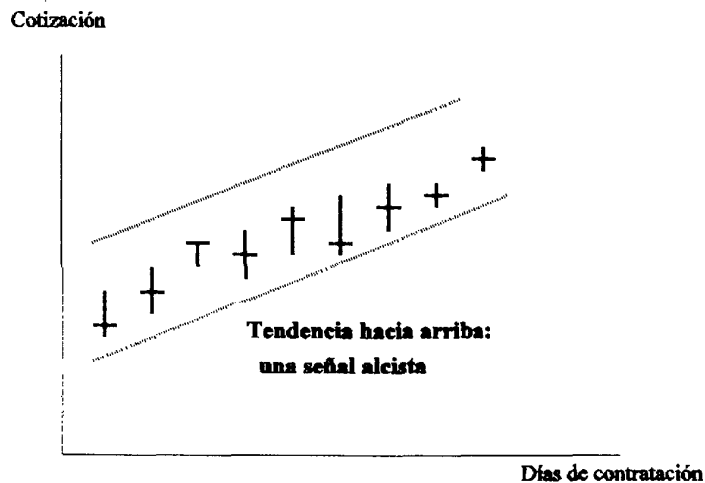


Figura 0.1
Construcción de una Gráfica dentro del Análisis Técnico

El principal objetivo de los gráficos es descubrir las tendencias de los precios a medio y largo plazo; de los mismos pueden derivarse líneas y canales o pistas de tendencia, formaciones de cabeza y hombros, triángulos, etc. Pero la formación más típica de estos gráficos es la llamada "área de congestión", que acota el campo de variación del precio de una acción. Cuanto más estrecha sea el área de congestión menor será la fluctuación de la cotización, y viceversa. Los analistas suelen suponer que entre los límites máximo y mínimo del área o banda de congestión está comprendido el valor intrínseco de la acción.

Puesto que se asume que el momento en el mercado tiende a perpetuarse, como escribió John Magee uno de los precursores del análisis técnico, en su obra sobre "Las Tendencias de los Valores" (Edwards y Magee, 1989): "los precios se

mueven por tendencias y las tendencias siguen igual hasta que sucede *algo* que hace que cambie el equilibrio oferta-demanda".

El análisis técnico ha gozado de una amplia influencia a lo largo del presente siglo, sobre todo desde que se formuló la llamada "Teoría de Dow", técnica que se ocupa de la predicción en los movimientos bursátiles. Charles H. Dow fue uno de los analistas más profundos sobre los movimientos del mercado de valores. Fundó el servicio de noticias financieras Dow-Jones. Su teoría, que se basa en la observación de una cierta repetición en los giros continuos del mercado, fue publicada en el Wall Street Journal. A su muerte, en 1902, Hamilton W.P., editor de dicho periódico, adoptó sus principios y publicó en 1922 un libro sobre lo que hoy se conoce como la Teoría de Dow.

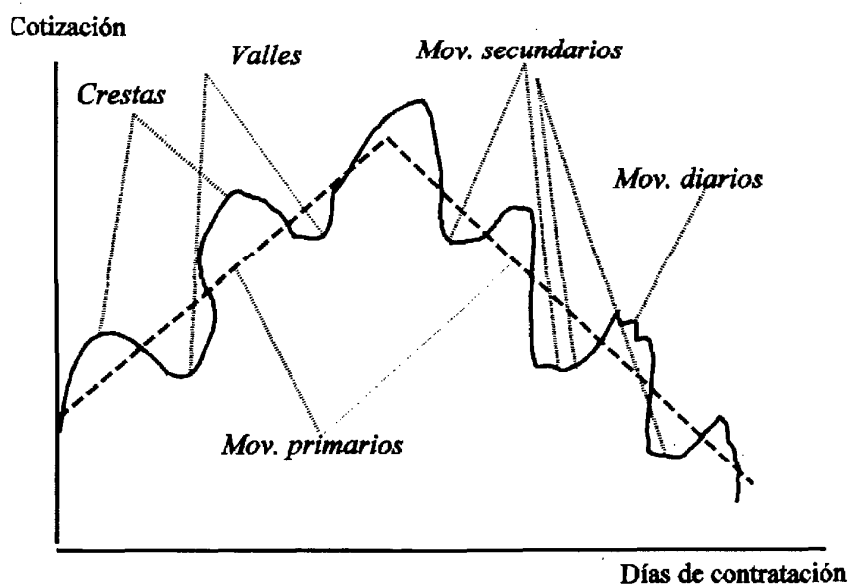


Figura 0.2
Evolución del Mercado en General según la Teoría de Dow

La Teoría de Dow parte del supuesto de que en la evolución del mercado se producen tres tipos de movimientos o tendencias: 1) una tendencia primaria a largo plazo, cuya duración puede oscilar entre nueve y dieciocho meses, y que puede ser alza o baja; 2) un movimiento secundario, que puede durar entre una y ocho semanas, y 3) unos movimientos diarios, fruto de la oferta y la demanda, que se superponen sobre los dos movimientos anteriores (Figura 0.2).

Si la tendencia primaria es alcista se debe a que previamente los inversores más informados han ido acumulando títulos (volumen como indicador secundario); posteriormente, cuando comienzan a surgir estudios de analistas informando de los buenos resultados empresariales se produce el "boom bursátil" cuya culminación tiene lugar con la llegada en masa a la bolsa de valores de los pequeños inversores. Las tendencias secundarias suelen ser correcciones de la tendencia primaria, mientras que los movimientos terciarios aparecen como rectificaciones de los secundarios.

Otros conceptos fundamentales del análisis técnico son los llamados *soporte* y *resistencia* representados en la Figura 0.3. Cuando el mercado toca techo y comienza a bajar, el pico anterior define un área de resistencia, puesto que el inversor que no pudo vender en el punto de alza querrá hacerlo si tiene otra oportunidad. Si el mercado sube de nuevo y se aproxima al pico anterior, se dice que está "probando" el área de resistencia.

Si el mercado penetra el área de resistencia, es probable que siga subiendo y el área anterior se convierte en un área de soporte. Por otra parte, si el mercado no logra penetrar en el área de resistencia y cae más allá del punto de baja precedente, donde anteriormente existía un área de soporte, se produce una señal de mercado bajista y se aconseja al inversor que venda. Un nivel de soporte es, por tanto, un nivel

de precios en el que la demanda suficiente de una acción parece detener, al menos temporalmente, una tendencia bajista y cambiar su dirección. La resistencia es la antítesis del soporte.

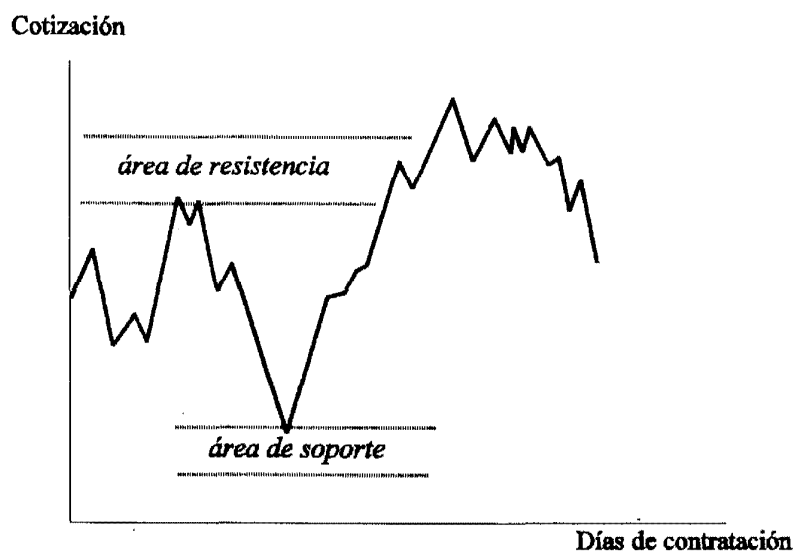


Figura 0.3
Áreas de resistencia y de soporte. Si el mercado penetra el área de resistencia, es probable que siga subiendo y el área anterior se convierta en un área de soporte.

Dow enunció dos principios que se han mantenido a lo largo de los años. El primero afirma que el mercado, en su tendencia alcista primaria, está caracterizado por *tres oscilaciones* al alza. El segundo principio apunta que en algún determinado momento y en todas las oscilaciones de mercado, ya fueran al alza o a la baja, se produciría un *fenómeno de vuelta* que cancelaría la oscilación. La teoría de Dow supone, por tanto, una estrategia de compra cuando el mercado sube por encima del último pico, y de venta cuando se hunde más allá del valle anterior. Estas estrategias sugieren que cuando la cotización de un título (o del mercado en general) se acrecienta con un volumen de contratación grande o en aumento, existe un deseo insatisfecho de compra y se puede esperar que el título siga subiendo, y viceversa.

El análisis de la *Media Móvil* es otro de los instrumentos de seguimiento de tendencia dentro del análisis técnico. Ofrece la ventaja de emitir señales de gran precisión y no sujetas a interpretación. La Media Móvil de los últimos n días, por ejemplo, se calcula sumando los precios de cierre del índice general de los últimos n días y dividiendo esta cifra por n. El calificativo de "móvil" se explica porque en el cálculo se utilizan únicamente los precios de las n últimas sesiones bursátiles, de tal forma que el conjunto de datos sobre los que calcula la media va a registrar un movimiento de avance en cada nueva sesión bursátil.

Las medias móviles tienen como finalidad fundamental reflejar las tendencias de los precios a corto, medio y largo plazo. Además actúan como soportes (impidiendo mayores caídas en los precios), y como resistencias (frenando subidas de precios). Cada vez que la línea del índice general cruza una media genera una señal, y cada vez que dos medias se cruzan generan, a su vez, señales (Figura 0.3a)

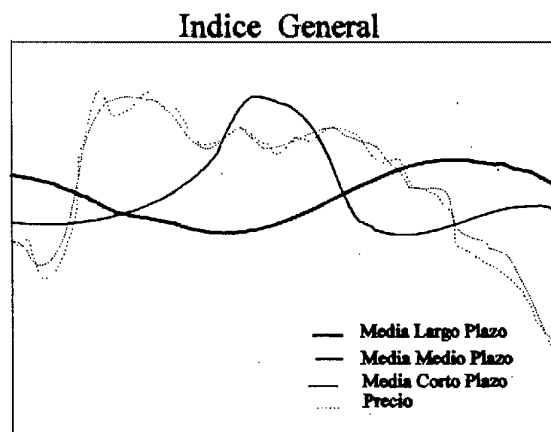


Figura 0.3a

*Las Medias Móviles como Indicadores de Tendencias.
Si la línea del Índice General cruza una media, genera una señal.
Cada vez que dos medias se cruzan generan, a su vez, señales.*

Otra posible forma de utilización de las medias móviles con la finalidad de generar señales de compra o venta es su uso en forma de *osciladores*. Los osciladores son indicadores técnicos para el corto plazo que tienen como objetivo medir la aceleración del movimiento de los precios. Por tanto, la utilización de las medias móviles como oscilador pretende, además de medir la divergencia o convergencia entre dos medias móviles para generar señales, el constatar si confirman o no la línea de precios. (Una valoración de las medias móviles en la bolsa española ha sido ampliamente constatada por Alvarez (1992)).

Ralph N. Elliott realizó un estudio del mercado de valores profundizando y extendiéndose en la historia y en los movimientos de las medias. Postuló que el movimiento de los precios formaba pautas distinguibles y repetitivas en cuanto a forma, pero no en lo que se refiere a tiempo o amplitud. Su idea consiste básicamente en un sistema de reglas deducidas empíricamente que interpretan la acción de las principales medias del mercado de valores.

Elliott introdujo la idea de que el mercado de valores tiende a expandirse en series de ondas, con ello surge el Principio de la Onda de Elliott que observa los movimientos de las cotizaciones en el mercado. El principio fundamental de Elliott consiste en la afirmación de que el mercado de valores se desdobra de acuerdo con una pauta de cinco ondas al alza y tres ondas a la baja para formar un ciclo completo de ocho ondas (Figura 0.4). Las ondas 1, 3 y 5 se denominan *ondas de impulso* y las ondas 2 y 4 se conocen como *ondas correctivas*. Un ciclo completo que consta de ocho ondas está formado por dos fases distintas: la fase de números, conocida como "cinco", y la fase de letras, llamada a veces "tres". Dentro de análisis técnico, también se reconocen *tres fases* en el avance del mercado que tienen esencialmente las mismas características que las *tres ondas* de impulso de Elliott

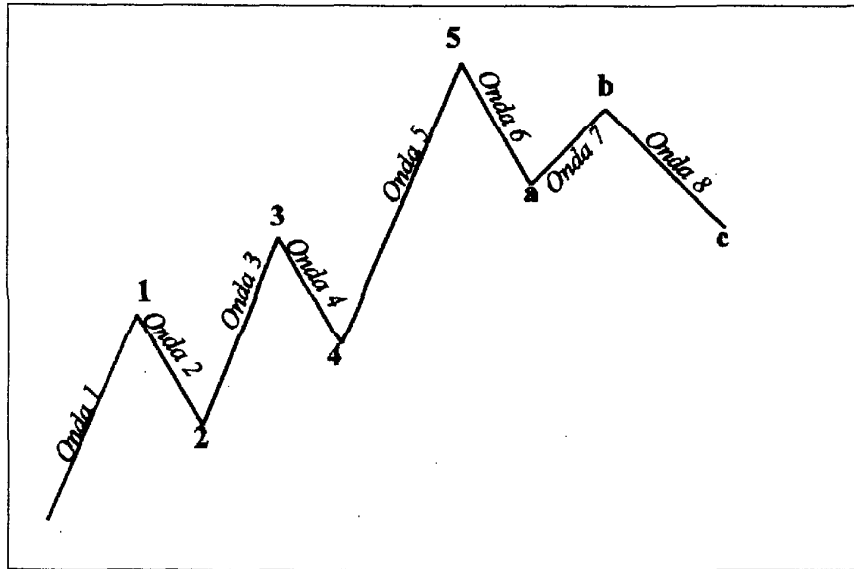


Figura 0.4

Pauta Básica del Principio de Onda de Elliot.

Consiste en un ciclo completo de ocho ondas: cinco ondas al alza (fase de números) y tres ondas a la baja (fase de letras).

Después de un primer ciclo se desarrolla otro similar de ocho ondas (cinco al alza y tres a la baja), para terminar con un último avance de cinco ondas al alza; así se completa un movimiento "alcista" mayor de cinco ondas, produciéndose a continuación un movimiento "bajista" mayor de tres ondas. La Figura 0.5 representa dos ondas de grado superior que se descomponen en ocho ondas del siguiente grado inferior, y que a su vez se subdividen en treinta y dos ondas del siguiente grado inferior.

Dado que la forma es repetitiva a todos los niveles y en todos los períodos de tiempo, tiene valor de predicción. Un ciclo completo, en el contexto general de la formación de la onda, revela lo que se debe esperar, tanto en lo que se refiere al equilibrio del ciclo actual como al próximo ciclo de mayor grado.

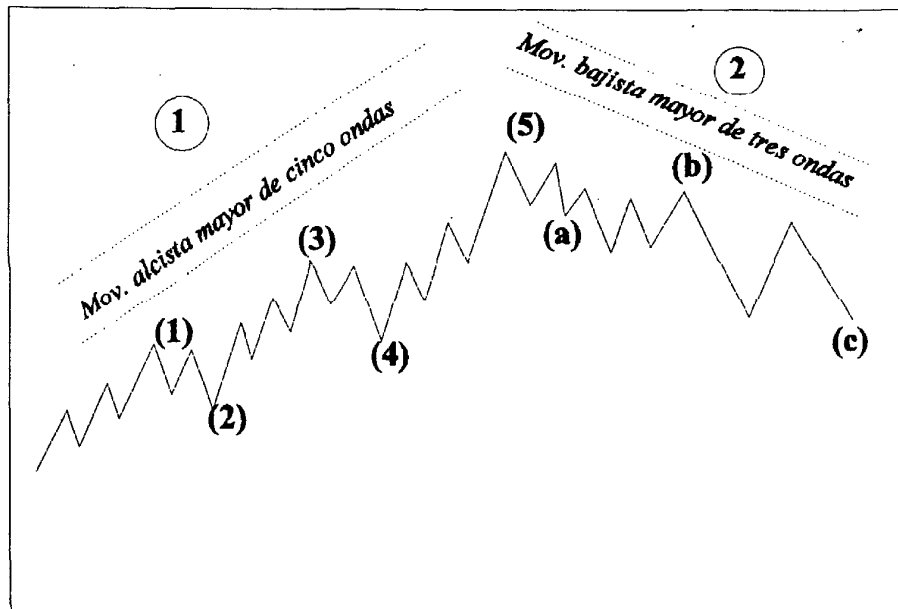


Figura 0.5

Dos ondas de grado superior se descomponen en 8 ondas del siguiente grado inferior subdividiéndose en 32 ondas del grado inferior siguiente.

En un ciclo completo del mercado, las ondas se subdividen en ondas de ciclo primarias, intermedias y menores. La formación de onda se rige por los siguientes principios básicos: 1) la acción viene seguida de la reacción; 2) las ondas de impulso (movimientos en la dirección de la tendencia principal) se subdividen en cinco ondas, y las ondas correctivas (movimientos en contra de la tendencia principal) se subdividen en tres ondas; 3) un ciclo completo se obtiene al finalizar un movimiento de ocho ondas (cinco al alza y tres a la baja) y 4) el marco temporal no hace variar la pauta, ya que el mercado sigue reflejándose en su forma básica; las ondas se pueden alargar o comprimir, pero la pauta subyacente es constante.

De alguna manera, las medias del mercado desarrollan tendencias que se despliegan siguiendo pautas de la Onda de Elliott, al margen de los movimientos de precio de las acciones individuales. La filosofía de Elliott permite que las actitudes individuales y circunstanciales afecten a la formación del precio de cualquier acción, ya que lo que el Principio de Onda refleja es sólo ésa parte del proceso de decisión de cada persona que es compartida por el conjunto de todos los inversores.

El Principio de Onda tiene un trasfondo histórico y matemático en la secuencia de números de Fibonacci, en donde la suma de dos números consecutivos es igual al siguiente número superior:

$$X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$$

cuya solución para $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$ es la sucesión:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$

Esta serie de números proporciona una función de medida conveniente para las ondas de tiempo. La serie de Fibonacci es útil para estudiar las series de tiempo económico y éstas se pueden analizar partiendo de una base horaria, diaria, semanal, mensual o anual. Un estudio de la estructura del tiempo indica que los cambios del precio del mercado tienden a desarrollarse en movimientos de onda, y que éstos movimientos no se pueden describir adecuadamente mediante un análisis de camino aleatorio.

Aunque el tiempo no es una propiedad predecible del Principio de Onda, frecuentemente las secuencias de tiempo basadas en la serie de Fibonacci parecen

encajar duraciones de onda con una gran exactitud, dando al analista una perspectiva adicional. Elliott afirmó que el factor tiempo suele "ajustarse a la pauta", de ahí su importancia. En el análisis de onda, los períodos temporales sirven para indicar posibles *áreas de giro*, sobre todo si sus duraciones coinciden con objetivos de precio y cómputo de onda.

El Principio de Onda ratifica gran parte de la Teoría de Dow y prueba la validez del análisis técnico, pero no ocurre en el caso contrario ya que aquél tiene una base matemática, sólo requiere una media de mercado para su interpretación y se desarrolla siguiendo un ritmo básico o pauta. Sin embargo, ambas teorías están basadas en observaciones empíricas y se complementan entre sí, siendo de gran utilidad al analista técnico para decidir qué formaciones son de mayor importancia.

En cualquier caso, y a pesar de que muchos analistas no lo tratan como tal, El Principio de Onda de Elliott es un estudio serio y objetivo, pudiéndose considerar como "un *tipo disciplinado* de análisis técnico". Según los autores Frost y Prechter (1985), el Principio de Onda se muestra claramente en el mercado, ya que "el mercado de valores se puede considerar como una manifestación de la estructura formal del progreso del hombre en vez de un revoltijo informe que reacciona ante los nuevos acontecimientos".

A pesar del dominio en la literatura académica del paradigma camino aleatorio/mercados eficientes, algunas instituciones de inversores, cada vez más numerosas, dedican una considerable cantidad de recursos al análisis técnico declarando incluso que es posible "anticiparse al mercado" con tales procedimientos (Pruitt y White, 1988).

0.4. Un Modelo Especulativo de Mercados de Cambio

Un capítulo de especial relevancia en el campo de la economía lo constituyen los mercados de tipos de cambios. Existen distintos planteamientos teóricos sobre la cuestión de determinar los tipos de cambio que están estrechamente vinculados al mecanismo de ajuste de la balanza de pagos. Dos enfoques predominan en la literatura económica. El primero engloba al modelo comercial, mientras que el segundo enfoque engloba los modelos monetarios y los modelos de equilibrio de cartera. (Para una panorámica general véase Bajo y Sosvilla, 1993).

En el modelo comercial, en donde se utilizan variables flujo, el tipo de cambio de equilibrio viene determinado por la intersección de las curvas de demanda y oferta de divisas. La demanda de divisas se produce a partir de las partidas deudoras de la balanza de pagos (importaciones de bienes y servicios y exportaciones de capital), mientras que la oferta de divisas se origina en las partidas acreedoras (exportaciones de bienes y servicios e importaciones de capital) (Fernández Díaz, Parejo Gamir y Rodríguez Saiz, 1993). La inestabilidad del equilibrio dependerá de las interacciones que se produzcan entre los niveles de precios y los tipos de interés de los distintos países, así como de las expectativas de ambas variables y las del propio tipo de cambio.

El segundo enfoque utiliza variables stocks para su descripción. El modelo monetario de los tipos de cambio tiene como factor determinante las políticas monetarias en el mercado de dinero nacional y extranjero. Los modelos monetarios que utilizan tipos de cambio rígidos a corto plazo son los llamados modelos de sobre-reacción; su característica es que a consecuencia de las perturbaciones el tipo

de cambio alcanza el equilibrio a largo plazo. El modelo monetario con tipo de cambio flexible comenzó a utilizarse a partir de la década de los setenta cuando comenzaron a producirse distintas modelizaciones utilizando otras variables macroeconómicas. Los modelos de equilibrio de cartera amplían el análisis incluyendo otros tipos de activos. La característica de estos modelos consiste en considerar que el tipo de cambio no sólo fluctúa cuando hay perturbaciones en los mercados de dinero sino que también influyen los mercados con otros activos financieros.

En los últimos años se ha abierto una línea de investigación alternativa consistente en justificar la alta volatilidad registrada en este tipo de mercados (Bajo, Fernández y Sosvilla, 1992a,b). El papel fundamental que desempeñan las innovaciones o nueva información disponible para los agentes en los mercados cambiarios, podrían explicar las desviaciones observadas en los tipos de cambio con respecto al modelo de camino aleatorio. Existen distintos modelos teóricos propuestos que consideran que los tipos de cambios pueden verse como precios de activos, e introducen elementos no lineales que surgen fundamentalmente de los mecanismos de generación de expectativas por parte de los agentes que intervienen en el mercado.

La no linealidad y las expectativas de los agentes que intervienen en el mercado podría ser una explicación al problema de la volatilidad en los mercados de tipos de cambio. En la actualidad el proceso de modelización está teniendo en cuenta estos dos factores determinantes en las variaciones del tipo de cambio, y tienen como conclusión que en un determinado rango de los parámetros el modelo presenta alta sensibilidad a las condiciones iniciales, dando lugar a movimientos cíclicos del tipo de cambio y caos.

En este sentido, se establece que en el mercado existen dos tipos de agentes: los *chartistas* y los *fundamentalistas*, que utilizan distintos niveles de información. La interacción de ambos agentes introduce un número suficiente de no linealidades que origina movimientos caóticos en el mercado que pueden ser interpretados como aleatorios, pero en donde subyace una estructura determinista. En este contexto es posible realizar predicciones a corto plazo.

De Grauwe y Vansanten (1990) realizaron un estudio que introduce no linealidades a partir de ciertas suposiciones sobre la actuación en la balanza comercial y en la formación de expectativas, considerando la variación esperada del tipo de cambio entre dos períodos consecutivos como la media ponderada de las expectativas mantenidas por los chartistas y fundamentalistas. Sus conclusiones determinan que para un determinado rango de los parámetros, el modelo presenta una dinámica de carácter caótico. Más recientemente, De Grauwe, Dewachter y Embrechts (1993) utilizan un enfoque similar. A continuación vamos a desarrollar esta nueva versión como prototipo de modelo que presenta comportamiento caótico.

Sea R_t el tipo de cambio en el período t y X_t la ecuación en forma reducida que describe la estructura del modelo y las variables exógenas que hacen funcionar el tipo de cambio en el período t . La primera premisa consiste en considerar que el tipo de cambio se ajusta a la siguiente ecuación

$$R_t = X_t E_t(R_{t+1})^b \quad (0.4.1)$$

siendo $E_t(R_{t+1})$ las expectativas del tipo de cambio en el período t para el período $t+1$ y donde b es el factor de descuento.

La segunda premisa postula que la variación esperada del tipo de cambio entre los períodos t-1 y t+1 es una media ponderada entre las variaciones esperadas por los chartistas y fundamentalistas en este mismo período

$$E_t(R_{t,1})/R_{t-1} = (E_{ct}(R_{t,1})/R_{t-1})^{m_t} \cdot (E_{ft}(R_{t,1})/R_{t-1})^{1-m_t} \quad (0.4.2)$$

siendo $E_{ct}(R_{t,1})$ y $E_{ft}(R_{t,1})$ las expectativas de los chartistas y los fundamentalistas respectivamente, y donde m_t es el factor de ponderación.

El comportamiento chartista lleva a suponer que la variación esperada del tipo de cambio para los mismos será una función de los tipos de cambio, en los últimos N períodos

$$E_{ct}(R_{t,1})/R_{t-1} = f(R_{t-1}, \dots, R_{t-N}) \quad (0.4.3)$$

Asumiendo que las expectativas de los fundamentalistas se comportan según la expresión $E_{ft}(R_{t,1}) = R_t^* = R_{t-1}^*$, se deduce que la variación esperada por los fundamentalistas sobre el tipo de cambio entre los períodos t-1 y t+1 se ajusta a la ecuación

$$E_{ft}(R_{t,1})/R_{t-1} = (R_{t-1}^*/R_{t-1})^\alpha \quad (0.4.4)$$

donde α es la velocidad de retorno a la posición $R_t^* = (X_t)^{1/(1-b)}$ esperada por los fundamentalistas, si $\alpha=1$ significa que los fundamentalistas esperan que el tipo de cambio vuelva a su valor fundamental en un período.

Por otra parte, en un ambiente de incertidumbre respecto al valor fundamental del tipo de cambio, la ponderación de las expectativas de los fundamentalistas aumentará cuando el tipo de cambio del mercado se separa del valor de equilibrio, por tanto el factor de ponderación vendrá dado por la expresión

$$m_t = \frac{1}{1 + \beta (R_{t-1} - R_{t-1}^*)^2} \quad (0.4.5)$$

donde β es el grado de precisión de las estimaciones fundamentalistas.

Sustituyendo las ecuaciones (0.4.3) y (0.4.4) en la ecuación (0.4.2), y esta última en la (0.4.1), resulta

$$R_t - X_t [R_{t-1} f(R_{t-1}, \dots, R_{t-N})^{m_t} (R_{t-1}^*/R_{t-1})^{\alpha(1-m_t)}]^b \quad (0.4.6)$$

El modelo queda definido por el sistema de ecuaciones en diferencias (0.4.5) y (0.4.6), que dada su naturaleza no lineal es muy dificultoso resolverlo analíticamente.

Particularizando la actuación de los chartistas en el mercado en el sentido de utilizar el método de las medias móviles según el cual los chartistas actúan en función de los promedios a corto y a largo plazo, se puede establecer

$$E_{ct}(R_{t+1})/R_{t-1} = (R_{t-1}/R_{t-2})^y \cdot (R_{t-3}/R_{t-2})^y$$

siendo γ el grado de extrapolación de la evolución del tipo de cambio en el pasado llevada a cabo por los chartistas. El sistema que describe la dinámica del modelo de tipos de cambio resulta ahora de la siguiente forma

$$R_t = R_{t-1}^{\alpha_1} R_{t-2}^{\alpha_2} R_{t-3}^{\alpha_3} \quad (0.4.7)$$

$$m_t = \frac{1}{1 + \beta (R_{t-1} - 1)^2} \quad (0.4.8)$$

que es un sistema de ecuaciones en diferencias de tercer orden y donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b [1 + \gamma m_t - \alpha (1 - m_t)] \\ \alpha_2 &= -2b \gamma m_t \\ \alpha_3 &= b \gamma m_t \end{aligned}$$

Manteniendo fijos el parámetro de descuento b y el parámetro β (que mide el grado de precisión de las estimaciones fundamentalistas) el modelo dependerá solamente de los parámetros α y γ que han sido descritos con anterioridad. Los resultados que se derivan de las simulaciones numéricas realizadas por los autores concluyen que para valores de $\gamma \leq 1$ las soluciones convergen al valor fundamental del tipo de cambio, mientras que si $\gamma > 1$, se producen movimientos cíclicos del tipo de cambio en torno a su valor fundamental, aumentando suficientemente el valor de γ el modelo responde con una dinámica caótica. El parámetro α que mide la velocidad con que el tipo de cambio vuelve a la posición de equilibrio también afecta a la naturaleza de la dinámica. El caos puede surgir tanto con valores bajos $0 < \alpha < 1$,

como con valores altos $\alpha > 1$.

Según Fernández Díaz (1994), las conclusiones de éste modelo ponen en tela de juicio las posibilidades y operatividad de la aplicación de la teoría de las expectativas racionales al problema de la modelización de los tipos de cambio. Este aspecto será comentado con más detalle en el apartado de conclusiones de esta Tesis.

0.5. Un modelo especulativo de mercados de capitales

Existen buenas razones económicas para el aumento de la volatilidad en los mercados financieros. En los años 50 y 60 la inflación permaneció muy baja y estable, los tipos de interés y los precios de los bonos variaron muy poco. Existían tipos de cambio fijos y relativamente estables con todos los principales países con los que se mantenían relaciones comerciales. La actividad económica estaba también próxima al empleo total. El entorno económico básico se hizo mucho menos estable en los años 70 y 80. La inflación se aceleró y los precios de los bonos se hicieron más volátiles. A medida que se reunificaron los mercados de capital mundiales, el tipo de cambio también se hizo muy volátil. Las tasa de desempleo se hicieron más volátiles en los años 80, y llegaron a alcanzar niveles que no se había experimentado desde los años 30. Por tanto, aumentó dramáticamente la incertidumbre económica básica, afectando a todos los mercados.

Los productos derivados como los futuros, las opciones sobre índices bursátiles, el arbitraje con los índices y las estrategias guiadas por ordenador, surgieron para hacer frente a esta incertidumbre en aumento. Actualmente los analistas se cuestionan si existe un papel económico útil para estos instrumentos.

El crash bursátil de octubre de 1987 y sucesos más recientes han llevado a los economistas financieros a reconsiderar el comportamiento de los mercados de valores en particular y los mercados especulativos en general. La teoría del camino aleatorio y el paradigma de los mercados eficientes ha comenzado a ser cuestionado como una explicación plenamente satisfactoria del comportamiento de los mercados bursátiles (Peters, 1994). La alta volatilidad registrada en los mercados financieros durante los últimos años ha puesto de manifiesto la necesidad de elaborar teorías que expliquen dicha volatilidad en función del comportamiento especulativo de los agentes que intervienen en los mercados.

Leland (1988) sugiere diversas teorías para el comportamiento de los mercados de valores, algunas de ellas están firmemente arraigadas dentro del paradigma tradicional de los mercados eficientes; en cambio otras están basadas en la perspectiva del fracaso del mecanismo del mercado o sobre la posibilidad de considerar diferentes clases de inversores.

Diversos autores consideran la especulación como la principal causa de la alta volatilidad registrada actualmente en los mercados financieros. La especulación suele entenderse como la interacción generada por dos tipos de agentes del mercado: los fundamentalistas, que forman su expectativa racional en base a los valores que sobre los activos indica la teoría económica, y los chartistas, un grupo de agentes que basan su actuación en el mercado por medio del análisis de las tendencias de los precios en el pasado.

En este sentido cabe citar diversos trabajos pioneros como el de Zeeman (1974), que explica el comportamiento inestable en un mercado de valores con especuladores mediante un modelo basado en la teoría de catástrofes de Thom.

Frankel y Frott (1986) sostienen que la gran apreciación del dólar desde 1980 a 1985 no fue debida a cambios en las variables fundamentales que afectaron a dicha moneda (como son los tipos de interés o el aumento de la demanda de activos en dólares en relación con otras divisas), sino que el dólar pudo haber caído en una burbuja especulativa. En su modelo actúan tres clases de agentes: fundamentalistas, chartistas y administradores de cartera cuya actuación se basa en establecer una media ponderada de las predicciones fundamentalistas y chartistas. Su desarrollo no supone un comportamiento plenamente racional de las tres clases de agentes en el sentido en que ninguno de ellos condiciona sus predicciones al conocimiento del modelo en su conjunto. La burbuja es el efecto del intento de los administradores de cartera de aprender del modelo.

Bowden (1990) plantea una revisión de la teoría de mercados eficientes sobre la base del equilibrio de un juego predictivo con el fin de explicar la alta volatilidad que existe en muchos mercados de activos. En su modelo considera la existencia de una mezcla de reglas chartistas de mercado, llegando a la conclusión de que tales reglas tienen que estar sujetas a una dinámica evolutiva, siendo imposible la creación de genuinos patrones de comportamiento a nivel global. Los intentos de los agentes de predecir en base a la historia de las cotizaciones conduce a la evolución de los patrones temporales y a la entrada de nuevas reglas de carácter eventual.

Si mucha gente sigue las reglas iniciales, entonces tales reglas pueden autojustificarse, pero en la medida en que se mantenga el nivel de soporte de los chartistas, surge un continuo incentivo para revisar las mejores reglas predictivas del mercado. La mezcla de reglas va cambiando sucesivamente mientras los agentes van permutando las reglas viejas por nuevas o por la entrada de nuevos agentes con reglas distintas. Diversos patrones de comportamiento son generados cuando se llega a un

estado de desequilibrio ocasionado por la continua revisión de reglas. Cuando un patrón se hace evidente, tienen éxito local diversas reglas eventuales como expectativas adaptativas o extrapolativas. Se produce un comportamiento que, a posteriori, puede transgredir las recomendaciones de los chartistas originales y ocasionar la aparición de burbujas especulativas.

Finalmente, Bowden sugiere, a partir de diversos análisis empíricos con los tests econométricos habituales, que los patrones temporales a corto plazo creados como trayectorias en desequilibrio pueden ser distinguibles con muy poca probabilidad de un camino aleatorio a corto plazo.

Goldman y Beja (1979) resaltan el papel de los especialistas del mercado y su influencia sobre los precios, utilizando un modelo de ajuste de precios con ecuaciones diferenciales estocásticas. Posteriormente, Beja y Goldman (1980) desarrollan un modelo en el que el precio de los activos se ajusta con velocidad finita a la demanda agregada de los inversores e introducen un proceso de expectativas adaptativas para determinar la actuación de los chartistas en el mercado de valores, analizando las distintas tasas de convergencia hacia un equilibrio intertemporal walrasiano.

La aportación de Chiarella (1992) a este último modelo es la introducción de no linealidades en el exceso de demanda chartista, lo cual da lugar a una dinámica de los precios donde el nivel de equilibrio puede ser estable o inestable. En el caso estable, los precios convergen al equilibrio tras un shock que lo haya perturbado inicialmente, mientras que en el caso inestable, los precios tenderán a un ciclo límite estable alrededor del mismo. A continuación explicamos el modelo de Chiarella y analizamos sus conclusiones.

El modelo especulativo que vamos a desarrollar es una alternativa al punto de vista de que el precio sólo refleja el valor fundamental del activo esperado racionalmente. El estudio se concentra en analizar las dinámicas del precio de un activo, considerando la interacción generada por las dos clases diferentes de inversores: los fundamentalistas y los chartistas.

Por simplicidad, se considera un mercado especulativo donde se negocia un único activo. Inicialmente, se admite que los intercambios comerciales pueden realizarse de forma continua. Se adopta como premisa básica que los cambios del precio están forzados por el *exceso de demanda agregada* de los inversores

$$\dot{P}(t) = D_t^*(.) \quad (0.5.1)$$

donde $\dot{P}(t)$ es el logaritmo de los precios del activo en un tiempo t , y D_t^* la función del exceso de demanda de los inversores para el activo, en el tiempo t . El exceso de demanda de los inversores depende de su percepción sobre el mecanismo del mercado. Se supone que existen las dos tendencias clásicas sobre el funcionamiento del mercado de valores: una tendencia basada en el análisis fundamental, y otra tendencia basada en el análisis técnico. El chartista, al contrario que el fundamentalista, es un operador a corto plazo. Ambas tendencias son compatibles dentro del mercado de valores. Es por esto por lo que la segunda premisa del modelo es considerar que el exceso de demanda de los inversores tiene una componente fundamental y una componente especulativa

$$D_t^*(.) = D_t(.)+d_t(.). \quad (0.5.2)$$

donde D_t se refiere al exceso de la demanda fundamental y d_t al exceso de la demanda chartista.

Sea $W(t)$ el logaritmo del precio que la demanda fundamental justifica en un tiempo t , esto es, el precio de equilibrio subyacente de la acción. Es posible expresar el exceso de demanda fundamentalista como una función lineal monótona creciente que se anula en cero

$$D_t(.) = a(W(t) - P(t)) , \quad a \in \mathbf{R}^+ \quad (0.5.3)$$

donde "a" es la *pendiente de la demanda fundamentalista*. Esto sugiere que dicha demanda se ajusta con una dinámica de *expectativas racionales*. Si la estimación del valor intrínseco de una acción es mayor que el precio real de mercado, la demanda fundamentalista aumentará y disminuirá en el caso contrario.

El exceso de demanda chartista se determina definiendo una nueva variable $\Psi(t)$, que mide la estimación (media) de la tendencia actual de $P(t)$; sea también $g(t)$ la tasa creciente de inversiones alternativas, como es el caso de bonos gubernamentales (sin riesgo). Se considera, por tanto, que el exceso de demanda chartista es una función de la diferencia entre el rendimiento esperado del activo, medido por la estimación chartista de la tendencia del precio, y el rendimiento de algún activo alternativo, esto es, $\Psi(t) - g(t)$

$$d_t(.) = h(\Psi(t) - g(t)) \quad (0.5.4)$$

donde h es una función no lineal, creciente, que pasa por el origen, con un punto de

inflexión en (-g) y acotada superior e inferiormente, lo que indica que el volumen de contratación especulativo está controlado en función del activo.

El modelo se cierra especificando el modo en que los chartistas forman su estimación de la tendencia del precio. Los chartistas consideran estimaciones sobre el estado del mercado basándose en la hipótesis de que los precios varían siguiendo tendencias de los precios pasados. Todo ello nos lleva a suponer que la dinámica de un mercado especulativo fuera del equilibrio se basa en un proceso de *expectativas adaptativas* de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\dot{\Psi}(t) = c(\dot{P}(t) - \Psi(t)), \quad 0 < c < \infty \quad (0.5.5)$$

que describe la variación chartista de la tendencia del precio y donde c es la velocidad de ajuste chartista. Esta ecuación pretende describir la base del análisis técnico, donde la estimación de la tendencia se ajusta al alza si el cambio de precio es más alto que el esperado, y viceversa. Alternativamente, la cantidad $\tau (=1/c)$ indicará el tiempo de retardo en la formación de expectativas.

De las ecuaciones (0.5.1) - (0.5.5) se obtiene que las dinámicas del precio del activo se rigen por

$$\begin{aligned} \dot{P} &= a(W - P) + h(\Psi - g) \\ \tau \dot{\Psi} &= a(W - P) - \Psi + h(\Psi - g) \end{aligned} \quad (0.5.6)$$

que constituye un sistema de segundo orden de ecuaciones diferenciales no lineales.

Siguiendo a Chiarella (1992), consideramos que $W(t)$ y $g(t)$ son constantes. En tal caso, el punto de equilibrio del sistema (0.5.6) viene dado por $\bar{\Psi} = 0$ y $\bar{P} = W + h(-g)/\alpha$ y el sistema se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -ap + k(\Psi) \\ \tau \dot{\Psi} &= -a p - \Psi + k(\Psi) \end{aligned} \quad (0.5.7)$$

siendo $p = P - \bar{P}$ la desviación del precio de equilibrio y donde $k(\Psi) = h(\Psi - g) - h(-g)$. En este caso el punto de equilibrio es $\bar{P} = \bar{\Psi} = 0$

Se observa que la función $k(\Psi)$ tiene las mismas características que $h(\Psi - g)$, salvo que ahora el punto de inflexión está en el origen. Por otra parte, como $k'(\Psi) = h'(\Psi - g) > 0$, en el punto de equilibrio ocurre que $k'(0) = h'(-g) = b > 0$, donde el parámetro b refleja la pendiente en el equilibrio de la demanda chartista o especulativa.

Análisis Lineal Local

Para hacer el análisis lineal local del sistema (0.5.7) calculamos la matriz jacobiana en el punto de equilibrio, esto es

$$J = \begin{bmatrix} -a & b \\ -a/\tau & (b-1)/\tau \end{bmatrix}$$

Notemos que $\det(J) = a/\tau > 0$, lo que excluye la posibilidad de punto de silla. Para determinar la estabilidad o inestabilidad local calculamos $\text{traz}(J) = -a + (b-1)/\tau$.

Si $\tau > (b-1)/a = \tau^*$, el equilibrio resulta ser localmente estable mientras que si se verifica $\tau < (b-1)/a = \tau^*$, el equilibrio es localmente inestable.

Se observa que el equilibrio se hace localmente inestable cuando los chartistas basan su estimación de la tendencia en los cambios de precio más recientes. Aumentando el impacto del mercado de los chartistas, el sistema oscila y se hace inestable, como se espera. La estabilidad e inestabilidad del equilibrio y la naturaleza de las fluctuaciones que se producen en el caso inestable, dependerán de la interacción entre la intensidad de la demanda fundamental, la intensidad de la demanda especulativa y la velocidad con la que los chartistas revisan sus estimaciones de la tendencia del precio.

El Ciclo Límite

Aplicando el Teorema de Bifurcación de Hopf, discutido entre otros por Lorenz (1993), que establece la existencia de órbitas cerradas en las proximidades del punto fijo para valores apropiados del parámetro τ , calculamos la ecuación característica de la matriz jacobiana, y los autovalores vienen dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \left(1 - \frac{\tau^*}{\tau}\right) \pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{\tau^*}{\tau}\right)^2 - \frac{4a}{\tau}}}{2}$$

Si $\tau = \tau^*$, los autovalores son imaginarios puros $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a/\tau} i$, y la parte real de λ verifica $\delta \text{Re}(\lambda(\tau))/\delta \tau = -a/2\tau^* < 0$. Esto permite afirmar que aparece un ciclo límite cuando τ pasa a través de τ^* (desde $\tau > \tau^*$ a $\tau < \tau^*$), ya que el punto fijo pasa de ser

estable a inestable. El punto de equilibrio cambia su estabilidad a causa de que la parte real de λ pasa de ser negativa a positiva.

El teorema de bifurcación de Hopf establece sólo la existencia de órbitas cerradas en un entorno del punto de equilibrio, pero no afirma nada sobre la estabilidad de las órbitas. Para determinar la estabilidad del ciclo límite y sus características, el proceso de Chiarella consiste en construir un modelo no lineal que tenga la propiedad de ser capaz de generar un movimiento de ciclo límite alrededor del punto inestable, esto es, trayectorias auto-sostenidas que persisten para un amplio rango de cambios arbitrarios de valores en los parámetros del modelo. Para ello se realiza un análisis del modelo no lineal a través de su ecuación diferencial de segundo orden, obtenida del sistema (0.5.7), una vez se halla eliminado p en ambas ecuaciones, resultando

$$\tau \ddot{\Psi} + (a\epsilon + b - k'(\Psi)) \dot{\Psi} + a\Psi = 0, \quad \text{siendo } \epsilon = \tau - \tau^* \quad (0.5.8)$$

Es posible dar una descripción global de la dinámica de Ψ sin hacer ninguna simulación numérica, ya que podemos aplicar dos teoremas referentes a ecuaciones diferenciales no lineales. El teorema de Olech (1963) afirma que la ec. diferencial (0.5.8) es global y asintóticamente estable para $\epsilon > 0$. Por otra parte, haciendo $U(\Psi) = (a\epsilon + b - k'(\Psi))/\tau$ y $V(\Psi) = a\Psi/\tau$, la ecuación (0.5.8) puede verse como una ecuación de Liénard generalizada, que ha sido discutida por Gandolfo (1983), utilizando la versión del Teorema de Levinson y Smith, lo que permite afirmar que la ecuación (0.5.8) tiene un *único* ciclo límite para $\epsilon < 0$.

Las gráficas que se obtienen por métodos de aproximación son globalmente válidas, pero esta aproximación no dice mucho sobre el comportamiento cualitativo

del ciclo límite, esto es, el efecto del cambio de los parámetros estructurales del modelo sobre la amplitud del ciclo. Para estudiar la forma en que los parámetros del modelo afectan a las fluctuaciones, se aplica el método de la media (Chiarella, 1990) con el fin de investigar la naturaleza del ciclo límite en el punto de bifurcación $\epsilon=0$. Para ello, primero resuelve la ecuación diferencial (0.5.8) ignorando los efectos no lineales; la solución en este caso es de la forma

$$\Psi(t)=A \cdot \text{sen}(\sqrt{a/\tau} \cdot t + \theta)$$

siendo A la amplitud y θ el ángulo de fase; el método de la media busca una solución de este tipo para la ecuación diferencial (0.5.8) cuando $\epsilon \neq 0$, esto es, una solución de la forma

$$\Psi(t)=A(t) \cdot \text{sen}(\sqrt{a/\lambda} + \theta(t))$$

donde ahora la amplitud y el ángulo de fase son dependientes del tiempo.

Realizando en el sistema de ecuaciones (0.5.7) una transformación en coordenadas polares: $\rho=A \cdot \cos \theta$, $\Psi=A \cdot \text{sen} \theta$, se llega a una aproximación de primer orden de la amplitud de fase A(t) que vendrá dada por la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{A} = A \cdot (K(A) - a\epsilon/2) / \tau \quad (0.5.9)$$

siendo

$$K(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [k'(A \text{sen } y) - b] \cos^2 y \, dy$$

La función $k'(\Psi)$ es simétrica respecto del eje vertical; como $k'(0) = b$, la función está acotada superiormente por el parámetro de impacto especulativo, y además se cumple que $\lim_{\Psi \rightarrow \pm \infty} k'(\Psi) = 0^+$; por tanto es posible asegurar que la función $K(A)$, cuya gráfica está representada en la Figura 0.6, tiene las siguientes características

- (i) $K(A) < 0$ ya que $k'(\Psi) < b, \forall \Psi$
- (ii) $K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [k'(0) - b] \cos^2 y \, dy = 0$
- (iii) Si $A \rightarrow \infty$, $\lim K(A) = -\frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 y \, dy = -\frac{b}{2}$
- (iv) $K'(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k''(A \operatorname{sen} y) \operatorname{sen} y \cos^2 y \, dy < 0$
 ya que $k''(A \operatorname{sen} y) < 0$ (> 0) si $\operatorname{sen} y > 0$ (< 0)
- (v) Si $A \rightarrow \infty$, $\lim K'(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k'(\infty) \operatorname{sen} y \cos^2 y \, dy = 0$

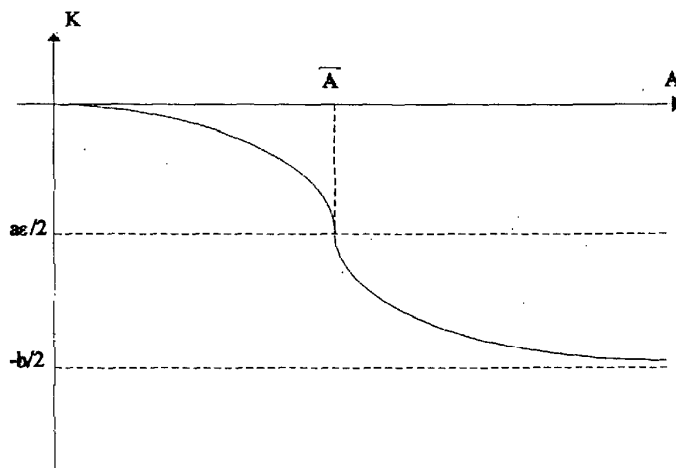


Figura 0.6

La Función $K(A)$

Estudiando el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial (0.5.9), podremos determinar cómo evoluciona la amplitud de las fluctuaciones del precio del activo. Si $\epsilon > 0$ el término $K(A) - a\epsilon/2 < 0, \forall A$, luego $\dot{A} < 0$ y por tanto $A \rightarrow 0$, el equilibrio es local y asintóticamente estable (Figura 0.7a). Si por el contrario, $\epsilon < 0$, la ecuación $K(A) - a\epsilon/2 = 0$ tiene una solución \bar{A} ; por tanto, $\dot{A} > 0$ para $A < \bar{A}$ y $\dot{A} < 0$ para $A > \bar{A}$. Y en consecuencia, desde un valor inicial, la amplitud A converge hacia \bar{A} , i.e., $A \rightarrow \bar{A}$ (Figura 0.7b).

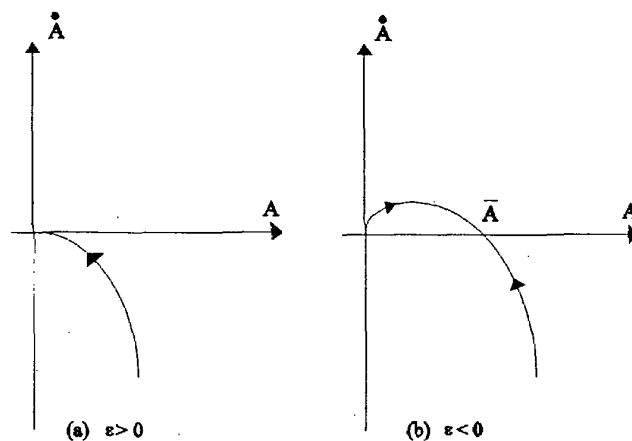


Figura 0.7

Comportamiento Dinámico de la Amplitud

Análisis Geométrico del Ciclo Límite

A continuación se analizan las isoclinas $\dot{P}=0, \dot{\Psi}=0$, en el sistema (0.5.7), considerando únicamente el caso donde se presenta inestabilidad local; esto es, cuando $b > 1 + a\tau$, y donde ya se ha comprobado que las oscilaciones de p y Ψ son atraídas hacia un único ciclo límite.

La primera de las isoclinas $p=k(\Psi)/a$, es una curva que tiene las características de la función $k(\Psi)$, esto es, una curva monótona creciente con un punto de inflexión en el origen y acotada superior e inferiormente, mientras que la segunda isoclina, $p=(k(\Psi)-\Psi)/a$, en el caso $b>1$, es una curva creciente en el origen y tiene dos puntos críticos, como se muestra en la Figura 0.8.

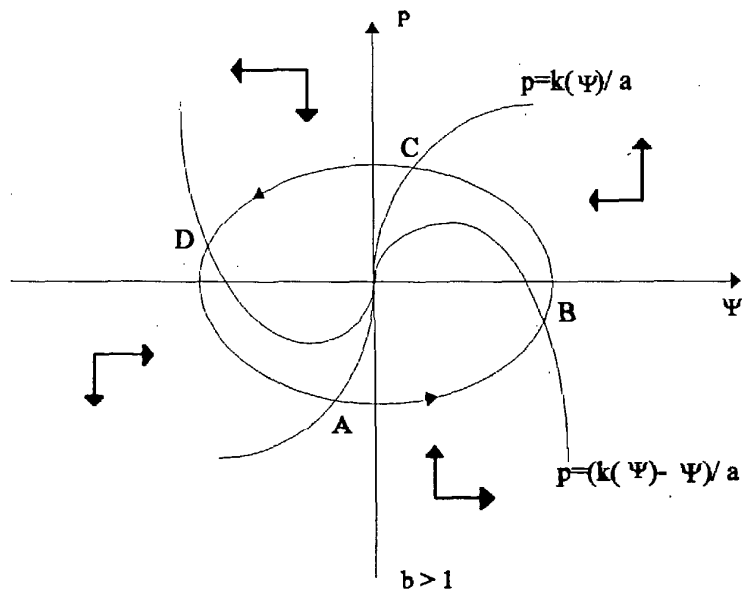


Figura 0.8

Análisis Geométrico del Ciclo Límite

Se pueden distinguir cuatro fases en las fluctuaciones de p y Ψ . En la *primera fase de A a B*, el precio del activo empieza a crecer, por lo que la demanda fundamentalista disminuye y aumenta la demanda chartista. La estimación chartista de la tendencia del precio se ajusta al alza y en consecuencia se incrementa la especulación. En la *segunda fase de B a C*, el precio sigue aumentando, por lo que la demanda chartista es aún mayor que la fundamentalista, pero la expectativa

chartista empieza a disminuir y la especulación se reduce. En la *tercera fase de C a D*, el precio comienza a ajustarse a la baja, la demanda fundamentalista comienza a aumentar, por lo que la expectativa chartista, y en consecuencia la especulación, sigue disminuyendo. En la *cuarta fase de D a A*, el precio del activo sigue reduciéndose todavía más, la demanda fundamentalista es ahora mucho mayor que la demanda chartista, pero la expectativa chartista de la tendencia del precio comienza a ajustarse al alza y la especulación aumenta. El ciclo entra ahora en la primera fase y se repite en sí mismo.

El precio fluctuará alrededor del equilibrio walrasiano hasta que se produzcan cambios en los parámetros del modelo, de esta forma el sistema es capaz de generar componentes transitorias significativas y fluctuaciones predecibles alrededor del punto de equilibrio.

Comportamiento Especulativo

Para analizar cómo afectan los parámetros del modelo a la amplitud de las fluctuaciones tendremos en cuenta que el comportamiento cualitativo de la amplitud A viene dado por la ecuación (0.5.9), siendo $\epsilon = \tau - (b-1)/a$; por tanto, diferenciando implícitamente la ecuación $K(A) - a\epsilon/2 = 0$ con respecto a cada uno de los parámetros estructurales del modelo, se puede observar los resultados siguientes.

a) Efecto de la *variación* de la pendiente de la función de *demanda fundamentalista* "a":

$$K'(\bar{A}) \cdot \frac{\delta \bar{A}}{\delta a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\epsilon + a \frac{\delta \epsilon}{\delta a}) = 0 \Rightarrow \frac{\delta \bar{A}}{\delta a} = -\frac{1}{2K'(\bar{A})} \cdot (\epsilon + \frac{b-1}{a}) = -\frac{\tau}{2K'(\bar{A})} < 0$$

en igualdad de condiciones, un crecimiento de a en la demanda fundamental conduce a un decrecimiento de la amplitud A de las fluctuaciones del precio del activo.

b) Efecto de la *variación* de la pendiente de *demanda chartista* " b ":

$$K'(\bar{A}) \cdot \frac{\delta \bar{A}}{\delta b} \cdot \frac{a}{2} \frac{\delta \epsilon}{\delta b} \Rightarrow \frac{\delta \bar{A}}{\delta b} = -\frac{1}{2K'(\bar{A})} > 0$$

en contraposición con el caso anterior, se observa que un crecimiento de b en la función de demanda chartista produce un crecimiento en la amplitud de las fluctuaciones.

c) Efecto del *tiempo de retardo medio* en la formación de la estimación de la tendencia chartista " τ ":

$$K'(\bar{A}) \cdot \frac{\delta \bar{A}}{\delta \tau} \cdot \frac{a}{2} \frac{\delta \epsilon}{\delta \tau} \Rightarrow \frac{\delta \bar{A}}{\delta \tau} = -\frac{a}{2K'(\bar{A})} < 0$$

en igualdad de condiciones, un decrecimiento de τ , esto es, cuando los especuladores reaccionan más rápidamente a los cambios del precio del activo, ocasiona que la amplitud de las fluctuaciones también aumente.

Oscilaciones relajadas

El modelo bidimensional que estamos considerando permite oscilaciones en las dos variables estado. En muchas de las investigaciones en modelos de dinámica económica surgen ecuaciones que presentan una forma similar a la segunda de las ecuaciones del sistema (0.5.7)

$$\dot{\Psi} = [-ap - \Psi + k(\Psi)] / \tau \quad (0.5.10)$$

donde el factor $1/\tau$ se considera como un *coeficiente de ajuste* que se supone muy grande, (caso $\tau \rightarrow 0$). Esta suposición se justifica usualmente en los mercados bien organizados (como son los mercados financieros con un flujo de información continua) que reaccionan mucho más rápidamente al desequilibrio que otros. La consecuencia importante de esta suposición consiste en el hecho de que la dimensión efectiva del sistema dinámico puede ser reducida con este procedimiento.

En este punto es notable analizar qué sucede cuando $\tau \rightarrow 0$. Si el tiempo de retardo en la formación de expectativas chartista tiende a cero, la segunda ecuación del sistema (0.5.7) queda de la forma

$$p = (k(\Psi) - \Psi)/a = f(\Psi) \quad (0.5.11)$$

y sustituyendo p en la primera de las ecuaciones resulta $\dot{p} = \Psi$. Por tanto, el movimiento dinámico está gobernado por la curva $p = f(p)$, i.e., una única ecuación de movimiento para la variable estado p . Esto es debido a que los posibles tipos de movimiento de estos sistemas están restringidos a aquellos conocidos de sistemas lineales en una dimensión, ya que el comportamiento oscilatorio sólo puede

presentarse para sistemas de dos dimensiones en tiempo continuo. Sin embargo, debido al movimiento sobre una variedad en lugar de en un espacio de fase, puede observarse un fenómeno dinámico diferente.

La dinámica en el caso $b < 1$ es manifiesta ya que la curva es decreciente en el origen y no hay puntos críticos; además si $\Psi > 0$ (< 0) entonces $p < 0$ (> 0), por tanto, el movimiento será a lo largo de la curva hacia el origen, que es el punto de equilibrio.

El análisis resulta más interesante si $b > 1$, en orden a obtener una idea del posible movimiento, consideramos el espacio de fase de la ecuación (0.5.11) en la Figura 0.9. La curva $f(\Psi)$ es creciente en el origen y tiene dos puntos críticos; el movimiento es ahora a lo largo de la curva LL' , siendo el punto de equilibrio inestable.

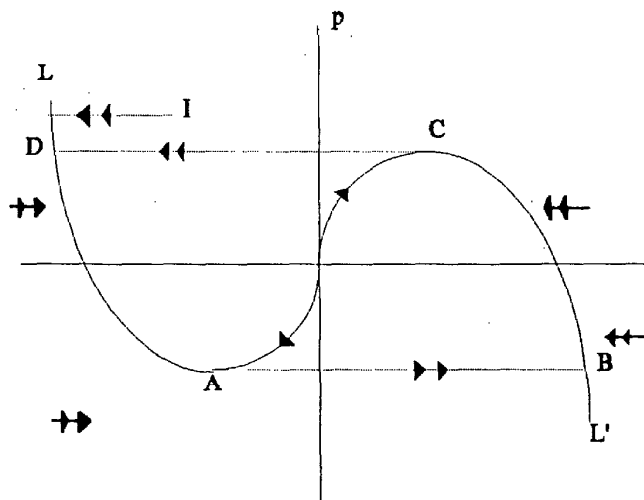


Figura 0.9

El Ciclo Límite cuando $\tau \rightarrow 0$

Todo el movimiento fluye hacia los puntos A y C, pero el movimiento no puede ser estacionario en esos puntos ya que no son puntos de equilibrio; es necesario imponer alguna hipótesis de salto para que los puntos pasen desde A a la rama BC o desde C a la rama DA.

Teniendo en cuenta la ecuación (0.5.10), se observa que si $\tau \rightarrow 0$ entonces $\dot{\Psi} \rightarrow \infty$, excepto en las proximidades de la curva $p = (k(\Psi) - \Psi)/a$ donde el movimiento está gobernado por la ecuación diferencial unidimensional $p = f(\Psi)$.

Si consideramos un punto inicial I, la variable Ψ se mueve muy rápidamente y casi horizontalmente (en realidad el movimiento es horizontal e instantáneo cuando $\tau=0$) hacia la proximidad de la curva $p=f(\Psi)$, donde el movimiento está gobernado por la ecuación unidimensional $p = f(\Psi)$.

Si $b < 1$, las trayectorias son arrastradas hacia el punto de equilibrio; pero si $b > 1$, en la Figura 0.9 se observa que las trayectorias son arrastradas hacia la rama LD y desde allí al punto A desde el cual, y bajo la influencia de la ecuación diferencial (0.5.10), Ψ se mueve ahora muy rápidamente hacia las proximidades de la rama L'B; las trayectorias son entonces arrastradas hacia el punto C, desde donde Ψ salta muy rápidamente hacia la rama LD y el ciclo se repite en sí mismo. En el caso de que $\tau=0$, el ciclo límite es la curva ABCD, con movimiento instantáneo desde A a B y desde C a D.

Andronov (1966) prueba con argumentos geométricos rigurosos que el comportamiento cualitativo de cierta clase de ecuaciones diferenciales de segundo orden, en donde se ajusta el sistema (0.5.7), es el mismo para un τ pequeño y positivo que si consideramos el caso $\tau=0$. Este tipo de movimiento de ciclo límite es

denominado por Chiarella (1990) como *oscilaciones relajadas o discontinuas*. En la literatura actual este movimiento se conoce como el producido por *ciclos límites rápidos-lentos*.

Las conclusiones del estudio de Chiarella son las siguientes: El equilibrio se hace localmente inestable cuando los chartistas basan su estimación de la tendencia en los cambios de precio más recientes. Las dinámicas no están completamente determinadas por los valores relativos de impacto en el mercado a y b de la demanda fundamental y especulativa respectivamente, pero sí por los valores conjuntos. Aumentando el impacto de los chartistas en el mercado, el sistema oscila y se hace inestable, como se espera. La estabilidad e inestabilidad del equilibrio y la naturaleza de las fluctuaciones que se producen en el caso inestable, dependerán de la interacción entre la intensidad de la demanda fundamental, la intensidad de la demanda especulativa y la velocidad con la que los chartistas revisan sus estimaciones de la tendencia del precio.

Este modelo presenta un comportamiento asintótico de punto fijo estable o ciclo límite estable, según las magnitudes de los parámetros fundamentalistas y chartistas. La transición de uno a otro comportamiento dinámico se realiza por medio de una bifurcación de Hopf, que se produce al reducir el tiempo de retardo en la formación de expectativas. Cuando el tiempo de retardo tiende a cero, el ciclo límite estable se convierte en un ciclo límite de tipo rápido-lento, cuya dinámica se explica en función del comportamiento del precio del activo y de la expectativa chartista.

A modo de resumen de este apartado podemos afirmar que la dinámica del comportamiento especulativo y la consiguiente interacción en los mercados de diversos tipos de agentes (chartistas y fundamentalistas), permite una comprensión

más realista del comportamiento de los activos fuera del equilibrio. Beja y Goldman (1980) han considerado modelos que implican la convergencia hacia el equilibrio intertemporal walrasiano para ciertos valores de los parámetros, y Chiarella (1992) demuestra la existencia de un ciclo límite estable alrededor del precio de equilibrio para mercados con un elevado componente especulativo.

Estos modelos tienen el problema que presentan un comportamiento dinámico demasiado simple, que no se ajusta a la lógica de las expectativas racionales de los agentes que, de conocer de antemano una dinámica determinista, la destruirían mediante actuaciones que intentan anticiparse a dicha dinámica con el fin de maximizar sus beneficios. Las expectativas racionales sugerirían por tanto versiones estocásticas de los modelos de mercado.

Un objetivo que se pretende en esta Tesis es desarrollar modelos de comportamiento más complejo que el de Chiarella, emulando de forma más verosímil el comportamiento de un mercado real con el fin de intentar explicar la alta volatilidad registrada en los mercados financieros en los últimos años.

OBJETIVOS

De forma esquemática, un mercado es eficiente si evalúa "correctamente" los activos que cotiza, es decir, si sus cotizaciones obedecen a un valor fundamental que está en función de la capacidad económica real de las empresas para obtener beneficios.

Durante las pasadas décadas la teoría financiera moderna ha analizado las cotizaciones de los mercados por medio del concepto de eficiencia; según ésta teoría, el precio de cotización en el mercado es una estimación insesgada del valor fundamental del activo. Las variaciones del precio son modificaciones de la estimación del valor fundamental a consecuencia de nueva información relevante respecto a la situación económica de la empresa. La teoría de la eficiencia no concuerda, sin embargo, con numerosas observaciones de tipo empírico y no es capaz de explicar los acontecimientos de octubre de 1987 u octubre de 1929.

Para dar una explicación a estos hechos es preciso considerar diversos aspectos ignorados por la teoría de los mercados eficientes. Por un lado, el papel desempeñado por los fenómenos de contagio y de imitación; lo que dispara las órdenes de venta en un día crítico, no es el examen de los parámetros fundamentales, sino la evolución pasada de las cotizaciones y la observación del comportamiento de otros inversores. Por otro, la existencia dentro de los mercados financieros reales de un elevado componente chartista, es decir, de agentes que basan sus actuaciones de compra y venta en un examen de la evolución de las cotizaciones en el pasado.

Todo ello ha conducido a la aparición dentro de la literatura económica de un número creciente de estudios sobre la dinámica del comportamiento de los precios fuera del equilibrio. Su denominador común podría resumirse en los siguientes aspectos:

a) Dentro de los mercados se encuentra presente una dinámica interna, endógena, basada en la interacción de grupos de agentes con diferente horizonte temporal de inversión y diferentes concepciones sobre el comportamiento del mercado. Por un lado habría que considerar un grupo de agentes fundamentalistas, en el sentido que basan sus acciones de inversión en la ortodoxia económica y en la existencia de un precio de equilibrio intertemporal walrasiano; por otro, un grupo de agentes chartistas, especuladores a corto plazo, cuya demanda está inducida por expectativas sobre el incremento de los precios basadas en el estudio de las cotizaciones del activo en el pasado.

b) Parte del comportamiento de los agentes es de carácter autorreferencial y se retroalimenta; es decir, los precios se forman como resultante de los flujos de compras y ventas, y dichos flujos son a su vez activados por el comportamiento de los precios (lo que induce a considerar la actuación de algunos agentes bajo la perspectiva de expectativas adaptativas).

c) Las interacciones que se producen dentro del mercado pueden ser no lineales. La información se acumula y una reacción sólo se produce a partir de cierto nivel. En éste sentido pueden darse, igualmente, reacciones retardadas del pasado sobre el presente.

d) El mercado amplifica las consecuencias de las nuevas informaciones que recibe, y su volatilidad es muy superior a la que se justifica por los cambios en su valor fundamental.

e) La posibilidad de dinámicas estables de los precios fuera de sus valores de equilibrio revela que, incluso en periodos normales no especialmente turbulentos, es completamente factible la existencia de burbujas especulativas.

En ésta línea consideramos de interés abordar los siguientes aspectos de la dinámica del comportamiento especulativo que van a constituir los objetivos de esta Tesis.

1. Recientes trabajos sobre la dinámica del comportamiento de los mercados han dado entrada en los modelos al chartismo como forma de especulación muy extendida dentro de los mercados reales. Dichos modelos, al incorporar la no linealidad de ciertas funciones entre sus premisas, dan lugar a un tipo de comportamiento en forma de ciclos límites o variedad rápido-lenta. Tal comportamiento, pese a dar una buena visión de los efectos del chartismo dentro de un mercado, resulta poco rico y demasiado ingenuo para explicar un fenómeno tan complejo como puede ser un mercado financiero real.

Consideramos como un objetivo central de esta Tesis el construir modelos de comportamiento especulativo que den una mejor explicación al problema de la alta volatilidad que registran los mercados financieros. En efecto, en los modelos de dinámicas fuera del equilibrio con un ciclo límite, la volatilidad está directamente asociada con la longitud del ciclo. Estos modelos encierran, en sí mismos, una abierta

contradicción: la volatilidad debe estar asociada no con la magnitud de las fluctuaciones de las series económicas, sino con la incertidumbre que puedan generar tales fluctuaciones. Por el contrario, en los modelos deterministas clásicos los ciclos límites son perfectamente predecibles.

2. Revisión de los modelos de especulación en los mercados, especialmente el de Chiarella (1992), buscando enriquecer su comportamiento con la introducción de dinámicas caóticas. Estas dinámicas, pese a su carácter determinista, tienen una considerable riqueza y un sorprendente parecido con las evoluciones estocásticas. En este sentido cabría pensar en una doble acción.

a) Discretizar modelos formulados previamente en tiempo continuo. En tal caso, el comportamiento caótico puede aparecer incluso en los sistemas dinámicos unidimensionales.

b) Aumentar la dimensión de los modelos continuos con el fin de estudiar su comportamiento en presencia de varios activos.

El análisis técnico o chartismo es una forma de intervención en los mercados ampliamente extendida. Postula la existencia de diversas escalas de memoria dentro de los mercados que dan lugar a la aparición, según la teoría de Dow, de tres tipos de tendencias: primaria (de uno a varios años), secundaria (de uno a cuatro meses) y terciaria (varios días). En este sentido, es primordial considerar el siguiente objetivo:

3. Contrastar la existencia de movimientos de tipo cíclico y en general procesos de memoria a corto o largo plazo en los movimientos de las cotizaciones de los mercados financieros. El resultado de dicho contraste tendría como finalidad averiguar la utilidad de multitud de reglas que aparecen en el Análisis Técnico así como su propia razón de ser.

4. Por último, es preciso dar respuesta a la paradoja que encierra, en sí misma, la posibilidad de predicción en un mercado financiero resultante de cualquier modelo determinista o del propio Análisis Técnico. Si todo el mundo sabe que las cotizaciones van a subir, por ejemplo, pasado mañana, todos comprarían mañana y destruirían la propia predicción; es decir, "las profecías en la Bolsa se anulan a sí mismas".

Capítulo 1

CAPITULO 1

DOS MODELOS COMPLEJOS DE COMPORTAMIENTO ESPECULATIVO

1.1. Un Modelo Discreto de Fundamentalistas y Chartistas

Los progresos efectuados en la comprensión de las dinámicas no lineales han suscitado un gran interés en los economistas financieros. El motivo se comprende fácilmente: la teoría del caos determinista y el análisis de los atractores extraños han puesto de manifiesto la sorprendente semejanza que existe entre las trayectorias caóticas y las evoluciones estocásticas. Sin embargo, se trata de fenómenos cuya lógica puede contraponerse y es posible distinguirlos teóricamente. Son muchos los trabajos que han discutido tests que permiten separar estos dos conceptos, así como el análisis en los distintos campos de aplicación, especialmente en el análisis del crecimiento y de las fluctuaciones cíclicas, y también en el estudio de los mercados financieros.

En nuestro caso, la interacción de fundamentalistas y chartistas puede presentar una dinámica caótica para determinado rango de los parámetros. La característica clave del movimiento caótico es que un sistema determinista puede

generar una serie temporal que parezca completamente aleatoria y que la historia temporal que comienza en puntos iniciales muy próximos tengan un aspecto completamente diferente.

Como la expresión matemática del modelo especulativo analizado por Chiarella (1992) es un sistema diferencial bidimensional en tiempo continuo, para estudiar la posibilidad de un comportamiento caótico es necesario considerar la versión del modelo en tiempo discreto, ya que, según el teorema de Poincaré-Bendixon, la posibilidad de que se genere un movimiento caótico en un modelo en tiempo continuo requiere que el sistema sea de al menos tres ecuaciones diferenciales.

En este sentido vamos a discretizar el sistema determinista obtenido por Chiarella

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -ap + k(\Psi) \\ \tau \dot{\Psi} &= -ap - \Psi + k(\Psi) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

siendo p el precio del activo y Ψ la estimación (media) de la tendencia actual del precio para los chartistas. El parámetro "a" es la *pendiente del exceso de demanda fundamentalista* y " τ " indica el *tiempo de respuesta en la formación de expectativas chartista*. La función k está definida en el modelo como: $k(\Psi) = h(\Psi - g) - h(-g)$, donde h indica una función no lineal de la diferencia entre el rendimiento esperado del activo y una tasa creciente de inversiones alternativas sin riesgo (como puede ser el caso de bonos gubernamentales) indicada por g . En nuestro modelo g se supone constante.

La función $k(\Psi)$ tiene, por tanto, las mismas características que la función $h(\Psi-g)$, salvo que ahora el punto de inflexión está en el origen, y en consecuencia verifica:

- (i) $k(0) = 0$
- (ii) $k'(\Psi) > 0$
- (iii) $k''(\Psi) < 0$ para $\Psi > 0$ y $k''(\Psi) > 0$ para $\Psi < 0$
- (iv) $\lim_{\Psi \rightarrow \pm \infty} k'(\Psi) = 0$
- (v) $k(+\infty) = k_{sup}$ y $k(-\infty) = k_{inf}$

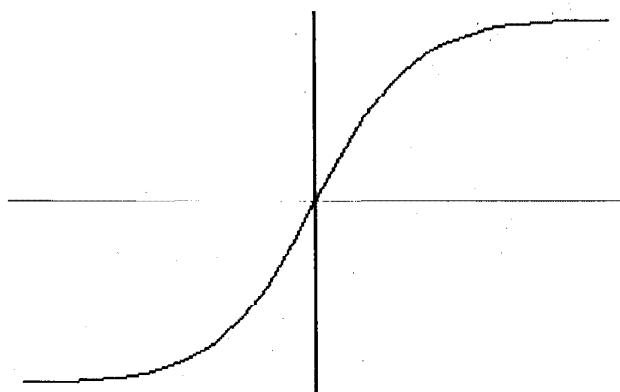


Figura 1.1

Gráfica de la función $k(\Psi)$

Además, como $k'(\Psi) = h'(\Psi-g) > 0$, en el punto de equilibrio se verifica que: $k'(0) = h'(-g) = b > 0$, donde el parámetro "b" refleja la *pendiente en el equilibrio de la demanda chartista o especulativa*.

Haciendo $\dot{p} = p_{t+1} - p_t$, $\dot{\Psi} = \Psi_{t+1} - \Psi_t$ en el sistema (1.1.1), resulta

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= (1-\alpha)p_t + k(\Psi_t) \\ \Psi_{t+1} &= -\alpha/\tau p_t + (1-1/\tau)\Psi_t + k(\Psi_t)/\tau \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

que representa un sistema no lineal de dos ecuaciones en diferencias unidimensionales, cuyo único punto de equilibrio es el origen.

Dadas las características que presenta la función $k(\Psi)$, nosotros la hemos supuesto equivalente a la función tangente hiperbólica que presenta una combinación de funciones exponenciales. Aunque esto no es esencial para el desarrollo analítico del modelo, sí resulta imprescindible para la realización de las simulaciones numéricas que hemos efectuado.

$$k(\Psi) = \frac{b(e^{2\Psi} - 1)}{e^{2\Psi} + 1}$$

siendo b la cota superior de la función. En los siguientes apartados de esta sección realizaremos un estudio analítico del modelo (1.1.2).

1.1.1. Análisis Lineal Local. Bifurcaciones

Para realizar el análisis lineal local calculamos el Jacobiano en el punto de equilibrio

$$J_E = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ -\frac{a}{\tau} & 1-\frac{(1-b)}{\tau} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\mathbb{T} = \text{tr } J_E = (1-a) + (1-1/\tau) + b/\tau$$

$$\mathbb{D} = \det J_E = (1-a)(1-1/\tau) + b/\tau$$

Los autovalores de esta matriz vendrán dados por la soluciones de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \text{tr } J_E \lambda + \det J_E = 0$$

esto es:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } J_E \pm \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 - 4 \det J_E}}{2}$$

Si los autovalores λ_1 y λ_2 son reales, siempre es posible (Hirsch y Smale, 1974) encontrar una transformación invertible del sistema discreto linealizado. El problema se desdobra en dos ecuaciones diferenciales discretas unidimensionales, y la cuestión de la estabilidad es inmediatamente resuelta; el sistema es asintóticamente

estable si $\text{mód}\lambda_{1,2} < 1$, pero si uno o ambos autovalores son mayores que 1 en valor absoluto, entonces el sistema será inestable. Si uno de los autovalores tiene módulo igual a uno y el otro es menor que uno en valor absoluto, entonces la aproximación lineal no es suficiente para establecer la estabilidad o inestabilidad del punto fijo.

Si los autovalores son complejos conjugados, la estabilidad del punto fijo quedará determinada por su módulo ya que es posible obtener $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \rho e^{\pm i\theta}$. Si $\rho < 1$, la trayectoria entra hacia dentro en espiral y el punto fijo es estable, mientras que si $\rho > 1$, la trayectoria sale hacia afuera en espiral y el punto fijo es inestable. Si $\rho = 1$, el punto de equilibrio es llamado centro, la estabilidad puede ser descrita como neutral, y la aproximación lineal no es suficiente para establecer la estabilidad.

En el caso en que los autovalores sean complejos conjugados y corten al círculo unidad en un ángulo θ distinto de 0 y π , nos encontraremos con una inestabilidad de Neimark (Thompson y Stewart, 1993); ésta inestabilidad es más compleja que su análoga, la bifurcación de Hopf, en el caso de ecuaciones diferenciales en tiempo continuo.

El criterio de estabilidad en el plano (T, D) está dibujado en la Figura 1.2. La divergencia ocurre sobre la recta $T - D = 1$; mientras que una bifurcación flip (fenómeno de período doble), en la recta $T + D = -1$, y una bifurcación de Neimark se encuentra sobre la recta $D = 1$. El límite de estabilidad es el triángulo LMN, los puntos que están dentro de este triángulo representan la estabilidad asintótica del sistema.

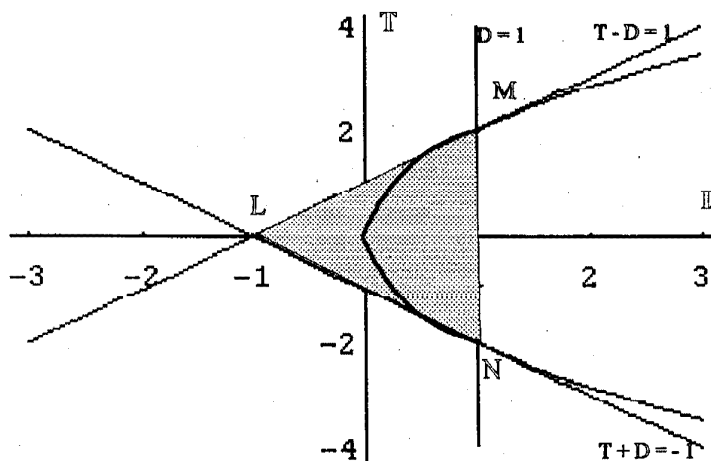


Figura 1.2

Estabilidad asintótica del sistema

La región donde el sistema oscila y se hace inestable se encuentra en aquella región donde los autovalores son complejos y se encuentren fuera de la línea de Neimark ($D > 1$). La bifurcación de Neimark se produce si $D=1$, esto es cuando los parámetros verifiquen la relación $\tau = 1 + \frac{b-1}{a}$.

Si $\tau > 1 + \frac{b-1}{a}$, el sistema permanece estable, mientras que si $\tau < 1 + \frac{b-1}{a}$, el sistema oscila y se vuelve inestable. Se observa que la dinámica del modelo discreto no depende únicamente de los valores de impacto en el mercado que pueden alcanzar las demandas fundamentalistas y chartistas, pero sí depende de los valores conjuntos. A medida que el tiempo de retardo en la formación de expectativas chartista disminuye, el sistema pierde estabilidad.

Situándonos en la línea de Neimark, el comportamiento de la bifurcación depende del valor que tome la traza que puede variar entre -2 y 2. La Figura 1.3 representa una simulación numérica para un rango de parámetros cuya traza es mayor que uno. El sistema pasa de ser estable a inestable cuando el tiempo de retardo pasa a través de 1.2 donde ocurre una bifurcación.

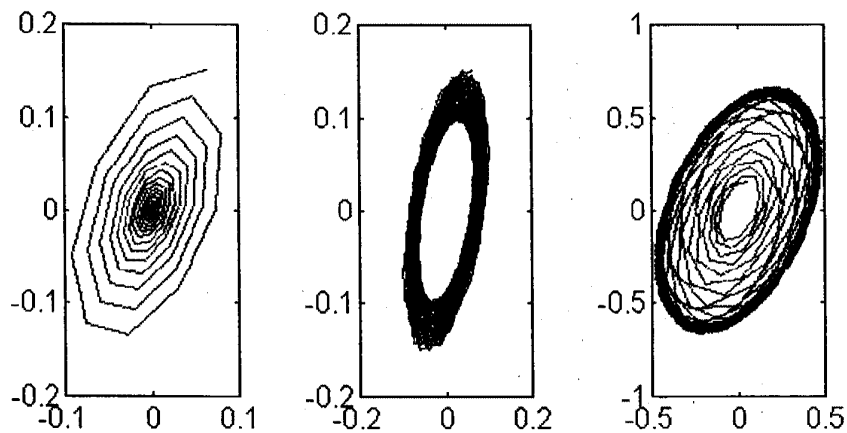


Figura 1.3
*Bifurcación de Neimark. El sistema pasa de ser estable a inestable.
 $a = .6$; $b = 1.12$; $\tau = 1.3$; 1.2 ; 1.1 respectivamente.*

Si disminuimos el valor de τ hasta el valor mínimo que nos permite la simulación realizada, observamos cómo el sistema degenera en un atractor. La Figura 1.4 ilustra esta idea. El valor de los parámetros a y b se ha mantenido igual que en la Figura 1.3; sólo τ disminuye; de esta forma nos alejamos de la línea de Neimark hacia la zona de inestabilidad.

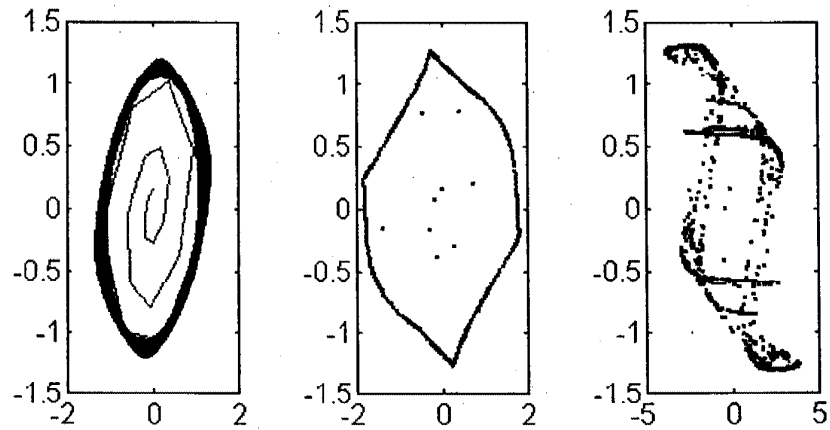


Figura 1.4

A medida que disminuye el tiempo de retardo, el sistema degenera en un atractor. $\tau = .7; .5; .3$; respectivamente.

El comportamiento del sistema tiene una respuesta periódica si los autovalores son raíces de la unidad. Este sería el caso en que $\mathbb{T} = -1$ y $\mathbb{D} = 1$; los autovalores complejos son $\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ y cruzan el círculo unidad en un ángulo $\theta = \pm 120^\circ$; por tanto $\lambda^3 = 1$ y el sistema tiene período 3. La Figura 1.5 representa éste caso, el sistema se dice que tiene una *resonancia fuerte* (Thompson y Stewart, 1993). Se observa que el sistema pasa de ser estable a inestable con un comportamiento triangular. Análogamente, si $\mathbb{T} = 0$ y $\mathbb{D} = 1$, los autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i$ cortan al círculo unidad en un ángulo $\theta = \pm 90^\circ$, por lo que $\lambda^4 = 1$ y el movimiento del sistema tiene período 4 (Figura 1.6).

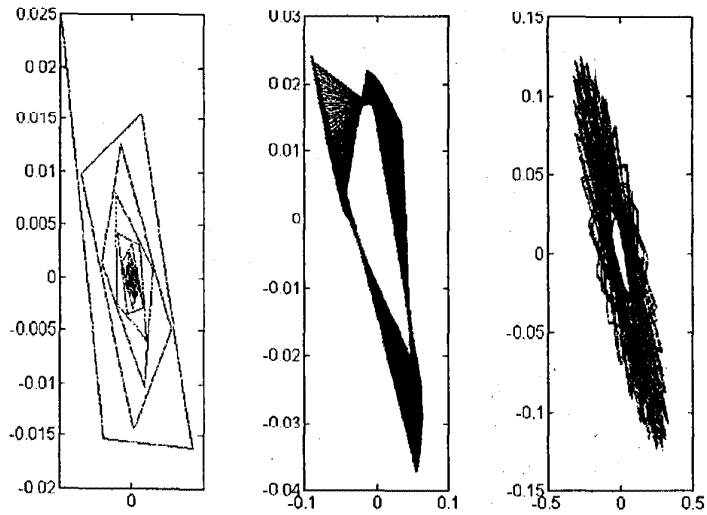


Figura 1.5

Si los autovalores son la tercera raíz de la unidad, el sistema tiene periodo tres, lo que indica una resonancia fuerte. $a = .6$; $b = .52$; $\tau = .3$; $.2$; $.178$ respectivamente

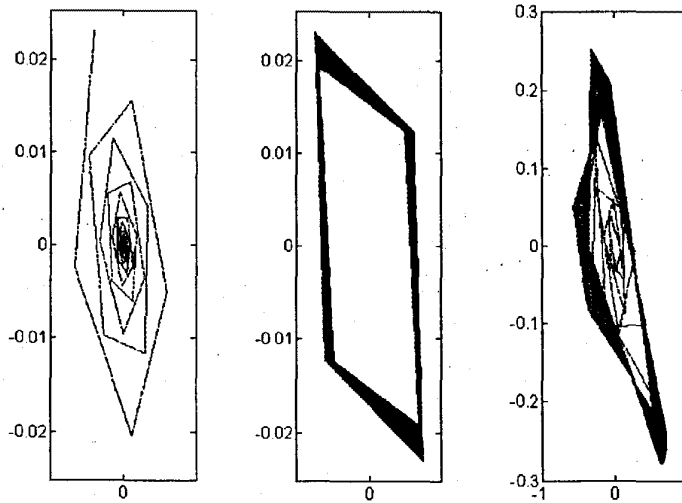


Figura 1.6

Si los autovalores son la cuarta raíz de la unidad, el sistema tiene periodo cuatro o resonancia fuerte. $a = .6$; $b = .58$; $\tau = .4$; $.3$; $.2$ respectivamente

Sintetizando lo que ocurre sobre la línea de Neimark (Figura 1.7), observamos que se obtiene una divergencia silla-nodo cuando $\theta=0$ con $\lambda=1$, y una bifurcación flip cuando $\theta=\pi$ con $\lambda=-1$. Ambos son en esencia fenómenos unidimensionales y pueden ser estudiados restringiendo la atención a la variedad central unidimensional. A continuación se encuentran dos casos especiales denominados *resonancias fuertes* asociados al fenómeno no lineal, cuando $\theta=2\pi/3$ ó $\pi/2$ y donde los autovalores son la tercera y la cuarta raíz de la unidad respectivamente.

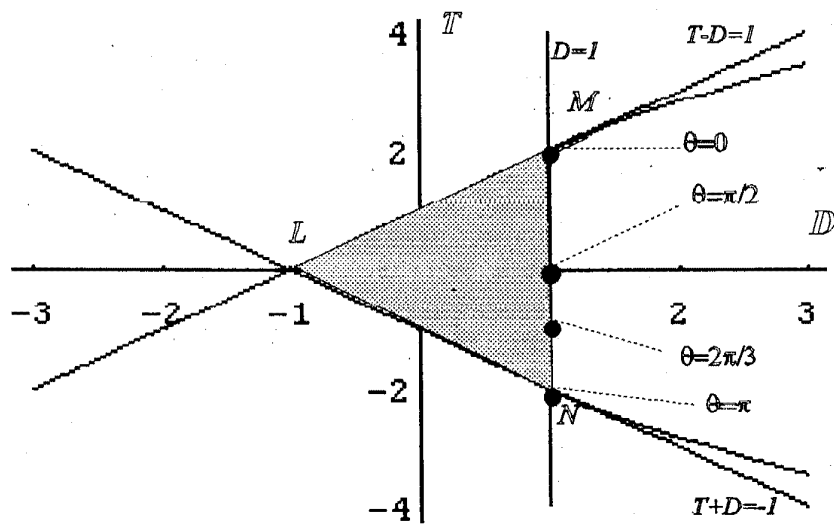


Figura 1.7

Bifurcaciones sobre la Línea de Neimark $D = 1$

En el caso de que los autovalores no sean la tercera ni la cuarta raíz de la unidad, es posible proceder a un análisis general de la bifurcación de Hopf.

1.1.2. La Bifurcación de Hopf en Sistemas Dinámicos en Tiempo Discreto

La mayoría de los planteamientos matemáticos sobre órbitas cerradas en sistemas dinámicos se refieren a sistemas en tiempo continuo. Una excepción de esta regla es el teorema de bifurcación de Hopf en tiempo discreto en \mathbb{R}^2 , aunque desafortunadamente no existe una generalización del teorema al caso n-dimensional.

Recientemente, el teorema de bifurcación de Hopf ha sido aplicado en modelos económicos. Este es el caso del estudio en la versión discreta del modelo de Goodwin, argumentando precios flexibles, realizado por los autores Cugno y Montrucchio (1984). En un modelo de generaciones solapadas trabajado por Reichlin (1986), se encuentran condiciones de estabilidad. Lorenz H.W. (1993) también comprueba la existencia de una bifurcación de Hopf en el modelo discreto de Kaldor.

El siguiente resultado, debido a Ruelle y Takens (1971), es una versión de Iooss (1979), y más recientemente de Guckenheimer y Holmes (1983). El teorema de bifurcación de Hopf en tiempo discreto afirma en su parte de existencia lo siguiente.

Teorema 1.1. (Bifurcación de Hopf en el caso discreto.) Sea el sistema de ecuaciones en diferencias $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mu)$, donde $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ con una familia de punto fijos $\mathbf{x}^*(\mu)$, en donde los autovalores son complejos conjugados. Si existe un μ_0 tal que

$$\text{mod } \lambda(\mu_0) = 1 \quad \text{con} \quad \lambda^n(\mu_0) \neq \pm 1, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

y

$$\frac{d(\text{mod } \lambda(\mu_0))}{d\mu} < 0$$

entonces existe una bifurcación en una curva cerrada en el valor $\mu=\mu_0$.

Hay una gran analogía de este teorema con el teorema de bifurcación de Hopf para flujo. El requerimiento que los autovalores cruzan el eje imaginario es sustituido por la condición de que los autovalores complejos conjugados cruzan el círculo unidad; esto es, $\text{mod } \lambda=1$ en el punto de bifurcación $\mu=\mu_0$. Por otra parte, también se precisa que las raíces no sean reales cuando sean iteradas sobre el círculo unidad. Finalmente, los autovalores deben cruzar el círculo unidad con velocidad no nula cuando μ pasa a través de μ_0 (desde $\mu>\mu_0$ a $\mu<\mu_0$).

En nuestro caso, el valor del módulo puede ser determinado considerando la ecuación característica : $\lambda^2 - \text{tr } J_E \lambda + \det J_E = 0$, siendo sus soluciones:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } J_E \pm \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 - 4 \det J_E}}{2}$$

En el caso que las soluciones sean complejas conjugadas, podemos escribir $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, siendo $\alpha = \text{tr } J_E / 2$ y $\beta = \sqrt{(4 \det J_E - (\text{tr } J_E)^2) / 4}$. El módulo se define

$$\text{mod } (\lambda) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 / 4 + (4 \det J_E - (\text{tr } J_E)^2) / 4} = \sqrt{\det J_E}$$

siendo $\det J_E = (1-a)(1-1/\tau) + b/\tau$. Los autovalores serán complejos conjugados si

$$\det J_E > \frac{(\text{tr} J_E)^2}{4}$$

En el rango de parámetros en donde dicha desigualdad es verdadera, se obtiene una bifurcación de Hopf para el sistema dinámico en tiempo discreto, en el valor $\tau = \tau_0$ si $\det J_E = 1$ cuando $\tau = \tau_0$, esto es, si se verifica

$$(1-a)\left(1 - \frac{1}{\tau_0}\right) + \frac{b}{\tau_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = 1 + \frac{b-1}{a}$$

Además en $\tau = \tau_0$ se demuestra

$$\frac{d(\text{mod } \lambda(\tau))}{d\tau} = -\frac{a^2}{2\tau_0} < 0$$

Por tanto el módulo cruza el círculo unidad con velocidad no nula cuando el parámetro τ cambia (de $\tau > \tau_0$ a $\tau < \tau_0$) y el punto fijo pasa de ser estable a inestable. Estableciendo el requisito que las iteraciones λ^n , $n=1,2,3,4$, sobre el círculo unidad sigan siendo complejas conjugadas, todas las condiciones del teorema de bifurcación de Hopf para el caso discreto se cumplen cuando $\tau = \tau_0$.

Por ejemplo, en el caso que los autovalores corten al círculo unidad en un ángulo $\theta = \pm 60^\circ$ entonces $\lambda, \bar{\lambda} = e^{\pm i\pi/3}$ son las raíces sextas de la unidad y el sistema tiene período 6. En la Figura 1.8 se observa una bifurcación cuando $\tau = 6$.

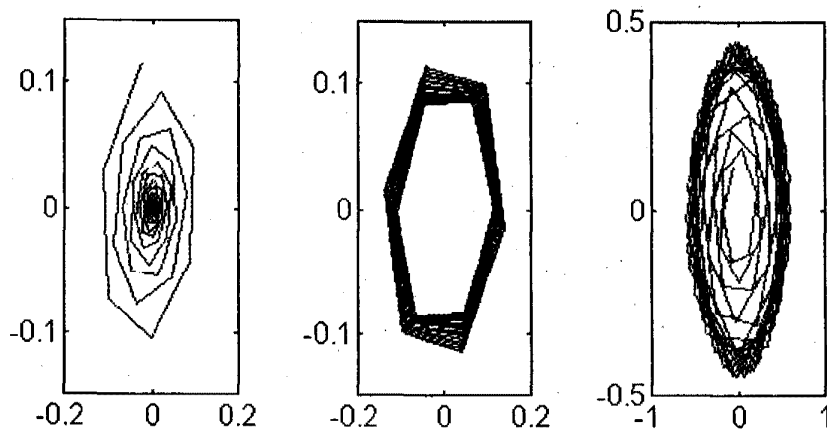


Figura 1.8

*Bifurcación de Hopf cuando el módulo de los autovalores atraviesa el círculo unidad.
 Si los autovalores son las raíces sextas de la unidad el sistema tiene período seis.
 $a = .6$; $b = .76$; $\tau = .7$; $.6$; $.5$ respectivamente.*

Más generalmente podemos observar en la Figura 1.9 una bifurcación de Hopf. La bifurcación se produce en el valor $\tau = 0.45$, que corresponde al segundo gráfico de la fila superior. En los tres gráficos de la fila inferior de la Figura 1.9 el valor de τ disminuye. Se observa que el sistema pasa de un ciclo límite a un sistema de período cuatro, y por último se concentra en un atractor. Las trayectorias temporales del precio del activo las podemos ver en la Figura 1.10. En los tres gráficos de la fila superior la trayectoria temporal del precio pasa de ser estable a inestable. En la fila inferior, al disminuir el tiempo de retardo, la trayectoria temporal del precio pasa por un estado de comportamiento cíclico y regular (en nuestro caso, de período cuatro) para posteriormente concentrarse en un atractor. Esta situación transitoria que se produce en el sistema la veremos con más detalle posteriormente.

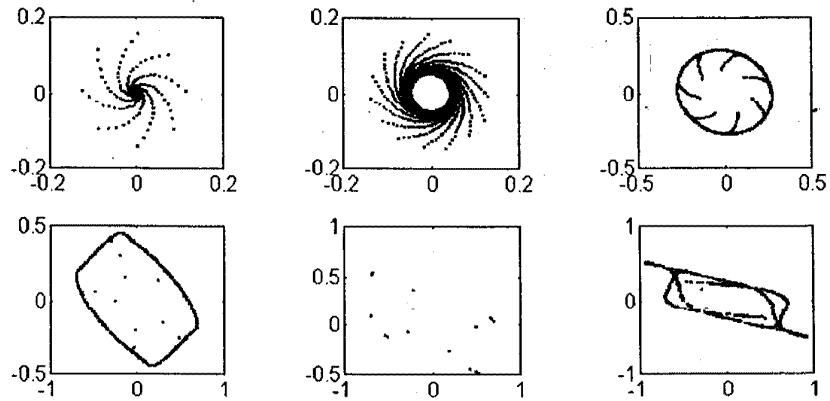


Figura 1.9

En las tres figuras superiores el sistema pasa por una bifurcación de Hopf a medida que el tiempo de retardo disminuye $a = .3$; $b = .835$; $\tau = .5$; $.45$; $.4$; En las tres figuras inferiores el tiempo de retardo sigue disminuyendo $\tau = .2$; $.15$; $.12$; el sistema pasa de una órbita atractor cerrada a establecerse en un período cuatro para finalmente concentrarse en un atractor. $n=1000$ iterac.

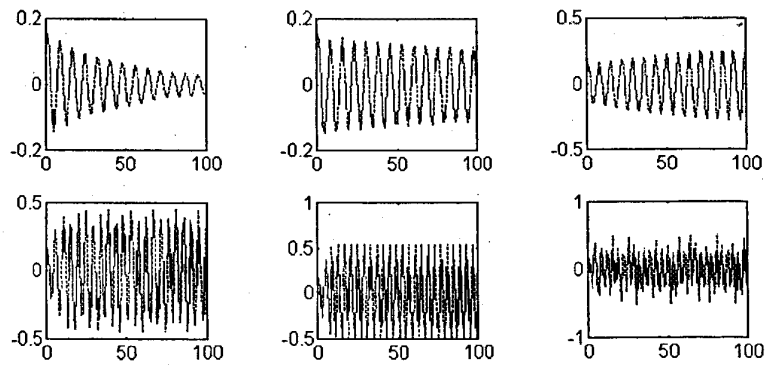


Figura 1.10

Trayectorias temporales del precio al disminuir el tiempo de retardo. En la fila superior, de izquierda a derecha, la trayectoria pasa de ser estable a inestable. En la fila inferior la trayectoria pasa por una fase transitoria antes de concentrarse en un atractor

1.1.3. Detección del Caos por medio de un Punto Fijo Expansivo

La mayor parte de los estudios que se caracterizan por tener un comportamiento complejo y que han podido modelizarse en economía se refieren, en el caso discreto, a sistemas dinámicos unidimensionales. En el caso de sistemas discretos bidimensionales el sistema de Henon, que se utiliza frecuentemente como ejemplo clásico para la dinámica caótica en \mathbb{R}^2 , tiene la característica de ser invertible bajo una determinada condición. Sin embargo, el comportamiento complejo puede ser observado también en sistemas no invertibles. Marotto (1978) estudia un sistema bidimensional no invertible, que con determinadas condiciones resulta cualitativamente igual a la ecuación logística. Sus resultados calculados mediante simulaciones numéricas para determinados valores en los parámetros, da lugar a diversos objetos geométricos. Estos objetos resultan ser atractores en el sentido en que puntos iniciales localizados lejos de los mismos se aproximan a ellos rápidamente. La forma inusual de estos atractores, los cuales no son ni puntos fijos ni órbitas cerradas, es la razón por la que han sido llamados *atractores extraños*.

Un intento de generalizar el resultado del teorema de Li y Yorke (1975) para sistemas discretos n-dimensionales es el trabajo realizado por Diamond (1976), el cual no ha tenido suficiente aplicación en el campo económico. Nosotros nos basaremos en el concepto de *snap-back repeller* (repeledor de salto hacia atrás) introducido por Marotto (1978) para la detección del caos en el modelo especulativo.

Definición 1.1. (Punto fijo expansivo). Se considera un sistema dinámico en tiempo discreto $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t)$ con un punto fijo inestable $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, siendo $B_r(\mathbf{x}^*)$ una bola cerrada con radio r en \mathbb{R}^n centrada en \mathbf{x}^* . Se dice que el punto \mathbf{x}^* perteneciente a \mathbb{R}^n es un *punto fijo expansivo* de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en términos

de Marotto (1978), si \mathbf{x}^* es un punto fijo y todos los autovalores del jacobiano de $f(\mathbf{x})$ son en valor absoluto mayores que uno para todo \mathbf{x} perteneciente a la bola $B_r(\mathbf{x}^*)$.

Esta definición no implica que la serie temporal se mueva siempre lejos de \mathbf{x}^* . Si \mathbf{x} no pertenece a $B_r(\mathbf{x}^*)$, para un r arbitrario los autovalores podrán ser menores o iguales que uno. Un punto \mathbf{x}_i que se encuentre fuera de $B_r(\mathbf{x}^*)$ puede saltar dentro de ella e incluso coincidir con \mathbf{x}^* ; en este caso, el punto fijo se denomina *snap-back repeller* en términos de Marotto.

La Figura 1.11 muestra la idea de un *snap-back repeller*: Una trayectoria que comienza en un punto \mathbf{x}_0 arbitrariamente cerca del punto fijo \mathbf{x}^* , es repelida del punto fijo después de tomar algunos valores dentro de la bola $B_r(\mathbf{x}^*)$, pero al cabo de ciertas iteraciones salta hacia atrás súbitamente para caer exactamente en el punto fijo.

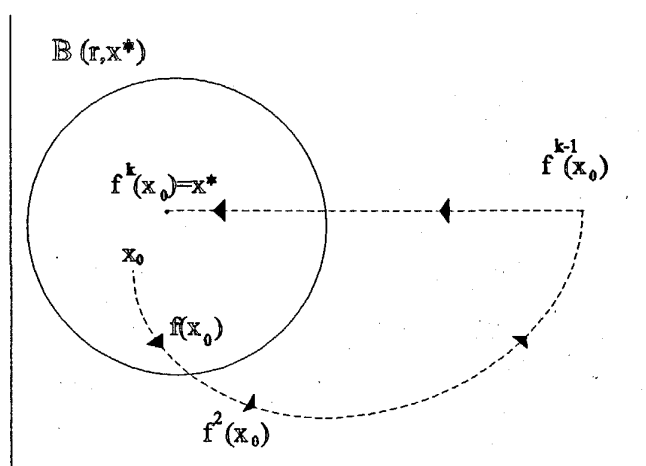


Figura 1.11

Un Snap-Back Repeller

El teorema en el que nos vamos a basar afirma:

Teorema 1.2. (Marotto, 1978). Si f posee un *snap-back repeller*, entonces el sistema dinámico en tiempo discreto es caótico.

En nuestro modelo bidimensional en tiempo discreto, el jacobiano del sistema (1.1.2) es

$$J = \begin{pmatrix} -a + 1 & k'(\Psi) \\ -\frac{a}{\tau} & \frac{k'(\Psi)-1}{\tau} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} + 1 & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} + 1 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} F_{11} &= -a \\ F_{12} &= k'(\Psi) \\ F_{21} &= -\frac{a}{\tau} \\ F_{22} &= \frac{k'(\Psi)-1}{\tau} \end{aligned}$$

Los autovalores de J vendrán dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{(F_{11} + 1) + (F_{22} + 1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(F_{11} - F_{22})^2 + 4 F_{12} F_{21}}{4}}$$

Para el rango de parámetros tales que $a < 1$, $k'(\Psi) > 1$ y $\tau < 1 + (b-1)/a$, el módulo de los autovalores es mayor que uno, lo que implica que los autovalores

permanecen fuera del círculo unidad y el punto fijo es un punto fijo expansivo en términos de Marotto.

Herrmann (1985) fue capaz de encontrar un *snap-back repeller* en el modelo de Kaldor en tiempo discreto, de tal forma que en la 12^{ava} iteración dicho punto saltaba para caer exactamente en el punto fijo. La búsqueda dentro de un sistema complejo de un punto repelidor no es tarea sencilla y su localización casi puede ser producto de la casualidad, por esto hemos ideado un método que nos permite detectar dicho punto de una forma más directa.

El procedimiento que hemos seguido para encontrar en este rango de parámetros un *snap-back repeller* es considerar las iteraciones inversas del punto fijo de la siguiente forma:

$$f^{-1}(\dots f^{-1}(f^{-1}(x^*))) = x_0$$

Para ilustrar esta idea consideremos la logística $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$, cuya función inversa viene dada por

$$x_t = \frac{1 \pm \sqrt{1-x_{t+1}}}{2}$$

Si partimos del valor 0, que es el punto fijo inestable para la función logística, se obtiene que $x_t = 1$, ya que la solución 0 ha de ser rechazada. Iterando el proceso se tiene como siguiente valor $x_t = 1/2$, y así sucesivamente se consigue una sucesión cuyos primeros términos vienen dados por la siguiente expresión:

$$\left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \right], \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \right], \dots \right\}$$

que es una sucesión decreciente desde de su segundo término, de tal forma que si partimos de cualquier punto de esta sucesión suficientemente próximo al punto fijo inestable, los puntos que se irán obteniendo en la ecuación logística se irán alejando del mismo hasta llegar al valor 1, desde donde se produce un salto hacia atrás que va a parar al mismo punto fijo. El origen es un repelidor de salto hacia atrás para la ecuación logística, en el sentido de Marotto.

En nuestro modelo, y para el rango de parámetros en donde se verifica que el punto fijo es un punto fijo expansivo, partiendo del mismo ocurre (como veremos en la simulación realizada) que en la primera iteración el punto salta a un valor que se encuentra fuera de una bola de centro el origen y radio 1, esto es, una bola $B_1(0')$, a partir del cual las próximas iteraciones se irán acercando tanto como queramos al punto fijo (Figura 1.12).

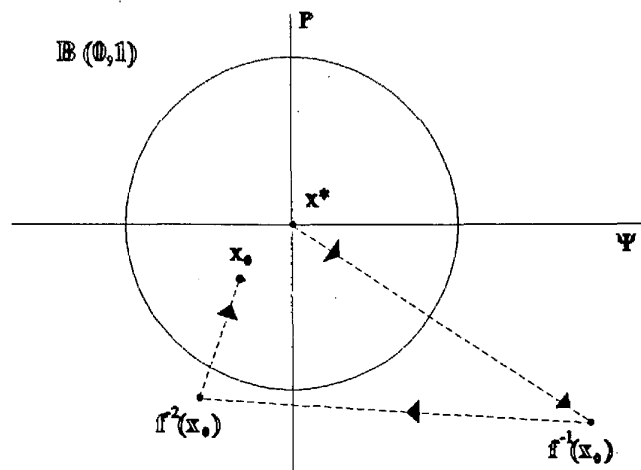


Figura 1.12

Un Snap-Back Repeller mediante iteraciones inversas

A continuación se muestran los resultados de la simulación numérica para las veinte primeras iteraciones, tomando como valores de los parámetros $[a \ b \ \tau \ \Psi_i \ P_i]$ $= [0.015 \ 1.5 \ 0.001 \ 0 \ 0]$, siendo Ψ_i y P_i valores iniciales de Ψ y P respectivamente.

	a	b	τ	Ψ	P
i = 1; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	0	0
i = 2; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	1.3221	-1.3208
i = 3; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0359	-1.2862
i = 4; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0375	-1.2487
i = 5; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0364	-1.2123
i = 6; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0354	-1.1769
i = 7; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0343	-1.1426
i = 8; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0333	-1.1093
i = 9; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0323	-1.0769
i = 10; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0314	-1.0455
i = 11; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0305	-1.0151
i = 12; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0296	-0.9855
i = 13; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0287	-0.9567
i = 14; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0279	-0.9288
i = 15; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0271	-0.9018
i = 16; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0263	-0.8755
i = 17; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0255	-0.8500
i = 18; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0248	-0.8252
i = 19; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0240	-0.8011
i = 20; cor =	0.0150	1.5000	0.0010	-0.0233	-0.7778

Las dos últimas columnas corresponden a los valores inversos de las variables Ψ y P . Así, partiendo del punto fijo se observa que, en la doceava iteración, el punto entra dentro de la bola de radio 1 y se aproxima al centro de la misma tanto como queramos. Por lo que se deduce que el modelo en su versión discreta tiene un *snap-*

back repeller para un determinado rango de los parámetros y, en consecuencia, el sistema tiene un comportamiento caótico en ese rango. Es interesante resaltar -tal y como apunta Marotto- que los *snap-back repeller* persisten bajo pequeñas perturbaciones de los parámetros.

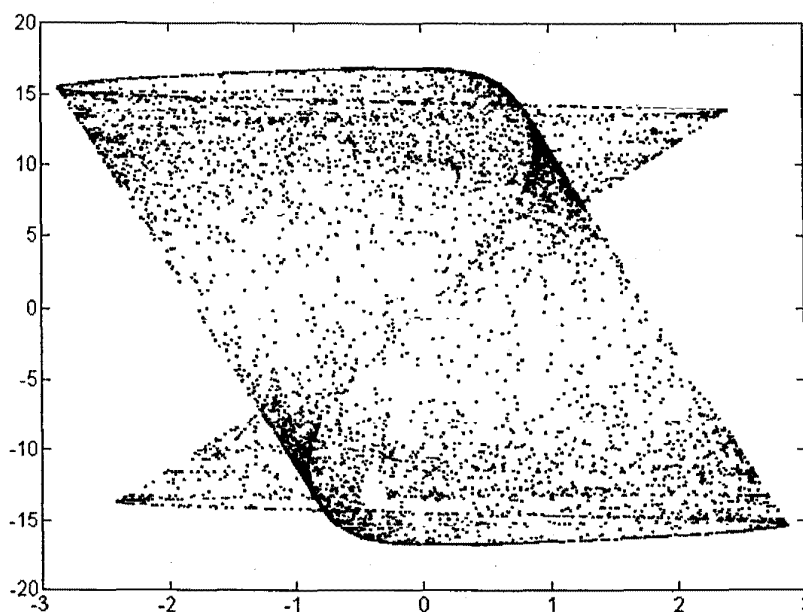


Figura 1.13a

Atractor caótico (10.000 iteraciones); $a = .015$, $b = 1.5$, $\tau = .217$

Los resultados gráficos de esta simulación numérica pueden observarse en las Figuras 1.13a y 1.13b. Para valores altos de τ , las series temporales convergen hacia el único punto fijo. Cuando τ comienza a disminuir, la secuencia $\{(P_t, \Psi_t)\}_{t=1}^T$ es localizada primero sobre una órbita atractor cerrada. Para valores muy pequeños de τ , el sistema se concentra sobre un atractor extraño (Figura 1.13a). Las trayectorias por separado de las series temporales P_t y Ψ_t , reflejadas en la Figura 1.13b,

muestran el comportamiento típicamente caótico con una gran sensibilidad a las condiciones iniciales.

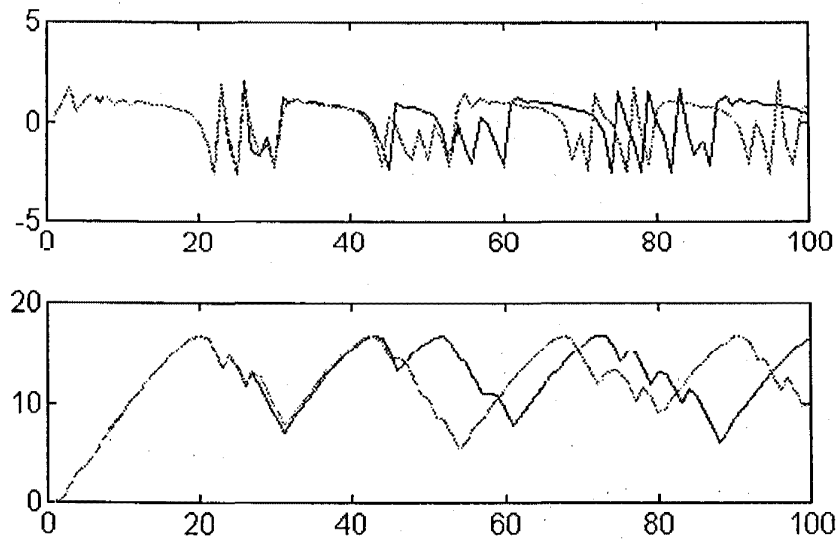


Figura 1.13b

Series temporales de P (gráfico superior) y Ψ (gráfico inferior) correspondientes al atractor caótico simulado en la Figura 1.13a haciendo variar las condiciones iniciales

Los puntos repeledores de salto hacia atrás se mantienen en un amplio rango si se producen pequeñas perturbaciones en el valor de los parámetros. En determinados rangos, los puntos pueden entrar en una bola de radio uno con relativa rapidez. Este es el caso de la simulación realizada tomando como valores de los parámetros $[a \ b \ \tau \ \Psi_i \ P_i] = [.2 \ 1.5 \ .1 \ 0 \ 0]$, siendo $\Psi_i \ P_i$ los valores iniciales de Ψ y P respectivamente

		a	b	τ	Ψ	P
i= 1	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	0	0
i= 2	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	2.0098	-1.8088
i= 3	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.2699	-1.7669
i= 4	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.6041	-1.1963
i= 5	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.4101	-0.7667
i= 6	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.2482	-0.5023
i= 7	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.1567	-0.3365
i= 8	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.1030	-0.2281
i= 9	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.0693	-0.1554
i= 10	cor=	0.2000	1.5000	0.1000	-0.0470	-0.1062

Vemos cómo partiendo del origen, los valores inversos de Ψ y P saltan fuera de una bola de centro el origen y radio uno; a la quinta iteración entran dentro de la bola para ir acercándose al centro de la misma tanto como queramos. Las características generales subsisten pero la forma del atractor puede variar como observamos en la Figura 1.14

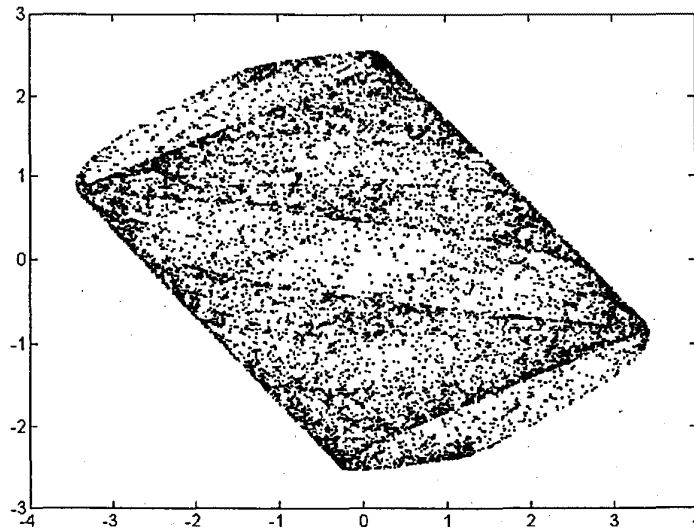


Figura 1.14

Atractor caótico (10.000 iteraciones); $a = .2$, $b = 1.5$ $\tau = .26$

1.1.4. Caos Transitorio

La literatura económica sobre dinámica caótica suele concentrarse en estudiar el comportamiento en apariencia estocástico de los sistemas dinámicos con un único atractor. Mientras que el conocimiento de un atractor es un concepto familiar en economía cuando aparecen puntos fijos estables (localmente o globalmente), u órbitas cerradas estables, el concepto de *atractor caótico* esto es, atractores que no son ni un punto ni una curva cerrada, resulta ser una extensión útil del concepto de estabilidad en la dinámica económica. Sin embargo, según Lorenz (1992), la concentración del estudio del movimiento sobre un único atractor ha distraído la atención de considerar: 1) que el movimiento en un sistema dinámico puede tener múltiples atractores, y 2) detectar el movimiento transitorio que ocurre antes del establecimiento de una trayectoria sobre un atractor particular.

El comportamiento complejo de un sistema no sólo puede ocurrir en los atractores extraños, sino también puede ser una propiedad del movimiento en la fase transitoria antes de que aparezca el atractor. Una trayectoria transitoria puede parecer un comportamiento complejo incluso si el atrator es no caótico. Este comportamiento complejo transitorio persiste durante un tiempo considerable justo antes de que una trayectoria converja hacia un atractor periódico.

El movimiento transitorio complejo en sistemas dinámicos no lineales es una propiedad particularmente interesante en economía. Cuando el comportamiento de la economía es modelizada mediante un sistema determinístico, puede suceder que el estado económico real haya cambiado (y el modelo determinista ya no sea válido), antes de que una trayectoria del modelo investigado haya encontrado un atractor. La

presencia de innovaciones y los cambios estructurales pueden implicar cambios en los parámetros de un sistema dado; las formas de las funciones pueden variar o incluso la dimensión del sistema puede cambiar a causa de la aparición de nuevos activos y expectativas de los agentes.

Así, no puede excluirse que el movimiento sobre un atractor refleje el movimiento general de la economía real aunque el sistema dinámico sólo represente una proyección correcta de la realidad en su fase inicial (Lorenz, 1993). Cuando un sistema dinámico genera un comportamiento transitorio complejo, es posible encontrar una fase irregular durante el espacio de tiempo en que el sistema considerado sea verdaderamente válido. Asimismo, Lorenz (1992) demuestra la existencia de un movimiento complejo transitorio en el modelo de Kaldor.

En este apartado usamos el modelo especulativo en tiempo discreto con el fin de demostrar la existencia de un complicado movimiento transitorio que se genera con anterioridad al movimiento caótico. Conocemos, por resultados anteriores, que el modelo es capaz de generar caos para bajos valores del parámetro fundamentalista, altos valores del parámetro chartista y tiempo de respuesta chartista suficientemente bajo. La Figura 1.15 muestra la trayectoria temporal de la estimación de la tendencia actual del precio Ψ para un valor ligeramente mayor de τ en igualdad de condiciones en que se ha realizado la simulación previa.

El modelo especulativo genera un complicado movimiento transitorio que converge hacia una órbita regular. Mientras que para estas condiciones la fase transitoria persiste durante mucho tiempo (aproximadamente 2.500 períodos), en otras condiciones iniciales puede durar mucho menos (sobre 700 períodos), la

trayectoria converge hacia una órbita atractor despues de ser colapsada por un complejo movimiento.

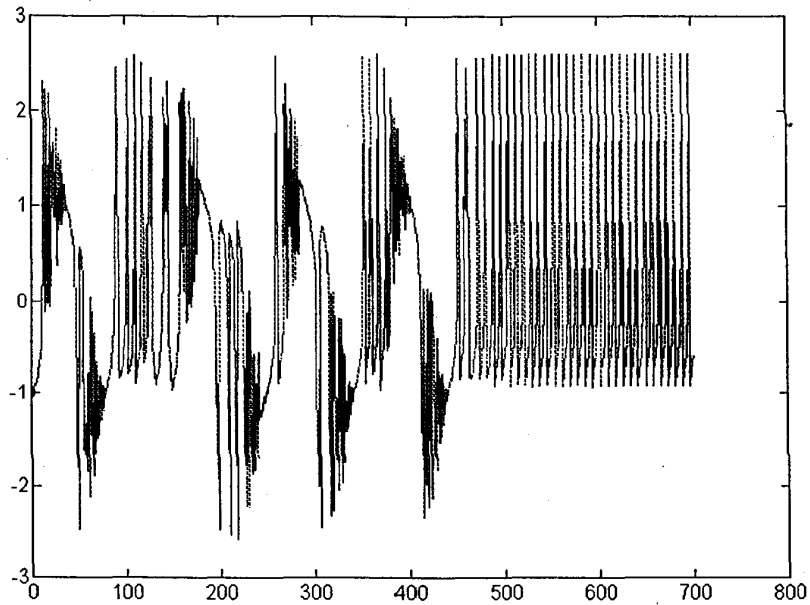


Figura 1.15

Trayectoria temporal con fase transitoria

La Figura 1.16 muestra el espacio de fase para las primeras 5000 iteraciones. Su contorno es similar al atractor caótico de la Figura 1.13a, pero para este valor particular del parámetro la mayoría de los puntos en el espacio de fase representan puntos transitorios. El atractor está geoméricamente organizado en una órbita de ocho grupos donde cada uno de ellos incluye el mismo número de puntos. Los 8 grupos del atractor han sido enfatizados en la Figura 1.17 con círculos, que indican la localización correspondiente dentro del atractor en el espacio de fase.

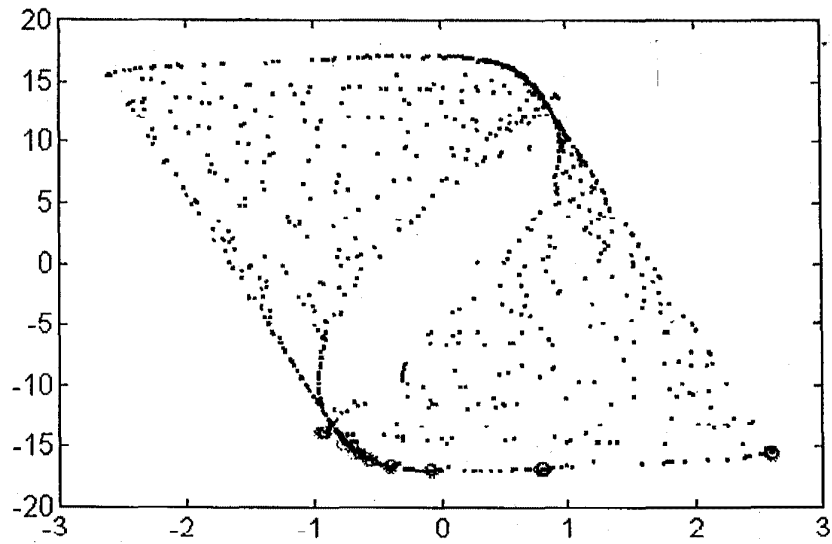


Figura 1.16

Atractor caótico ($n=5000$ iteraciones) donde se muestra, enfatizado con círculos, dónde se concentran las ocho órbitas periódicas

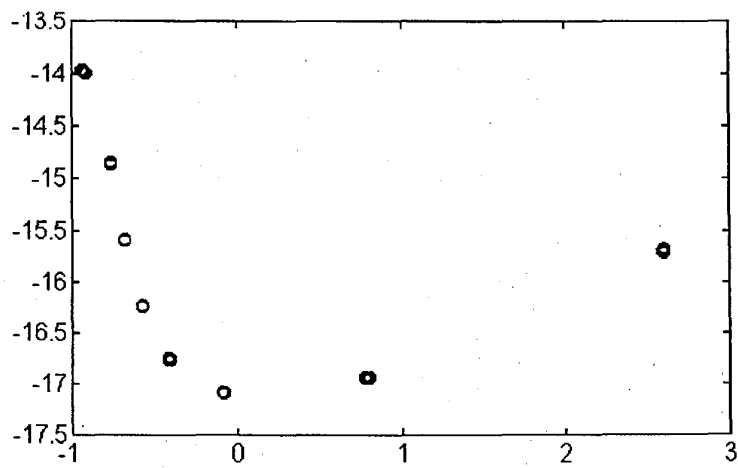


Figura 1.17. *Ocho órbitas periódicas, $n=2500-5000$*

El estudio del máximo exponente de Lyapunov en el atractor cuando sólo se considera el movimiento transitorio resulta ser positivo, lo que indica un movimiento caótico. Sin embargo, se obtiene un máximo exponente de Lyapunov negativo cuando se consideran todas las iteraciones, incluido el movimiento transitorio. Así, la serie temporal transitoria se comporta como una serie temporal caótica para posteriormente pasar a un atractor regular.

Las conclusiones que se derivan en esta fase son las siguientes:

1) el sistema especulativo en tiempo discreto posee otra característica notable para un determinado rango de los parámetros: un movimiento transitorio de naturaleza compleja que desemboca en un atractor regular. Esta característica también la verifican otros sistemas discretos bidimensionales, ya clásicos, como el Henon y el de Kaldor.

2) para los valores de los parámetros que implican atractores no caóticos, el sistema puede poseer múltiples atractores para diferentes condiciones iniciales. Los atractores consisten en órbitas de 8 períodos organizadas en grupos desconectados de puntos periódicos. Las iteraciones desde un punto inicial de un atractor particular están caracterizadas por un complejo movimiento transitorio, un colapso del movimiento transitorio y al final una convergencia suave hacia una órbita de período 8. Las cuencas básicas de atracción pueden ser complicados objetos en el espacio de fase.

1.1.5. Estudio del Caso $\tau \rightarrow 0$

Ya se ha justificado suficientemente el interés que supone que el tiempo de respuesta en la expectativa chartista disminuya. En este rango es cuando el sistema presenta un movimiento caótico y se concentra sobre un atractor extraño. En este apartado analizaremos el caso particular del modelo especulativo suponiendo que el tiempo de respuesta chartista es cero; esto indicará que los chartistas forman su estimación de la tendencia del precio del activo basándose sólo en los cambios de precios más recientes. El interés que tiene este caso particular es analizar qué sucede en el modelo cuando la demanda chartista muestra cambios inesperados, y en consecuencia el precio del activo podrá cambiar de dirección bruscamente.

El sistema de ecuaciones en diferencias (1.1.2) puede ser transformado, una vez eliminadas las variables p_t y p_{t+1} , en la ecuación en diferencias de segundo orden

$$\tau \Psi_{t+2} - (2\tau - a\tau - 1)\Psi_{t+1} + (1-a)(\tau - 1)\Psi_t = k(\Psi_{t+1}) - k(\Psi_t)$$

Si $\tau \rightarrow 0$, ésta ecuación se reduce a una ecuación en diferencias de primer orden

$$\Psi_{t+1} - (1-a)\Psi_t = k(\Psi_{t+1}) - k(\Psi_t)$$

haciendo

$$H(\Psi_{t+1}) = k(\Psi_{t+1}) - \Psi_{t+1}$$

$$G(\Psi_t) = k(\Psi_t) - (1-a)\Psi_t$$

se obtiene la ecuación en diferencias unidimensional

$$\Psi_{t+1} = H^{-1}(G(\Psi_t)) = F(\Psi_t) \quad (1.1.3)$$

cuyo único punto fijo es el origen.

Como la función k es no lineal, es imposible dar una expresión analítica para la función F , por tanto vamos a estudiar por separado las características de las funciones H y G para poder justificar, en los distintos valores de los parámetros, las propiedades que se derivan de la función F .

Características cualitativas de la función $H(\Psi) = k(\Psi) - \Psi$

(i) Si $\Psi \rightarrow +\infty$, entonces $H(\Psi) \rightarrow -\infty$, ya que $\lim k(\Psi) = b$ si $\Psi \rightarrow +\infty$. Análogamente, si $\Psi \rightarrow -\infty$, entonces $H(\Psi) \rightarrow +\infty$, ya que $\lim k(\Psi) = -b$ si $\Psi \rightarrow -\infty$; por tanto, $H(\Psi)$ tiene una asíntota oblicua a la derecha: $b - \Psi$, y una asíntota oblicua a la izquierda: $-b - \Psi$.

(ii) La pendiente de $H(\Psi)$ viene dada por $H'(\Psi) = k'(\Psi) - 1$, por lo que será mayor o menor que cero en el origen si b es mayor o menor que uno respectivamente.

(iii) Los puntos críticos de $H(\Psi)$ serán las posibles soluciones de la ecuación $k'(\Psi) = 1$. Si $b > 1$, la función H tiene dos soluciones, H_1 y H_2 , y no hay solución para $b < 1$.

Los dos casos posibles para la función $H(\Psi)$, según que el parámetro b sea menor o mayor que 1 están reflejados en la Figura 1.18.

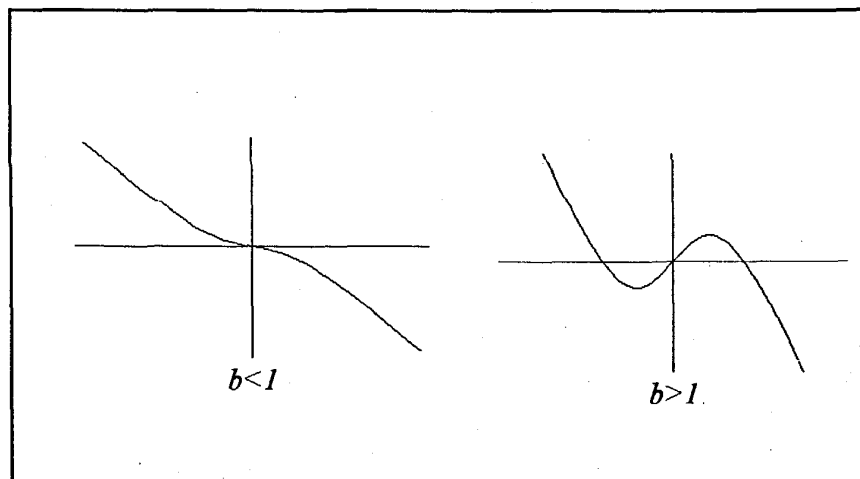


Figura 1.18 Gráfica de $H(\Psi)$

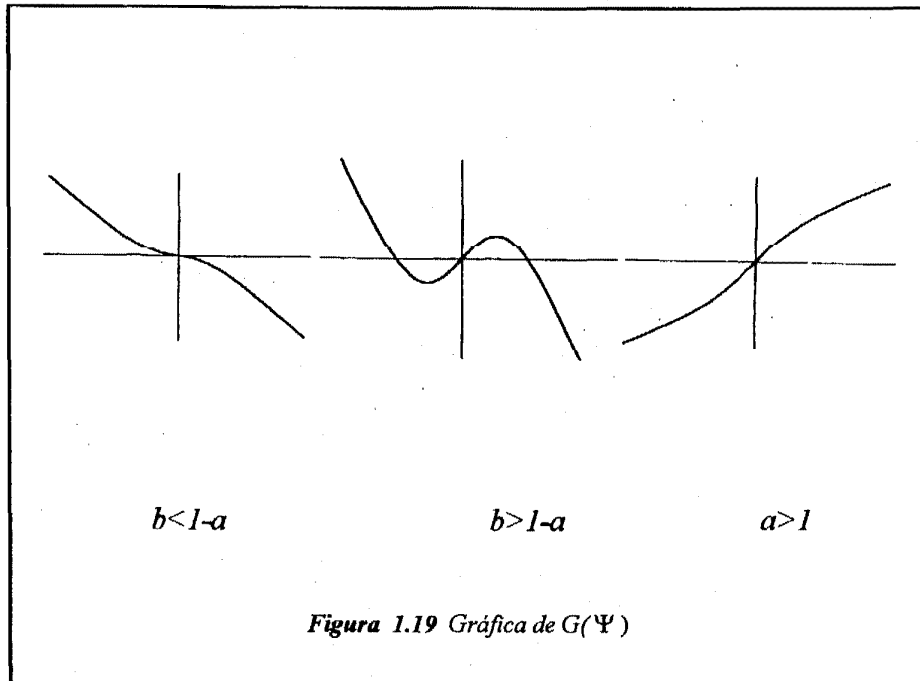
Características cualitativas de la función $G(\Psi) = k(\Psi) - (1-a)\Psi$

(i) Si $\Psi \rightarrow +\infty$, entonces $G(\Psi) \rightarrow -\infty$ ($+\infty$), según que $a < (>) 1$; análogamente si $\Psi \rightarrow -\infty$, entonces $G(\Psi) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), según que $a < (>) 1$, por tanto la función $G(\Psi)$ tiene dos asíntotas oblicuas: $b - (1-a)\Psi$ a la derecha, y $-b - (1-a)\Psi$ a la izquierda.

(ii) La pendiente de $G(\Psi)$ viene dada por $G'(\Psi) = k'(\Psi) - (1-a)$, por lo que si $a < 1$, será positiva si $b > 1-a$ y negativa en caso contrario; pero si $a > 1$, la pendiente en el origen será siempre positiva.

(iii) Los puntos críticos de G serán las posibles soluciones de la ecuación $k'(\Psi) = 1-a$, la cual sólo tendrá dos soluciones, G_1 y G_2 , en el caso $b > 1-a$.

Los tres casos de la función $G(\Psi)$ están reflejados en la Figura 1.19.



Un gran número de subcasos serán posibles para la función $F(\Psi)$. La estabilidad del punto de equilibrio dependerá de que el valor de la pendiente de F , evaluada en el punto fijo, permanezca dentro del círculo unidad; esto es, que verifique $|\frac{dF(\Psi^*)}{d\Psi}| = |\lambda| < 1$. Las bifurcaciones o cambios en el comportamiento cualitativo del modelo sólo pueden ocurrir cuando λ tome el valor $+1$ ó -1 .

Como $H(\Psi_{t+1}) = G(\Psi_t)$, derivando implícitamente con respecto a Ψ_t , obtenemos $\frac{d\Psi_{t+1}}{d\Psi_t} = \frac{G'(\Psi_t)}{H'(\Psi_{t+1})}$, y como $\Psi_{t+1} = F(\Psi_t)$, resulta

$$F'(\Psi_t) = \frac{G'(\Psi_t)}{H'(\Psi_{t+1})} \quad (1.1.4)$$

por tanto, en el punto de equilibrio se verifica:

$$F'(0) = \frac{G'(0)}{H'(0)} = 1 + \frac{a}{b-1}$$

La estabilidad e inestabilidad del punto de equilibrio dependerá de la interacción entre los parámetros chartistas y fundamentalistas. A continuación vamos a analizar todos los casos posibles, manteniendo fijo el parámetro a y haciendo variar el parámetro b .

Si $a < 1$, se tienen los tres subcasos siguientes.

i) Si $b < 1-a$, entonces $F'(\Psi_t) > 0$ y la función $F(\Psi)$ es monótona creciente. Además, $\lim_{\Psi_t \rightarrow \infty} F(\Psi_t) = b + a\Psi_t$ cuando $\Psi_t \rightarrow \infty$ y $\lim_{\Psi_t \rightarrow -\infty} F(\Psi_t) = -b + a\Psi_t$ cuando $\Psi_t \rightarrow -\infty$ por lo que la función F tiene dos asíntotas oblicuas y no existen puntos críticos. El punto de equilibrio será siempre localmente estable ya que $0 < F'(0) < 1$ [Figura 1.20(i)].

(ii) Si $b > 1-a$, entonces $G'(\Psi_t) = 0$ tiene dos soluciones, Ψ_1 y Ψ_2 (supongamos que $\Psi_1 < \Psi_2$) y $H'(\Psi) < 0$, por tanto $F'(\Psi_t) < 0$ en (Ψ_1, Ψ_2) la función decrece en ese intervalo y crece en el resto del dominio, por lo que Ψ_1 y Ψ_2 son puntos críticos de F .

Las asíntotas son las mismas que en el caso (i). En el punto de equilibrio se verifica $F'(0) < 0$, la función es monótona decreciente en el origen, el equilibrio será localmente estable si $-1 < F'(0) < 0$, esto es, cuando $0 < b < 1 - a/2$, y será localmente inestable si $1 - a/2 < b < 1$ [Figura 1.20(ii)].

(iii) Si $b > 1$, entonces $G'(\Psi_1) = 0$ tiene dos soluciones, G_1 y G_2 , y también $H'(\Psi_1) = 0$ tiene dos soluciones, H_1 y H_2 (suponemos $G_1 > H_1$ y $G_2 < H_2$), llamando $H_1^* = H^{-1}(G(G_1))$ y $H_2^* = H^{-1}(G(G_2))$, es posible demostrar bajo dichas suposiciones que en las proximidades del origen se verifica que

$$F'(\Psi_1) = \begin{cases} >0 & \Psi < H_1 \wedge \Psi > H_2 \\ \leq 0 & H_1 \leq \Psi < H_1^* \wedge H_2^* < \Psi \leq H_2 \\ >0 & H_1^* < \Psi < H_2^* \\ \text{indef} & \Psi = H_1^* \wedge \Psi = H_2^* \end{cases}$$

en estas condiciones los puntos críticos de F son H_1 y H_2 . Bajo otros supuestos, la curva puede presentar otras discontinuidades aparte de la que se obtiene en los puntos H_1^* y H_2^* ; pero en las proximidades del origen, la gráfica de F no cambia sustancialmente. En el punto de equilibrio, $F'(0) > 0$, por lo que la función es monótona creciente en el origen y será siempre localmente inestable, ya que se verifica $F'(0) > 1$ [Figura 1.20(iii)].

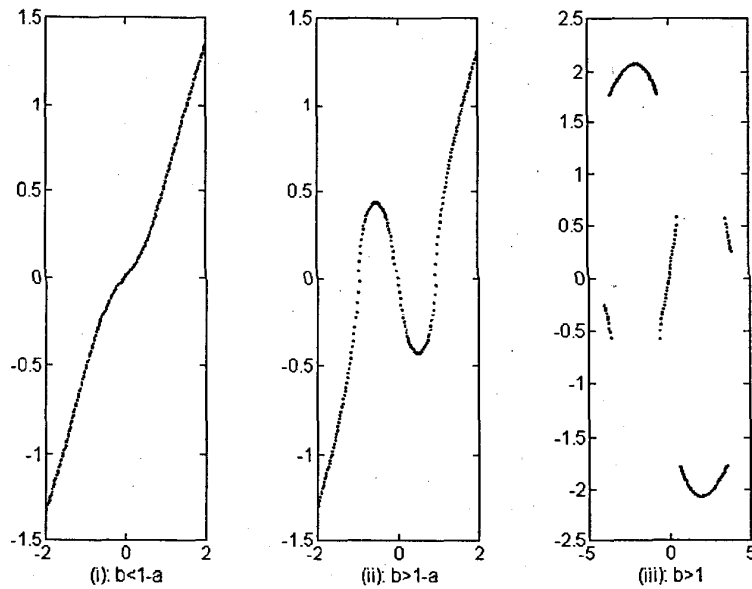


Figura 1.20 Gráfica de la función $F(\Psi)$ siendo $a < 1$.

Si $a > 1$ se tienen los dos subcasos siguientes

(iv) Si $b < 1$, entonces $H(\Psi_t) < 0$ y $G(\Psi_t) > 0$, por tanto $F(\Psi_t) \leq 0$, y en consecuencia la función $F(\Psi)$ es monótona decreciente. Además como se verifica que $\lim_{\Psi_t \rightarrow \infty} F(\Psi_t) = -b + a\Psi_t$ cuando $\Psi_t \rightarrow \infty$ y $\lim_{\Psi_t \rightarrow -\infty} F(\Psi_t) = b + a\Psi_t$ cuando $\Psi_t \rightarrow -\infty$, la función F tiene dos asíntotas oblicuas y no existen puntos críticos. En el origen será $F'(0) < 0$, por lo que el equilibrio será localmente estable si $-1 < F'(0) < 0$; esto es, cuando $0 < b < 1 - a/2$, y será localmente inestable si $1 - a/2 < b < 1$ [Figura 1.21(iv)].

(v) Si $b > 1$, entonces $G'(\Psi_1) > 0$, mientras que $H(\Psi_1)$ tiene dos puntos críticos, Ψ_1 y Ψ_2 (sea $\Psi_1 < \Psi_2$), por tanto se verifica para la función $F(\Psi)$

$$F'(\Psi_1) = \begin{cases} > 0 & \Psi_1 < \Psi < \Psi_2 \\ < 0 & \Psi < \Psi_1 \wedge \Psi > \Psi_2 \\ \text{indef} & \Psi = \Psi_1 \wedge \Psi = \Psi_2 \end{cases}$$

en el origen $F'(0) > 0$, y el punto de equilibrio será siempre localmente inestable ya que $F'(0) > 1$ [Figura 1.21(v)].

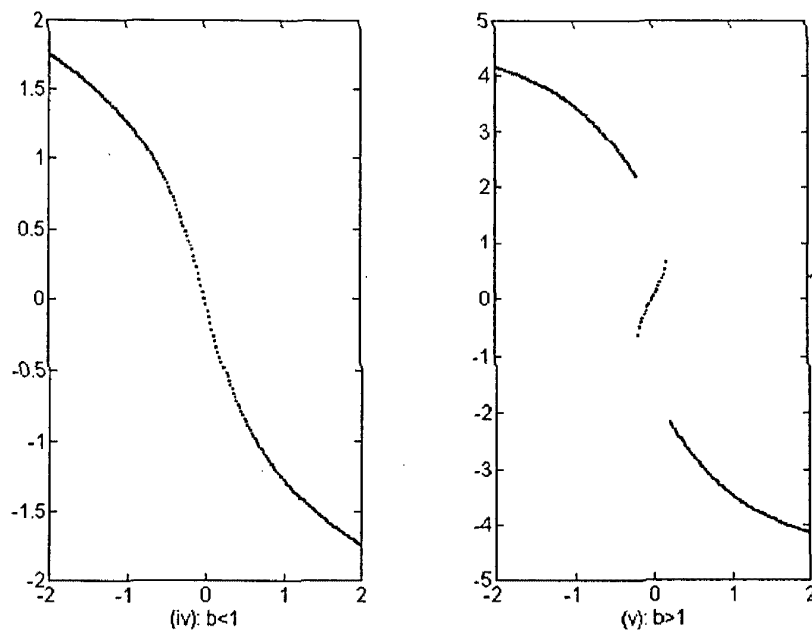


Figura 1.21 Gráfica de la función $F(\Psi)$ siendo $a > 1$

1.1.5.1. Bifurcación Flip

Este tipo de bifurcación sólo se puede dar en modelos en tiempo discreto. En el caso unidimensional ocurre cuando $dF(\Psi^*)/d\Psi = \lambda = -1$. El teorema de existencia de bifurcación Flip (Whitley, 1983) afirma:

Teorema 1.3. (Bifurcación Flip). Sea $x_{t+1} = f(x_t, \mu)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ una ecuación en diferencias unidimensional con un punto fijo x^* tal que $f(x^*, \mu_0) = x^*$ y que tenga autovalor -1 . Si en (x^*, μ_0) se verifican las condiciones

$$(1) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \right) \neq 0$$

$$(2) \quad -2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 = \alpha \neq 0$$

entonces, dependiendo de los signos de las expresiones (1) y (2), se verifica:

1º) el punto fijo x^* es estable (inestable) para $\mu < \mu_0$ ($\mu > \mu_0$), y

2º) el punto fijo x^* se hace inestable (estable) para $\mu > \mu_0$ ($\mu < \mu_0$), apareciendo una rama de puntos fijos estables (inestables) de orden dos alrededor de x^* .

Un punto fijo de orden 2 es un punto fijo de la segunda iteración de f , esto es, de $f \circ f = f^{(2)}$, y se verificará $x^* = f^{(2)}(x^*)$. La bifurcación flip es normalmente denominada por estas razones una bifurcación de *período doble*. Si el signo de la expresión (2) es negativo, los puntos fijos de orden 2 que aparecen son estables, esto indica que x_t toma dos valores fijos en toda su trayectoria temporal. En este caso la

bifurcación flip se denomina *supercrítica*. En caso contrario, si el signo de la expresión (2) es positivo, los puntos fijos de orden 2 son inestables y la bifurcación es llamada *subcrítica*.

En el modelo especulativo unidimensional (1.1.3) se produce una bifurcación flip en el parámetro b_0 cuando $F'(0) = -1$; esto es, cuando $b_0 = 1-a/2$ (notemos que el punto de bifurcación es positivo y entonces $a < 2$). Teniendo en cuenta la ecuación (1.1.4) y que en la expresión analítica que hemos especificado para la función $k(\Psi)$, en el punto crítico se verifica: $k'(0)=b$, $k''(0)=0$, $k'''(0)=-2b$, es fácil demostrar que las dos condiciones del teorema de bifurcación flip se cumplen, obteniendo en los valores $(\Psi^*, b_0) = (0, 1-a/2)$

$$(1) \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \right) = 1 \left(\frac{-ak''}{(k'-1)^2} \right) + 2 \left(\frac{-a}{(k'-1)^2} \right) = 1(0) + 2 \left(\frac{-a}{(b_0-1)^2} \right) = -\frac{2}{a} < 0$$

$$(2) -2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 = -2 \left(\frac{4(2-a)}{a} \right) - 3(0) < 0, \text{ ya que } a < 2$$

por tanto, existe una bifurcación flip supercrítica en b_0 en donde la trayectoria temporal se caracteriza por un ciclo estable de período 2.

Si fijamos $a < 1$, el parámetro de impacto chartista b es el que mide la evolución de la trayectoria temporal de Ψ . Para valores pequeños de b ($0 < b < 1-a/2$), la trayectoria temporal permanece estable. A medida que b aumenta ($1-a/2 < b < 1$), la dinámica pasa por una bifurcación flip que se caracteriza por tener una trayectoria de período dos supercrítica (cuya amplitud depende del valor que tome b) (Figura 1.22).

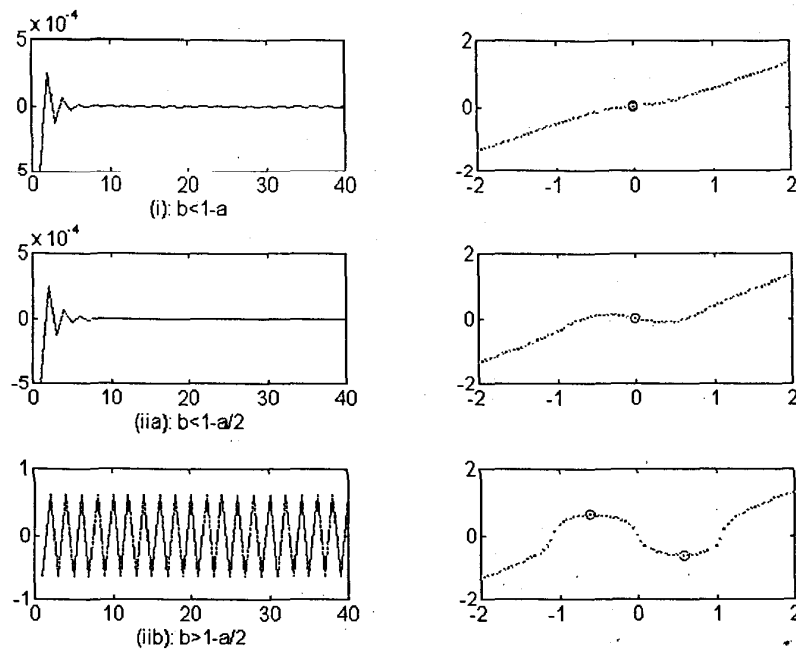


Figura 1.22 Evolución de la trayectoria temporal para $a < 1$ fijo ($a = 0.2$) variando el parámetro b . Emergencia de una bifurcación flip en el valor $b_0 = 1 - a/2$. Concretamente: (i) la trayectoria siempre es estable si $b < 1 - a$; (ii)a) la trayectoria permanece estable si b aumenta $1 - a < b < 1 - a/2$; (ii)b) se produce una bifurcación de flip de periodo doble en el rango $1 - a/2 < b < 1$. Los gráficos de la derecha corresponden a la función $F(y)$ donde se observa los valores de la trayectoria temporal sobre la curva.

Si el parámetro b sigue aumentando ($b > 1$), aparecen ciclos de periodo regular entremezclados con trayectorias aperiódicas para posteriormente convertirse en una trayectoria completamente caótica (Figura 1.23).

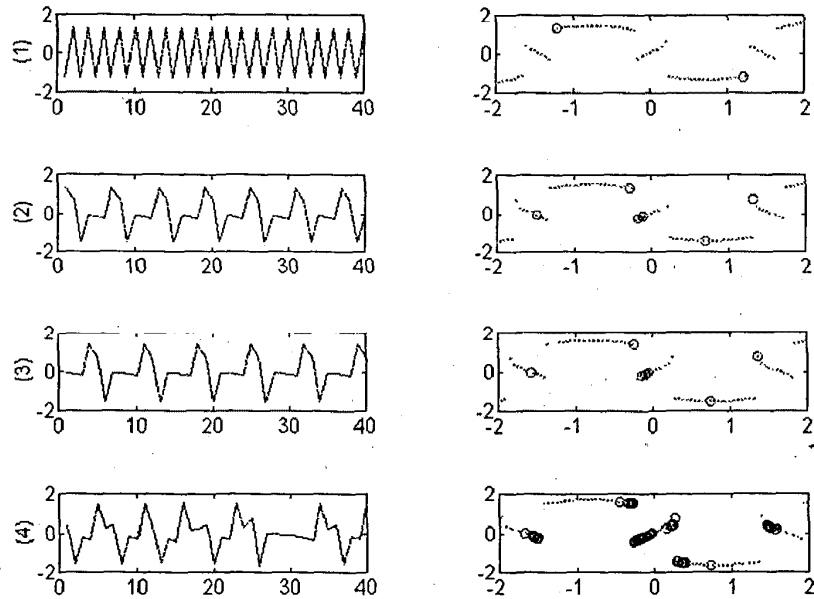


Figura 1.23 Evolución de la trayectoria temporal para un $a < 1$ fijo ($a = .2$) variando el parámetro b . Concretamente: (1) la trayectoria permanece con un periodo dos estable si $1 < b < 1.355$, en esta simulación $b = 1.3$; (2) aparece un ciclo de periodo 6 si $b = 1.3554$; (3) ciclo de periodo 7 para $b = 1.4$; (4) aparecen también trayectorias aperiódicas, aquí $b = 1.45$. Los gráficos de la derecha corresponden a la función $F(\Psi)$ donde se observan los valores que toma la trayectoria temporal sobre la curva.

En las simulaciones de las Figuras 1.22 y 1.23, el periodo dos perdura para un rango de b relativamente grande ($.9 < b < 1.3553$ para $a = .2$); esto no ocurre generalmente así. En el caso $a \ll 1$ la trayectoria comienza a volverse caótica casi cuando b cruza el umbral de 1 como se muestra en la Figura 1.24 y en la Tabla 1.

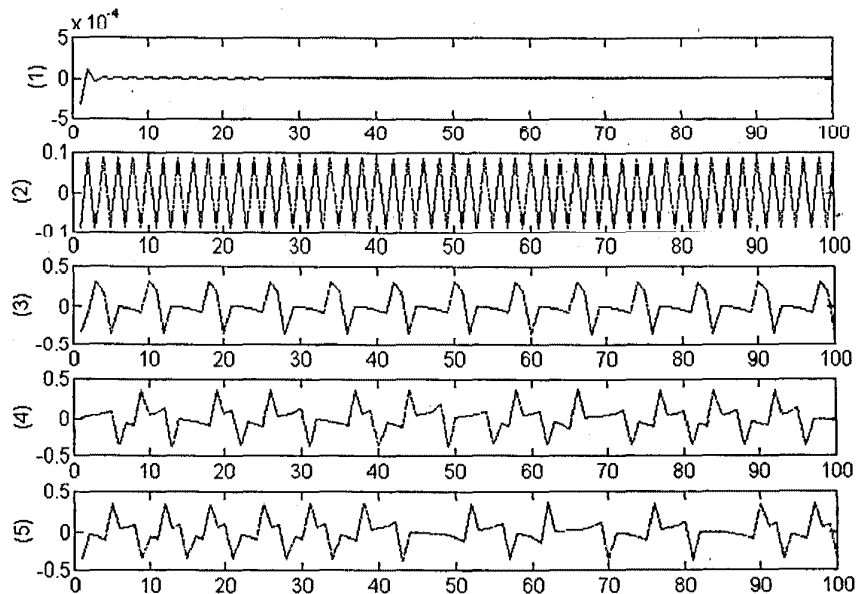


Figura 1.24 Evolución de la trayectoria temporal para un $a < 1$ fijo ($a = .015$) variando el parámetro b . Concretamente: (1) $b = .8$, el punto de equilibrio es estable; (2) $b = .995$, bifurcación flip supercrítica alrededor del punto de equilibrio; (3) $b = 1.0227$, ciclo estable de período ocho; (4), (5) región caótica donde la trayectoria temporal depende del valor inicial, con (4) $b = 1.03$ ($\Psi_0 = .01$); (5) $b = 1.03$ ($\Psi_0 = .1$);

Podemos asegurar, por tanto, que en el caso $a < 1$ el rango donde la trayectoria se vuelve caótica es para valores de $b > 1$. Esto contradice los resultados de Chiarella (1992) donde sugiere la posibilidad del movimiento caótico en el rango donde los parámetros verifican $1 - a/2 < b < 1$, apoyándose en los resultados de May (1983), ya que la función F en este rango se puede aproximar a una cúbica, y afirmando que la

función podría presentar una transición directa de un período doble hacia el caos. Nuestros resultados indican que en ese rango de parámetros permanece un constante ciclo de período dos estable y el caos surge sólo para valores de $b > 1$.

Tabla 1

Dinámica del modelo especulativo discreto cuando $\tau = 0$, con $a < 1$ fijo ($a = 0.015$)

Comportamiento dinámico	Parámetro chartista b	Ilustración
Pto equilibrio globalm. estable	$0 < b < 0.9925$	Figura 1.24(1)
Ciclo período dos globalm. estable	$0.9925 < b < 1.0227$	Figura 1.24(2)
Ciclo período ocho globalm. estable	$1.0227 < b < 1.03$	Figura 1.24(3)
Caos (ciclos de períodos arbitrarios o comportamiento aperiódico, dependiendo de condic. iniciales)	$b > 1.03$	Figura 1.24 (4),(5)

Si fijamos ahora $a > 1$, la trayectoria temporal pasa, por medio de una bifurcación flip en el valor $b_0 = 1 - a/2$, de ser estable ($0 < b < 1 - a/2$) a un ciclo estable de período dos (cuya amplitud depende del valor que tome b), pero su dinámica no se modifica al aumentar el valor del parámetro chartista b , como se puede observar en la Figura 1.25.

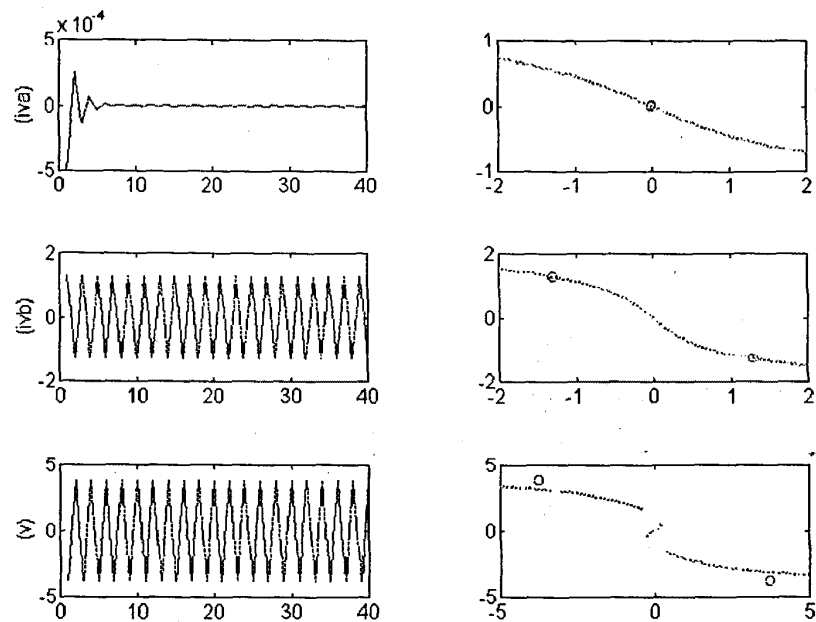


Figura 1.25 Evolución de la trayectoria temporal para un $a > 1$ fijo ($a=1.2$) variando el parámetro b . Concretamente: (iva) la trayectoria permanece estable para $0 < b < 1-a/2$, ($b=.2$); (ivb) aparece una bifurcación flip y la trayectoria se vuelve periódica de periodo dos $1-a/2 < b < 1$, ($b=.6$); (iv) aunque b aumenta $b > 1$ ($b=1.5$) la trayectoria permanece en un constante periodo dos estable. Los gráficos de la derecha corresponden a la función $F(\Psi)$ donde se observan los valores de la serie temporal sobre la curva.

Es interesante notar que en el modelo discreto unidimensional (1.1.3) no existe ningún otro tipo de bifurcación salvo la flip, ya que la condición $dF(\Psi^*)/d\Psi = \lambda = -1$ no puede ocurrir.

Los resultados que se obtienen al analizar la dinámica de la ecuación unidimensional (1.1.3), una vez hecho cero el tiempo de respuesta chartista, concuerdan con los deducidos en el análisis del sistema discreto bidimensional. La dinámica viene determinada por la interacción entre los dos parámetros estructurales a y b que miden la respuesta fundamentalista y chartista respectivamente. El caos surge para valores pequeños del parámetro fundamentalista $a < 1$ y para valores altos del parámetro chartista $b > 1$, lo que induce a pensar que es precisamente la actuación de los agentes chartistas lo que produce la desestabilización dentro del mercado.

1.1.6. A Modo de Síntesis

El modelo especulativo de fundamentalistas y chartistas en tiempo discreto [Ecuaciones (1.1.2)], que hemos analizado en esta sección, ha revelado una dinámica mucho más rica que la deducida del sistema en tiempo continuo. El comportamiento del modelo depende de la interacción entre el parámetro de impacto fundamentalista, el parámetro de impacto chartista y el tiempo de respuesta en la formación de expectativas chartista.

El modelo discreto presenta un comportamiento asintótico de punto fijo estable que degenera, por medio de una bifurcación de Hopf, en un ciclo límite cuando la velocidad de ajuste de la expectativa chartista aumenta. En éste caso también aparecen comportamientos del tipo variedad rápido-lenta, que se caracterizan porque la trayectoria temporal del precio así como la expectativa chartista presentan cambios muy abruptos.

Las bifurcaciones de Neimark y de Hopf, como transición hacia la zona caótica, ocurren cuando el tiempo de respuesta chartista disminuye. El sistema se concentra sobre un atractor caótico cuando en el mercado domina la demanda chartista y cuando su estimación de la tendencia del precio se basa en los cambios de precio más recientes.

Este modelo es capaz de generar también un complejo movimiento transitorio, que puede confundirse con un movimiento caótico, pero que ocurre antes de que las trayectorias se estabilicen sobre el atractor. El interés que supone ésta característica es la posibilidad de encontrar una fase irregular durante el espacio de tiempo en que el sistema considerado sea verdaderamente válido.

Cuando el tiempo de respuesta en la expectativa chartista tiende a cero, la dinámica del modelo depende de la interacción de los chartistas y los fundamentalistas. Pueden presentarse diversas situaciones dinámicas (estabilidad, bifurcación flip y comportamiento periódico), dependiendo de los valores tomados por los parámetros del modelo. Sólo en el caso en que la influencia del parámetro de impacto de la demanda chartista supere al parámetro de impacto fundamentalista, es posible encontrar un movimiento caótico en el modelo.

1.2. Un Modelo de Fundamentalistas y Chartistas con Dos Activos

En esta sección vamos a ampliar el modelo especulativo de Chiarella (1992) en tiempo continuo suponiendo que en el mercado están interactuando dos activos con dos funciones distintas que expresan el exceso de demanda especulativo de los diferentes activos y que contienen a sus diferentes precios. Análogamente al caso de un activo, se admite que los intercambios comerciales puedan realizarse de forma continua. Se adopta como premisa básica que los cambios de los precios están forzados por el *exceso de las demandas agregadas* de los inversores

$$\dot{P}_1(t) = D_t^{*1}(\cdot) \quad (1.2.1a)$$

$$\dot{P}_2(t) = D_t^{*2}(\cdot) \quad (1.2.1b)$$

siendo $\dot{P}_1(t)$ y $\dot{P}_2(t)$ los logaritmos de los precios de los activos en un tiempo t , y D_t^{*1} y D_t^{*2} las funciones del exceso de demanda de los inversores para los dos activos en el tiempo t .

Supondremos también que para ambos activos el exceso de demanda de los inversores tiene dos componentes, una componente fundamental y una componente chartista

$$D_t^{*1}(\cdot) = D_t^1(\cdot) + d_t^1(\cdot) \quad (1.2.2a)$$

$$D_t^{*2}(\cdot) = D_t^2(\cdot) + d_t^2(\cdot) \quad (1.2.2b)$$

donde D_t^i se refiere al exceso de las demandas fundamentales y d_t^i al exceso de las demandas chartistas, siendo $i=1,2$.

Sean $W_1(t)$ y $W_2(t)$ los logaritmos de los precios que cada una de las demandas fundamentales justifica en un tiempo t , es decir, los precios de equilibrio subyacentes para cada uno de los activos. Podemos expresar las funciones de demanda fundamental como funciones lineales monótonas crecientes que se anulan en cero

$$D_t^1 = a_{11}(W_1 - P_1) - a_{12}(W_2 - P_2) \quad (1.2.3a)$$

$$D_t^2 = a_{22}(W_2 - P_2) - a_{21}(W_1 - P_1) \quad (1.2.3b)$$

donde todos los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}^+$, $i, j = 1, 2$.

Sean $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ las estimaciones (medias) de las tendencias actuales que corresponden a los precios de los dos activos $P_1(t)$ y $P_2(t)$, y sea también $g(t)$ la tasa creciente de inversiones alternativas (sin riesgo). El exceso de las demandas chartistas se considera como funciones de la diferencia entre el rendimiento esperado para cada uno de los activos (medido por la estimación chartista de la tendencia del precio), y la adición que supone el rendimiento esperado del otro activo junto con el rendimiento de algún activo alternativo

$$d_t^1 = h_1(\Psi_1(t) - \Psi_2(t) - g(t)) \quad (1.2.4a)$$

$$d_t^2 = h_2(\Psi_2(t) - \Psi_1(t) - g(t)) \quad (1.2.4b)$$

donde las funciones h_1 y h_2 son funciones no lineales monótonas crecientes que pasan por el origen con un punto de inflexión en $(-g)$ y acotadas superior e inferiormente por $h_{i \text{ sup}}$ y $h_{i \text{ inf}}$, $i=1, 2$ respectivamente. Figura (1.2.6).

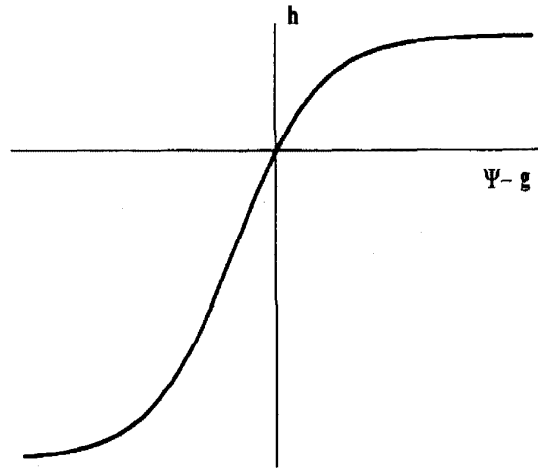


Figura 1.26 La Función de Demanda Chartista

Ψ indica la diferencia entre las estimaciones de las dos tendencias chartistas para cada uno de los activos: para la función h_1 , $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$ y para función h_2 , $\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$

En orden a cerrar el modelo, especificamos el modo en que los chartistas forman su estimación de la tendencia del precio para cada uno de los activos. Asumimos que la demanda en un mercado especulativo fuera del equilibrio sigue una dinámica de expectativas adaptativas de acuerdo a las siguientes ecuaciones

$$\dot{\Psi}_1 = c_1 (\dot{P}_1 - \Psi_1), \quad 0 < c_1 \leq \infty \quad (1.2.5a)$$

$$\dot{\Psi}_2 = c_2 (\dot{P}_2 - \Psi_2), \quad 0 < c_2 \leq \infty \quad (1.2.5b)$$

que describen la variación chartista de la tendencia para cada uno de los precios y donde c_1 y c_2 indican la velocidad de ajuste para los chartistas. Alternativamente, la cantidad $\tau_i (=1/c_i)$, $i=1,2$ indicará el tiempo de retardo en la formación de expectativas. En orden a simplificar el modelo, suponemos que los tiempos de

retardo en la formación de expectativas para cada uno de los activos son iguales, esto es, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

De las ecuaciones (1.2.1) - (1.2.5) podemos obtener que la dinámica de los precios de los activos se conducen por

$$\dot{P}_1 = a_{11} (W_1 - P_1) - a_{12} (W_2 - P_2) + h_1 (\Psi_1 - \Psi_2 - g) \quad (1.2.6a)$$

$$\dot{P}_2 = a_{22} (W_2 - P_2) - a_{21} (W_1 - P_1) + h_2 (\Psi_2 - \Psi_1 - g) \quad (1.2.6b)$$

$$\tau \dot{\Psi}_1 = a_{11} (W_1 - P_1) - a_{12} (W_2 - P_2) + h_1 (\Psi_1 - \Psi_2 - g) - \Psi_1 \quad (1.2.6c)$$

$$\tau \dot{\Psi}_2 = a_{22} (W_2 - P_2) - a_{21} (W_1 - P_1) + h_2 (\Psi_2 - \Psi_1 - g) - \Psi_2 \quad (1.2.6d)$$

que constituye un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales.

Suponemos que $W_1(t)$, $W_2(t)$ y $g(t)$ son constantes, de este modo el punto de equilibrio del sistema (1.2.6) viene dado

$$\bar{\Psi}_1 = 0$$

$$\bar{\Psi}_2 = 0$$

$$\bar{P}_1 = W_1 + [a_{22} h_1 (-g) + a_{12} h_2 (-g)] / (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

$$\bar{P}_2 = W_2 + [a_{21} h_1 (-g) + a_{11} h_2 (-g)] / (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

siendo $A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$.

Introduciendo un cambio de variable en los precios $p_i = P_i - \bar{P}_i$, $i = 1, 2$; el sistema (1.2.6) se transforma

$$\dot{p}_1 = -a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + k_1(\Psi_1 - \Psi_2) \quad (1.2.7a)$$

$$\dot{p}_2 = a_{21}p_1 - a_{22}p_2 + k_2(\Psi_2 - \Psi_1) \quad (1.2.7b)$$

$$\tau \dot{\Psi}_1 = -a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + k_1(\Psi_1 - \Psi_2) - \Psi_1 \quad (1.2.7c)$$

$$\tau \dot{\Psi}_2 = a_{21}p_1 - a_{22}p_2 + k_2(\Psi_2 - \Psi_1) - \Psi_2 \quad (1.2.7d)$$

el punto de equilibrio es ahora el origen, siendo

$$k_1(\Psi_1 - \Psi_2) = h_1(\Psi_1 - \Psi_2 - g) - h_1(-g)$$

$$k_2(\Psi_2 - \Psi_1) = h_2(\Psi_2 - \Psi_1 - g) - h_2(-g)$$

Las funciones k_1 y k_2 tienen las mismas características que las funciones h_1 y h_2 , sólo que ahora ambas tienen el punto de inflexión en el origen. Sus expresiones analíticas, dadas las características de cada una de ellas, las hemos supuesto equivalentes a funciones tangentes hiperbólicas

$$\begin{aligned} k_1(\Psi_1 - \Psi_2) &= \frac{b_1(e^{2(\Psi_1 - \Psi_2)} - 1)}{e^{2(\Psi_1 - \Psi_2)} + 1} \\ k_2(\Psi_2 - \Psi_1) &= \frac{b_2(e^{2(\Psi_2 - \Psi_1)} - 1)}{e^{2(\Psi_2 - \Psi_1)} + 1} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

donde b_1 y b_2 son las cotas de las respectivas funciones, además se verifica

$$\frac{\partial k_1(\Psi_1 - \Psi_2)}{\partial \Psi_1} = \frac{\partial h_1(\Psi_1 - \Psi_2 - g)}{\partial \Psi_1}; \quad \frac{\partial k_1(\Psi_1 - \Psi_2)}{\partial \Psi_2} = - \frac{\partial h_2(\Psi_1 - \Psi_2 - g)}{\partial \Psi_2}$$

$$\frac{\partial k_2(\Psi_2 - \Psi_1)}{\partial \Psi_1} = - \frac{\partial h_2(\Psi_2 - \Psi_1 - g)}{\partial \Psi_1}; \quad \frac{\partial k_2(\Psi_2 - \Psi_1)}{\partial \Psi_2} = \frac{\partial h_2(\Psi_2 - \Psi_1 - g)}{\partial \Psi_2}$$

por tanto, en el punto de equilibrio resulta

$$\left(\frac{\partial k_1}{\partial \Psi_1}\right)_E = b_1; \quad \left(\frac{\partial k_1}{\partial \Psi_2}\right)_E = -b_1$$

$$\left(\frac{\partial k_2}{\partial \Psi_1}\right)_E = -b_2; \quad \left(\frac{\partial k_2}{\partial \Psi_2}\right)_E = b_2$$

donde los parámetros b_1 y b_2 indican la pendiente en el equilibrio para cada una de las dos funciones de demanda chartista.

1.2.1. Análisis Lineal Local

Para realizar el análisis lineal local del sistema (1.2.7) calculamos la matriz jacobiana en el punto de equilibrio

$$J_E = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} & b_1 & -b_1 \\ a_{21} & -a_{22} & -b_2 & b_2 \\ \frac{a_{11}}{\tau} & \frac{a_{12}}{\tau} & \frac{b_1-1}{\tau} & \frac{b_1}{\tau} \\ \frac{a_{21}}{\tau} & \frac{a_{22}}{\tau} & \frac{b_2}{\tau} & \frac{b_2-1}{\tau} \end{bmatrix}$$

donde se obtiene el determinante $\det(J_E) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})/\tau^2 = A/\tau^2$ y la traza $\text{traz}(J_E) = -(a_{11} + a_{22}) + (b_1 + b_2 - 2)/\tau = -a + (b - 2)/\tau$, siendo $a_{11} + a_{22} = a$ y $b_1 + b_2 = b$.

Se observa que $\det(J_E)$ es positivo ya que $A > 0$, con lo cual obtenemos una condición necesaria, aunque no suficiente, para excluir la posibilidad de punto de silla. Consideraremos por tanto que $a_{11} > a_{12}$ y $a_{22} > a_{21}$.

1.2.2. La Bifurcación de Hopf

En el caso de sistemas de dimensión mayor o igual que tres, el teorema de Poincaré-Bendixon no puede ser aplicado en el estudio de la existencia de un comportamiento de ciclo límite. El teorema de bifurcación de Hopf puede constituir una herramienta idónea para establecer la existencia de órbitas cerradas, para ello calculamos la ecuación característica de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio

$$\text{Det}(J_E - \lambda I_4) = \frac{1 + \lambda \tau}{\tau^2} [\tau \lambda^3 + (a\tau - b + 1)\lambda^2 + [a + A\tau - B]\lambda + A] \quad (1.2.9)$$

donde $B = b_1(a_{22}-a_{21})+b_2(a_{11}-a_{12}) > 0$. Esta ecuación tiene una raíz real $\lambda = -1/\tau$, para analizar las otras tres soluciones nos basamos en Lorenz (1993), que afirma que la ecuación

$$\lambda^3 + \frac{1}{\tau}(a\tau - b + 1)\lambda^2 + \frac{1}{\tau}[a + A\tau - B]\lambda + \frac{A}{\tau} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \mu = 0 \tag{1.2.10}$$

siendo

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\tau}(a\tau - b + 1) \\ \delta &= \frac{1}{\tau}[a + A\tau - B] \\ \mu &= \frac{A}{\tau} \end{aligned}$$

tiene una raíz real y dos autovalores complejos conjugados si el discriminante $\Delta = M^2 \cdot N^3$ es positivo, donde

$$\begin{aligned} M &= \frac{\gamma^3}{27} - \frac{\gamma\delta}{6} + \frac{\mu}{2} \\ N &= \frac{\delta}{3} - \frac{\gamma^2}{9} \end{aligned}$$

Podemos establecer por tanto que $N > 0$, esto es, $3\delta > \gamma^2$ es una condición suficiente para que la ecuación (1.2.9) tenga dos raíces reales y dos complejas conjugadas. (Notemos que dicha condición implica automáticamente que $\delta > 0$).

El problema que se nos plantea ahora es comprobar la estabilidad de las raíces de la ecuación (1.2.9) mediante inecuaciones que contengan solamente los coeficientes de la ecuación característica misma. Por una raíz *estable* se entiende una raíz que tiene parte real negativa, esto es, está situada en la mitad izquierda del plano complejo, lo que incluye tanto raíces reales como complejas. La condición de que todos los coeficientes de la ecuación característica (1.2.9) tengan el mismo signo excluye, por el teorema de Descartes, la posibilidad de que hayan raíces reales positivas, y la condición de que el término independiente de (1.2.9) sea distinto de cero excluye la de raíces nulas; pero todo esto no es suficiente para eliminar la posibilidad de que las raíces complejas tengan parte real no negativa. No obstante, existen condiciones generales que son necesarias y suficientes para que todas las raíces sean estables.

Un criterio en este sentido que nos permite analizar la estabilidad de un sistema dinámico de alta dimensión es el *criterio de Routh-Hurwitz* (ver por ejemplo Gandolfo, 1983) que establece un análisis cualitativo de la convergencia de la trayectoria temporal. En nuestro caso, dado que el primer autovalor calculado de (1.2.9) es negativo, $\lambda = -1/\tau < 0$, centraremos el criterio en la ecuación (1.2.10) construyendo la matriz de coeficientes

$$\Delta = \begin{bmatrix} \gamma & \mu & 0 \\ 1 & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & \mu \end{bmatrix} \quad (1.2.11)$$

El teorema de Routh-Hurwitz establece que las condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces de (1.2.10) tengan parte real negativa vienen dadas por las siguientes desigualdades (que deben cumplirse todas simultáneamente)

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$$

donde $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ son los menores complementarios de (1.2.11), esto es

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \gamma > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \gamma & \mu \\ 1 & \delta \end{vmatrix} = \gamma \delta - \mu > 0 \\ \Delta_3 &= |\Delta| = \mu (\gamma \delta - \mu) > 0 \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

dato que $\mu = A/\tau > 0$, podemos prescindir de la tercera desigualdad, estableciendo que las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema dinámico sea estable es que se verifiquen las dos primeras desigualdades de (1.2.12).

En estas condiciones podemos afirmar que la ecuación característica (1.2.9) tiene dos autovalores reales negativos y dos autovalores complejos conjugados con parte real negativa. Siendo $\lambda_1 = -1/\tau$ y $\lambda_2 = -\alpha$, $\alpha > 0$, las dos raíces reales, entonces la ecuación

$$\lambda^2 + (\gamma - \alpha)\lambda + [\delta - \alpha(\gamma - \alpha)] = 0$$

tiene dos raíces complejas conjugadas con parte real negativa.

$$\lambda_{3,4} = \frac{-(\gamma - \alpha) \pm \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 - 4[\delta - \alpha(\gamma - \alpha)]}}{2}$$

donde $\gamma - \alpha > 0$ y $(\gamma - \alpha)^2 - 4[\delta - \alpha(\gamma - \alpha)] < 0$.

Para demostrar la existencia de una bifurcación de Hopf, es suficiente probar en nuestro caso que para valores decrecientes del parámetro τ existen autovalores complejos conjugados, la parte real de los autovalores complejos conjugados es cero en el punto de bifurcación τ^* , todas las demás raíces reales son distintas de cero en el punto de bifurcación, y además la parte real de los autovalores complejos conjugados es distinta de cero para $\tau < \tau^*$.

Como $\gamma > 0$ y $\alpha > 0$, la parte real de los autovalores complejos pasa de ser negativa a positiva cuando $\gamma = \alpha$, esto es, cuando $(a\tau - b + 1) / \tau = \alpha$, por tanto

$$\tau^* = \frac{b-1}{a-\alpha}, \text{ donde } b > 1 \text{ y } (a-\alpha) > 0$$

es el valor de bifurcación ya que en este punto la parte real de los autovalores complejos se anula (permaneciendo distintos de cero los autovalores reales), obteniendo

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\delta} i$$

ya que $\delta = (a + A\tau - B) / \tau > 0$, además en el punto de bifurcación

$$\frac{\partial R(\lambda(\tau))}{\partial \tau} = - \frac{(a-\alpha)^2}{2(b-1)} < 0$$

Por lo que podemos afirmar que existe un ciclo límite cuando τ pasa a través de τ^* ya que la parte real de los autovalores complejos conjugados pasa de ser negativa a positiva si τ disminuye. Por tanto, la trayectoria temporal es convergente

si $\tau > \tau^* = \frac{b-1}{a-\alpha}$ y el punto de equilibrio será localmente estable. En el valor $\tau = \tau^*$ ocurre una bifurcación y el punto de equilibrio pasa de ser estable a inestable, cuando $\tau < \tau^* = \frac{b-1}{a-\alpha}$ la trayectoria temporal tiende hacia una curva cerrada.

Observamos que la inestabilidad se produce cuando los chartistas basan su estimación de la tendencia del precio para cada uno de los activos en los cambios de precio más recientes. Considerando que "a" es la suma de los valores relativos de impacto de la demanda fundamental y "b" la suma de los valores de impacto de la demanda chartista, la dinámica de los precios queda determinada por los valores conjuntos; aumentando el impacto de los chartistas en el mercado, el sistema oscila y se hace inestable.

Observamos también que en el punto de bifurcación los autovalores de la ecuación característica (1.2.9) están perfectamente definidos en función de los coeficientes de la misma: $\lambda_1 = 1/\tau$; $\lambda_2 = -\gamma$; $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\delta}i$. Podemos aplicar el teorema de Vieta en la ecuación (1.2.10), ya que $\gamma, \delta, \mu > 0$, obteniendo

$$\begin{aligned}\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= -\gamma \\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 &= -\mu\end{aligned}$$

de donde se deduce que en el punto de bifurcación $\gamma\delta = \mu$. Si $\gamma\delta < \mu$, el sistema dinámico se vuelve inestable concentrándose en una curva cerrada.

Las ilustraciones correspondientes a la Figura 1.27 muestran el comportamiento de la bifurcación cuando τ pasa a través de τ^* para cada uno de los activos. En estas simulaciones, los coeficientes que miden la respuesta fundamentalista se han considerado menores que uno: $a_{11} = .6$; $a_{12} = .2$; $a_{21} = .4$; $a_{22} = .7$, y los que

miden la respuesta chartista, mayores que uno: $b_1 = 1.2$; $b_2 = 1.7$. Para estos valores de los parámetros, $\tau^* = 2.01955$ es el valor de bifurcación.

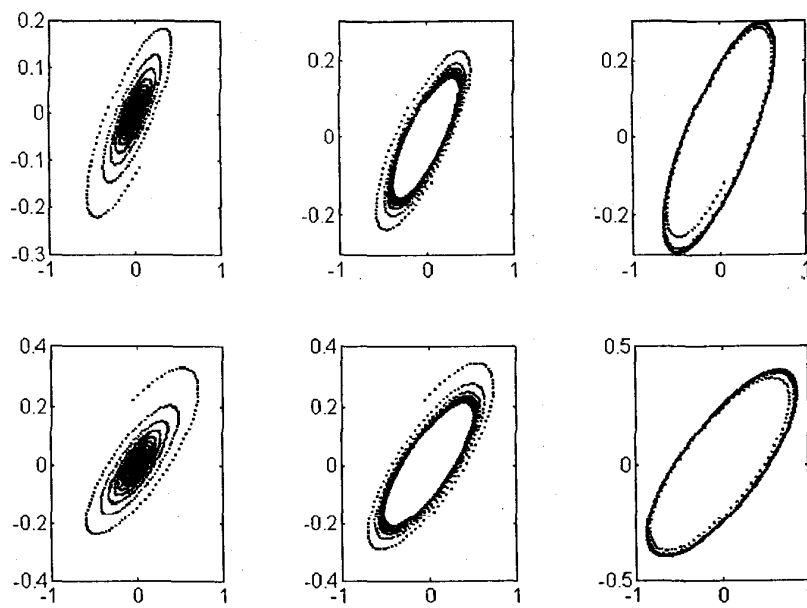


Figura 1.27

Bifurcación de Hopf para las funciones P y Ψ del activo 1 (ilustraciones superiores) y del activo 2 (ilustraciones inferiores). De izquierda a derecha τ toma los valores 2.1, 2.01955 y 1.9 respectivamente. El comportamiento dinámico pasa de ser estable a inestable por medio de una bifurcación de Hopf cuando τ disminuye.

1.2.3. Análisis Geométrico del Ciclo Límite en Tres Dimensiones

En esta sección vamos a analizar las superficies isoclinas, es decir las variedades que se obtienen haciendo $\dot{p}_i=0$, $\dot{\Psi}_i=0$, $i=1,2$ en el sistema de ecuaciones (1.2.7), considerando únicamente el caso donde el punto de equilibrio presenta inestabilidad local; esto es, cuando se verifica $b > 1 + \tau(a - \alpha)$, siendo $(a - \alpha) > 0$ y donde ya se ha comprobado que las oscilaciones de p_i y Ψ_i , $i=1,2$ son atraídas hacia un ciclo límite. Nuestro estudio estará centrado en analizar el efecto de las oscilaciones sobre el primero de los activos cuando están interactuando las expectativas chartistas de los dos activos.

La primera de las variedades, obtenida al hacer $\dot{p}_i=0$, $i=1,2$ en las ecuaciones (1.2.7a) y (1.2.7b), y teniendo en cuenta la relación existente entre las funciones k_1 y k_2 deducidas de (1.2.8), tiene como expresión $p_1 = [(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/Ab_1]k_1(\Psi_1 - \Psi_2)$, cuya gráfica está representada en al Figura 1.28a.

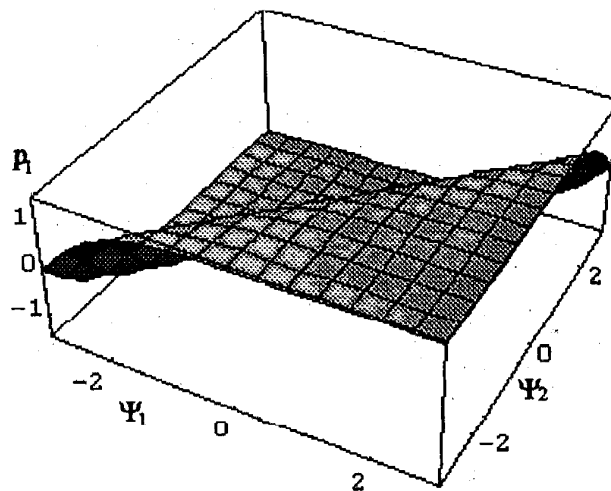


Figura 1.28a

La segunda variedad se deduce al hacer $\Psi_i=0$, $i=1,2$ en las ecuaciones (1.2.7c) y (1.2.7d), y teniendo en cuenta las anteriores observaciones, por lo que se obtiene $p_1 = [(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/Ab_1]k_1(\Psi_1 - \Psi_2) - (a_{22}\Psi_1 + a_{12}\Psi_2)/A$, representada en la Figura 1.28b

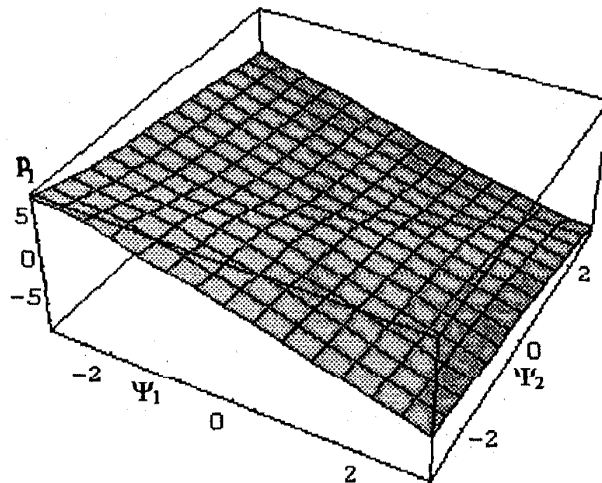


Figura 1.28b

Se observa que ambas variedades son simétricas respecto del plano $\Psi_1 = -\Psi_2$. Con el fin de tener una idea más clara de lo que sucede en el espacio tridimensional vamos inicialmente a seccionar ambas variedades por dicho plano y analizar el movimiento para el primero de los activos. Por tanto, la expresión que se deduce para la primera y segunda de las isoclinas resultan $\textcircled{1} : p_1 = [(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/Ab_1]k_1(2\Psi_1)$ $\textcircled{2} : p_1 = [(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/Ab_1]k_1(2\Psi_1) - [(a_{22} - a_{12})/A]\Psi_1$, cuya representación gráfica se indica en la Figura 1.29 y donde se realiza el análisis geométrico del ciclo límite que se deduce para el primer activo.

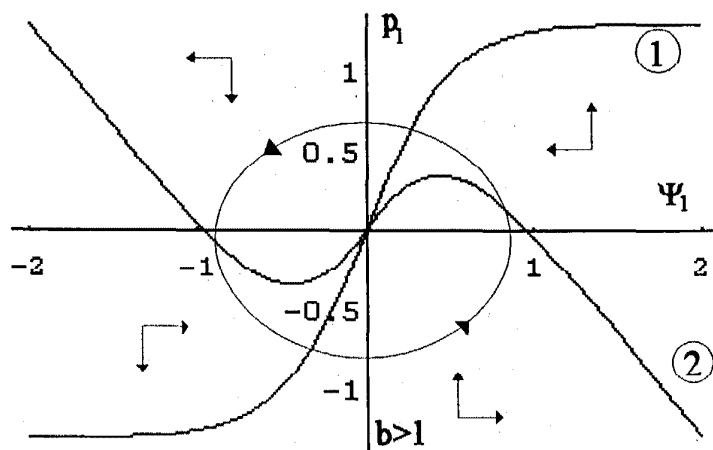


Figura 1.29

Análisis Geométrico del Ciclo Limite para el Primer Activo

Se distinguen cuatro fases en las fluctuaciones del primer activo. En la primera fase, situada en el primer cuadrante, el precio del activo aumenta, por lo que según la ecuación (1.2.3a) la demanda fundamentalista del primer activo disminuye a la vez que la expectativa chartista también disminuye. En la segunda fase, situada en el segundo cuadrante, el precio del primer activo empieza a disminuir y en consecuencia la demanda fundamentalista aumenta y la expectativa chartista continúa ajustándose a la baja por lo que la especulación se reduce. En la tercera fase, situada en el tercer cuadrante, el precio sigue disminuyendo pero la expectativa chartista sobre el primer activo empieza a aumentar. Por último, en la cuarta fase, situada en el cuarto cuadrante, el precio del primer activo comienza a aumentar disminuyendo la demanda fundamentalista pero la estimación de la tendencia chartista sigue ajustándose al alza y aumenta la especulación. El ciclo entra ahora en la primera fase y se repite en sí mismo. Este mismo análisis resultaría considerando el comportamiento del ciclo límite para el segundo de los activos.

El movimiento del ciclo límite en tres dimensiones resulta ahora más comprensible. Aunque se producen ocho fases, vamos a considerar únicamente las cuatro más representativas correspondientes a los cuatro octantes frontales tal y como se muestra en la Figura 1.30.

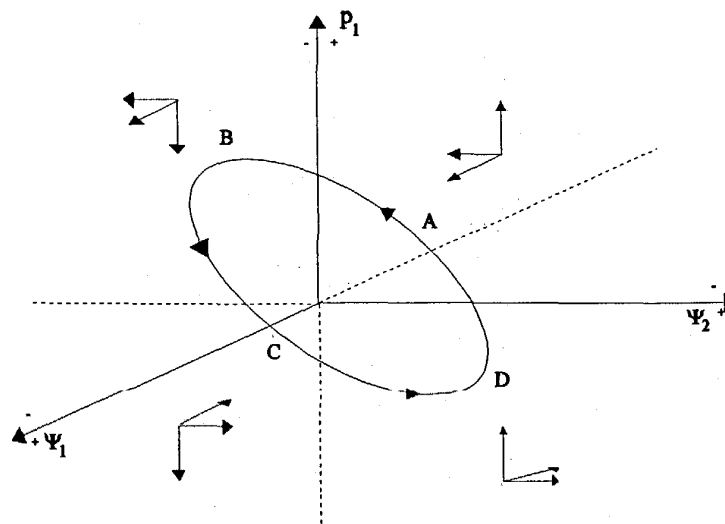


Figura 1.30

Análisis Geométrico del Ciclo Límite en Tres Dimensiones

En la primera fase de A a B, el precio del activo está aumentando por lo que según las ecuaciones (1.2.3a) y (1.2.3b) la demanda fundamentalista del activo 1 disminuye y la del activo 2 aumenta, a la vez que la expectativa chartista del activo 1 aumenta y la del activo 2 disminuye. En la segunda fase de B a C, el precio empieza a ajustarse a la baja, por lo que ahora para el activo 1 aumenta la demanda fundamentalista y para el activo 2 disminuye, las expectativas chartistas continúan igual que en la primera fase. En la tercera fase de C a D, el precio sigue disminuyendo la expectativa chartista sobre el activo 1 empieza a disminuir y la del activo 2 empieza

a aumentar. En la cuarta fase de D a A, el precio comienza a ajustarse al alza aunque las expectativas sobre los dos activos continúan igual que en la fase anterior. El ciclo entra ahora en la primera fase y se repite en sí mismo. Un análisis similar se deduciría de haber considerado el precio del segundo activo cuando están interactuando las expectativas chartistas sobre ambos activos

En la Figura 1.31 se muestra la simulación numérica del ciclo límite en tres dimensiones, analizando el precio de cada uno de los activos frente a las estimaciones chartistas de la tendencia actual sobre cada uno de los precios. En estas simulaciones se han considerado los coeficientes $a_{ij} < 1$ y $b_i > 1$, $i,j=1,2$ y $\tau < (b-1)/(a-\alpha)$ que es el rango de parámetros donde el punto de equilibrio tiene un comportamiento inestable.

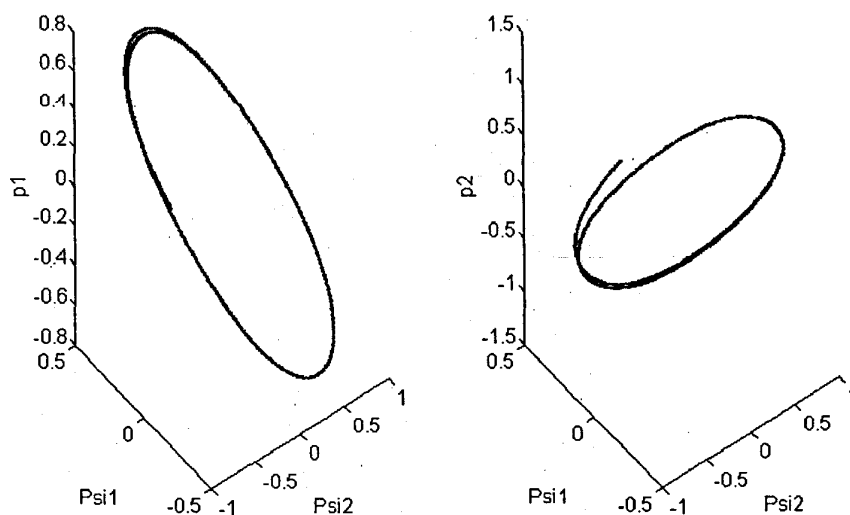


Figura 1.31

El Ciclo Límite en Tres Dimensiones. $\tau=1.5$. $n=2000$ iteraciones

1.2.4. Variedad Central y Reducción de la Dimensión Efectiva

Una vez comprobado que el sistema posee órbitas cerradas en las proximidades del punto de bifurcación, es interesante estudiar la estabilidad de las mismas. Para ello es necesario reducir la dimensión efectiva del sistema (1.2.7) restringiéndolo a una *variedad central* (Guckenheimer y Holmes, 1983). Aproximando mediante el desarrollo de Taylor las funciones $k_1(\Psi_1 - \Psi_2)$ y $k_2(\Psi_2 - \Psi_1)$ obtenidas de (1.2.8), el sistema de ecuaciones diferenciales (1.2.7) puede aproximarse

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + b_1\Psi_1 - b_1\Psi_2 - \frac{b_1}{3}(\Psi_1 - \Psi_2)^3 \\ \dot{p}_2 &= a_{21}p_1 - a_{22}p_2 - b_2\Psi_1 + b_2\Psi_2 + \frac{b_2}{3}(\Psi_1 - \Psi_2)^3 \\ \dot{\Psi}_1 &= -\frac{a_{11}}{\tau}p_1 + \frac{a_{12}}{\tau}p_2 + \frac{b_1 - 1}{\tau}\Psi_1 - \frac{b_1}{\tau}\Psi_2 - \frac{b_1}{3\tau}(\Psi_1 - \Psi_2)^3 \\ \dot{\Psi}_2 &= \frac{a_{21}}{\tau}p_1 - \frac{a_{22}}{\tau}p_2 - \frac{b_2}{\tau}\Psi_1 + \frac{b_2 - 1}{\tau}\Psi_2 + \frac{b_2}{3\tau}(\Psi_1 - \Psi_2)^3 \end{aligned}$$

en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{\Psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \end{pmatrix} = J_E \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} (\Psi_1 - \Psi_2)^3 \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_2 \\ -\frac{b_1}{\tau} \\ \frac{b_2}{\tau} \end{pmatrix}$$

Siendo los autovalores de la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio J_E : $\lambda_1 = -\frac{1}{\tau}$; $\lambda_2 = -\gamma$; $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\delta}i$ en el punto de bifurcación, construimos la matriz de paso P formada por los autovectores generados por cada autovalor

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \gamma\tau-1 & 1+\sqrt{\delta}\tau i & 1-\sqrt{\delta}\tau i \\ 0 & (\gamma\tau-1)C_{\lambda_2} & (1+\sqrt{\delta}\tau i)C_{\lambda_3} & (1-\sqrt{\delta}\tau i)\bar{C}_{\lambda_3} \\ 1 & \gamma & \sqrt{\delta}i & -\sqrt{\delta}i \\ 1 & \gamma C_{\lambda_2} & \sqrt{\delta}C_{\lambda_3}i & -\sqrt{\delta}\bar{C}_{\lambda_3}i \end{bmatrix}$$

siendo

$$C_{\lambda_2} = \frac{(a_{11}-\gamma)(1-\gamma\tau)+b_1\gamma}{a_{12}(1-\gamma\tau) \cdot b_1\gamma}$$

$$C_{\lambda_3} = \frac{a_{12}(a_{11}-\delta\tau)+\delta(a_{11}\tau-b_1+1)(a_{12}\tau-b_1)}{a_{12}^2+\delta(a_{12}\tau-b_1)^2} + \frac{\sqrt{\delta}a_{12}(a_{11}\tau-b_1+1)-(a_{11}-\delta\tau)(a_{12}\tau-b_1)}{a_{12}^2+\delta(a_{12}\tau-b_1)^2} i$$

y donde \bar{C}_{λ_3} es el conjugado de C_{λ_3} . Efectuando el cambio

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\Psi_1 = x_1 + \gamma x_2 + \sqrt{\delta}(y_1 - y_2)i$$

$$\Psi_2 = x_1 + \gamma x_2 C_{\lambda_2} + \sqrt{\delta}(C_{\lambda_3} y_1 - \bar{C}_{\lambda_3} y_2)i$$

y en consecuencia

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \gamma(1 - C_{\lambda_2})x_2 + \sqrt{\delta} [(1 - C_{\lambda_3})y_1 - (1 - \bar{C}_{\lambda_3})y_2]i = C_2x_2 + (C_3y_1 - \bar{C}_3y_2)i$$

donde $C_2 = \gamma(1 - C_{\lambda_2}) \in \mathbb{R}$ y $C_3 = \sqrt{\delta}(1 - C_{\lambda_3}) \in \mathbb{C}$ y siendo \bar{C}_3 el conjugado de C_3 , por tanto

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} [C_2x_2 + (C_3y_1 - \bar{C}_3y_2)i]^3 P^{-1} \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_2 \\ -\frac{b_1}{\tau} \\ \frac{b_2}{\tau} \end{pmatrix}$$

siendo $P^{-1}J_E P = \text{diag}(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2)$. Llamando ahora para simplificar

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_2 \\ -\frac{b_1}{\tau} \\ \frac{b_2}{\tau} \end{pmatrix}$$

el sistema no lineal de dimensión cuatro puede escribirse

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} [C_2 x_2 + (C_3 y_1 - \bar{C}_3 y_2) i]^3 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.13a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} [C_2 x_2 + (C_3 y_1 - \bar{C}_3 y_2) i]^3 \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.13b)$$

donde la matriz $\text{diag}(\lambda_3, \lambda_4)$ tiene autovalores complejos conjugados con parte real cero y la matriz $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ tiene autovalores reales negativos, por lo que el sistema asume implícitamente que la variedad inestable es vacía. El teorema de la variedad central garantiza que existe una variedad central para el sistema (1.2.13), pero puede no ser necesariamente única (Lorenz, 1993).

Supongamos que la variedad central puede ser descrita por un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + c_4 x_1^4 + O(x_1^5) \\ d_2 x_2^2 + d_3 x_2^3 + d_4 x_2^4 + O(x_2^5) \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

donde $O(x_i^5)$, $i=1,2$ incluye todos los términos de grado mayor o igual que cinco. Derivando la expresión (1.2.14), es posible estudiar el comportamiento en las proximidades del punto fijo con la ayuda del sistema dinámico bidimensional

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2c_2x_1+3c_3x_1^2+4c_4x_1^3+O(x_1^4)] x_1 \\ [2d_2x_2+3d_3x_2^2+4d_4x_2^3+O(x_2^4)] x_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

Así el sistema original (1.2.13) queda de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}[C_2x_2+[C_3(c_2x_1^2+c_3x_1^3+c_4x_1^4+\dots)-\bar{C}_3(d_2x_2^2+d_3x_2^3+d_4x_2^4+\dots))]i]^3 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2x_1^2+c_3x_1^3+\dots \\ d_2x_2^2+d_3x_2^3+\dots \end{pmatrix} + \frac{1}{3}[C_2x_2+[C_3(c_2x_1^2+c_3x_1^3+c_4x_1^4+\dots)-\bar{C}_3(d_2x_2^2+d_3x_2^3+d_4x_2^4+\dots))]i]^3 \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta (1.2.15), resulta

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_3c_2x_1^2+3\lambda_3c_3x_1^3+O(x_{1,2}^4) \\ 2\lambda_4d_2x_2^2+3\lambda_4d_3x_2^3+O(x_{1,2}^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1c_2x_1^2+\lambda_1c_3x_1^3+\frac{B_1}{3}C_2^3x_2^3+O(x_{1,2}^4) \\ \lambda_2d_2x_2^2+\lambda_2d_3x_2^3+\frac{B_2}{3}C_2^3x_2^3+O(x_{1,2}^4) \end{pmatrix}$$

Identificando coeficientes término a término, se obtiene $c_2=0$; $c_3=0$; $d_2=0$; $d_3=B_2C_2^3/3(3\lambda_4-\lambda_2)$, por lo que la variedad central puede aproximarse por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B_2 C_2^3}{3(3\lambda_4 - \lambda_2)} x_2^3 \end{pmatrix}$$

siendo el movimiento sobre la variedad descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left[C_2 x_2 - \frac{B_2 C_2^3 \bar{C}_3}{3(3\lambda_4 - \lambda_2)} x_2^3 \right]^3 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

de donde resulta el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_3 x_1 + \frac{A_1 C_2^3}{3} x_2^3 + O(x_2^4) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_4 x_2 + \frac{A_2 C_2^3}{3} x_2^3 + O(x_2^4) \end{aligned}$$

en el cual despreciamos los términos de orden superior a tres, por lo que se considera finalmente que la variedad central está determinada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_3 x_1 + \frac{A_1 C_2^3}{3} x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_4 x_2 + \frac{A_2 C_2^3}{3} x_2^3 \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

donde $C_2 \in \mathbf{R}$ y A_1 y A_2 son complejos conjugados. El origen es un punto de equilibrio del sistema; el jacobiano en el punto de equilibrio tiene traza nula y determinante positivo, por tanto el origen es un centro.

Teniendo en cuenta que en el sistema de ecuaciones diferenciales resultante que define a la variedad central (1.2.16) las dos ecuaciones son conjugadas una de la otra, ya que x_1 y x_2 son complejos conjugados, es posible reducir el sistema a una sola ecuación. Sea por tanto $x_1 = x + yi$, $y_1 = x - yi$; $A_1 = m + ni$, $A_2 = m - ni$; por lo que la primera de las ecuaciones del sistema (1.2.16) resulta

$$\dot{x} + y\dot{i} = \sqrt{\delta} i(x + yi) + \frac{C_2^3}{3}(m + ni)(x - yi)^3$$

Identificando ahora parte real y parte imaginaria se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales real

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sqrt{\delta}y + \frac{C_2^3}{3}[mx(x^2 - 3y^2) - ny(y^2 - 3x^2)] \\ \dot{y} &= \sqrt{\delta}x + \frac{C_2^3}{3}[nx(x^2 - 3y^2) + my(y^2 - 3x^2)]\end{aligned}$$

en su forma matricial

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\delta} \\ \sqrt{\delta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{C_2^3}{3} \begin{pmatrix} mx^3 + 3nx^2y - 3mxy^2 - ny^3 \\ nx^3 - 3mx^2y - 3nxy^2 + my^3 \end{pmatrix} \\ &= L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{C_2^3}{3} g(x, y)\end{aligned}$$

El sistema dinámico así descrito se dice que está en su *forma normal*. Las propiedades de estabilidad de las órbitas cerradas dependen de los términos no lineales de $g(x, y)$, ya que en la bifurcación de Hopf las partes reales de los autovalores de la matriz jacobiana en el punto de bifurcación son nulas. Es posible

demostrar (Guckenheimer y Holmes, 1983), que la estabilidad del ciclo límite depende de las derivadas de tercer orden de la función no lineal $g(x,y)$. Considerando la expresión

$$X = \frac{1}{16}(g_{xxx}^1 + g_{xyy}^1 + g_{xxy}^2 + g_{yyy}^2) + \frac{1}{16\sqrt{\delta}}(g_{xy}^1(g_{xx}^1 + g_{yy}^1) - g_{xy}^2(g_{xx}^2 + g_{yy}^2) - g_{xx}^1 g_{xx}^2 + g_{yy}^1 g_{yy}^2)$$

con $g(x,y) = (g^1(x,y), g^2(x,y))^T$ y donde los subíndices denotan las derivadas parciales con respecto a los argumentos x e y , respectivamente. El ciclo límite es estable si $X < 0$ e inestable si $X > 0$. Siendo

$$\begin{aligned} g^1(x,y) &= mx^3 + 3nx^2y - 3mxy^2 - ny^3 \\ g^2(x,y) &= nx^3 - 3mx^2y - 3nxy^2 + my^3 \end{aligned}$$

las derivadas parciales son

$$\begin{aligned} g_{xx}^1 &= 6(mx + ny); & g_{xy}^1 &= 6(nx - my); & g_{yy}^1 &= -6(mx + ny) \\ g_{xx}^2 &= 6(nx - my); & g_{xy}^2 &= -6(mx + ny); & g_{yy}^2 &= -6(nx - my) \\ g_{xxx}^1 &= 6m; & g_{xyy}^1 &= -6m; & g_{xxy}^2 &= -6m; & g_{yyy}^2 &= 6m \end{aligned}$$

de donde se deduce que $X = 0$ y por tanto el criterio no nos permite asegurar la estabilidad de las órbitas, no obstante las simulaciones numéricas que hemos realizado (Figura 1.31) nos muestran la estabilidad de las mismas.

1.2.5. Estudio del Caso $\tau \rightarrow 0$

El modelo dinámico que estamos considerando permite oscilaciones en las cuatro variables estado. Es interesante investigar qué ocurre en el sistema cuando el *coeficiente de ajuste* ($1/\tau$) es muy grande. Esta suposición se justifica en los mercados bien organizados, como son los mercados de valores, que disponen de un flujo de información continua y que reaccionan mucho más rápidamente al desequilibrio que otros. La principal consecuencia de esta suposición reside en el hecho de que la dimensión efectiva del sistema puede ser reducida con este procedimiento.

Si el tiempo de retardo en la formación de expectativas chartista tiende a cero, las ecuaciones (1.2.7c) y (1.2.7d) quedan de la forma

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_{12}p_2 + k_1(\Psi_1 - \Psi_2) - \Psi_1}{a_{11}} = f_1(p_2, \Psi_1, \Psi_2) \\ p_2 &= \frac{a_{21}p_1 + k_2(\Psi_2 - \Psi_1) - \Psi_2}{a_{22}} = f_2(p_1, \Psi_1, \Psi_2) \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

y sustituyendo en las ecuaciones (1.2.7a) y (1.2.7b) resulta

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \Psi_1 \\ \dot{p}_2 &= \Psi_2 \end{aligned}$$

por tanto, el movimiento dinámico está gobernado por las curvas

$$\begin{aligned} p_1 &= f_1(p_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2) \\ p_2 &= f_2(p_1, \dot{p}_1, \dot{p}_2) \end{aligned}$$

obteniendo dos ecuaciones de movimiento para las variables estado p_1 y p_2 . Operando ahora en las ecuaciones (1.2.17), resulta

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{a_{22}[k_1(\Psi_1 - \Psi_2) - \Psi_1] + a_{12}[k_2(\Psi_2 - \Psi_1) - \Psi_2]}{A} \\
 p_2 &= \frac{a_{21}[k_1(\Psi_1 - \Psi_2) - \Psi_1] + a_{11}[k_2(\Psi_2 - \Psi_1) - \Psi_2]}{A}
 \end{aligned}
 \tag{1.2.18}$$

Centraremos el estudio en la primera de las ecuaciones (1.2.18). De esta forma vamos a analizar el comportamiento del precio del primer activo cuando están interactuando las expectativas chartistas sobre el precio de los dos activos conjuntamente. Este análisis resultaría similar, por la estructura de las ecuaciones (1.2.18), en caso de haberse elegido la segunda de las ecuaciones. Teniendo en cuenta las expresiones analíticas de las funciones k_1 y k_2 , deducidas de (1.2.8), y la relación que existe entre ellas: $k_2 = (-b_2 / b_1) k_1$, podemos expresar la primera de las ecuaciones de (1.2.18) de la forma

$$p_1 = \frac{(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)k_1(\Psi_1 - \Psi_2) - b_1(a_{22}\Psi_1 + a_{12}\Psi_2)}{Ab_1}
 \tag{1.2.19}$$

cuya representación gráfica, considerando los coeficientes $a_{ij} < 1$, y $b_i > 1$, $i, j=1, 2$ se ilustra en la Figura 1.32. En este caso el origen es inestable.

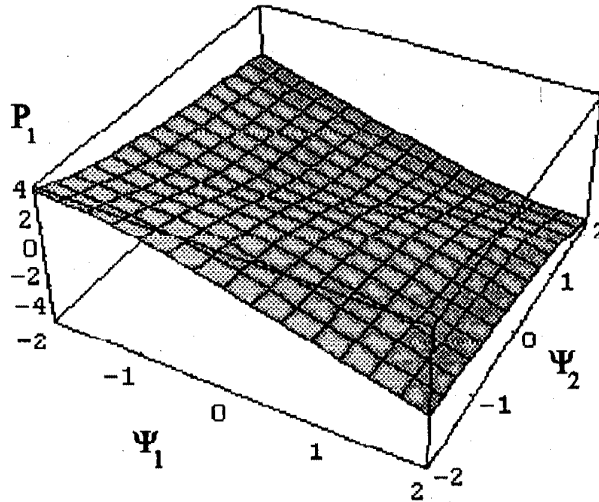


Figura 1.32

Todo el movimiento fluye a lo largo de la variedad descrita por la Figura 1.32. Si seccionamos la variedad por el plano $\Psi_1 = -\Psi_2$, se obtiene la curva

$$p_1 = \frac{(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)k_1(2\Psi_1) - b_1(a_{22} - a_{12})\Psi_1}{Ab_1} = F(\Psi_1) \quad (1.2.20)$$

que por ser $a_{22} > a_{12}$, el coeficiente de $k_1(2\Psi_1)$ es positivo, y el coeficiente de Ψ_1 es negativo, por tanto es creciente en el origen y tiene un máximo y un mínimo. Con el objeto de calcular éstos valores y sin pérdida de generalidad supondremos $b_1 = b_2$. La ecuación (1.2.20) toma la forma

$$p_1 = \frac{(a_{22} - a_{12})}{A} [k_1(2\Psi_1) - \Psi_1] = F_1(\Psi_1) \quad (1.2.21)$$

por tanto

$$F'_1(\Psi_1) = \frac{(a_{22} - a_{12})}{A} [2k'_1(2\Psi_1) - 1]$$

se observa que la función es creciente en el origen ya que $k'_1(0) = b_1 > 1$. Los puntos críticos serán entonces las soluciones de la ecuación $2k'_1(2\Psi_1) = 1$, esto es

$$\Psi_1 = \frac{1}{4} \text{Ln} \left[(4b_1 - 1) \pm 2\sqrt{2b_1(2b_1 - 1)} \right] \quad (1.2.22)$$

que constituyen el mínimo A y el máximo C de la función F_1 de la Figura 1.33.

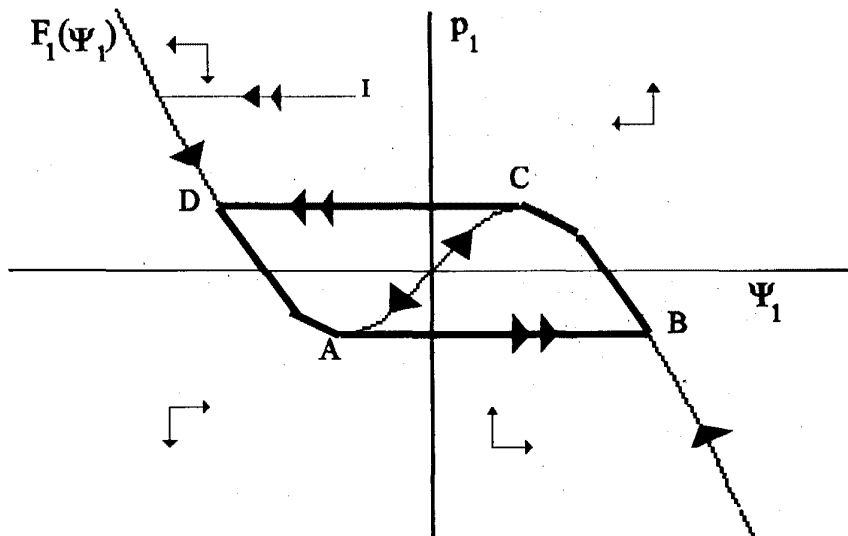


Figura 1.33

El Ciclo Límite Rápido-Lento

Observamos en la Figura 1.33 que el movimiento de una trayectoria particular sobre el plano (Ψ_1, p_1) , en el caso $b_1 > 1$, se concentra a lo largo de la curva $F_1(\Psi_1)$,

siendo el origen inestable. Todo el movimiento fluye hacia los puntos A y C de la curva pero el movimiento no es estacionario porque no son puntos de equilibrio. Si consideramos un punto inicial I cualquiera, cuando $\tau \rightarrow 0$, la variable Ψ_1 se mueve a una gran velocidad ($\dot{\Psi}_1 \rightarrow \infty$) y casi horizontalmente (el movimiento es horizontal e instantáneo cuando $\tau = 0$) hacia la curva $F_1(\Psi_1)$. La trayectoria se mueve lentamente hacia el punto A, desde el cual salta horizontalmente y otra vez a una gran velocidad hacia la otra rama de la curva $F_1(\Psi_1)$, desde donde se desplaza hacia el máximo C, reiniciándose otra vez el mismo movimiento. Esto da lugar a un ciclo límite ABCD llamado rápido- lento por tener ambas dinámicas en la misma órbita. La amplitud del ciclo viene dada por los valores máximo y mínimo de la curva indicados en la expresión (1.2.22).

Con el fin de obtener una idea del posible movimiento que se produce sobre la variedad obtenida de la ecuación (1.2.19), observamos que la variedad es creciente en el origen y simétrica respecto del plano $\Psi_1 = -\Psi_2$, conteniendo a una recta de máximos y a una recta de mínimos, siendo el origen el único punto de equilibrio. Si $b < 1$ el movimiento sería a lo largo de la variedad hacia el origen, que en este caso es estable. La dinámica resulta más interesante en el caso $b > 1$, todo el movimiento fluye hacia la variedad y desde allí hacia la línea de máximos y la línea de mínimos, pero el movimiento no puede estacionarse en ninguno de los puntos de dichas líneas ya que éstos no son puntos de equilibrio. Es necesario imponer alguna hipótesis de salto para que los puntos que se encuentren en la línea de máximos pasen desde allí hasta la otra cara de la variedad desde donde caerán hasta la línea de mínimos, volviendo a saltar de nuevo hacia la otra parte de la variedad y así sucesivamente.

En la Figura 1.34, y para el caso particular $\tau \rightarrow 0$, se observa que dado un punto inicial I el movimiento fluye muy rápidamente hasta la variedad, y desde allí la

trayectoria se desplaza hasta que encuentra un máximo C de la línea de máximos de la variedad. El movimiento no puede estacionarse en C ni desplazarse hacia el origen que es inestable. De esta forma y bajo la influencia de las ecuaciones (1.2.7c,d), cuando $\tau \rightarrow 0$, ocurre que $\dot{\Psi}_1 \rightarrow \infty$ y $\dot{\Psi}_2 \rightarrow \infty$; por tanto, la trayectoria salta muy rápidamente hacia la otra cara de la variedad encontrando un punto D de la misma y desplazándose lentamente por la variedad hasta que encuentra un mínimo A de la línea de mínimos. De la misma forma, la trayectoria, al no poder estacionarse en A ni tampoco dirigirse hacia el origen que la repele, vuelve a saltar por debajo de la variedad hasta encontrar un punto B de la misma, para seguidamente desplazarse lentamente por la variedad y encontrar un punto C de la línea de máximos, por lo que el movimiento vuelve a repetirse.

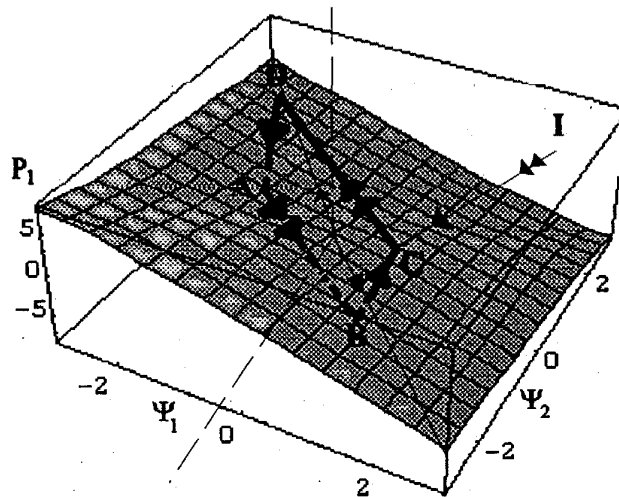


Figura 1.34

El Ciclo Límite Rápido-Lento en Tres Dimensiones

Estos resultados están avalados por las simulaciones numéricas que hemos realizado cuando el tiempo de respuesta chartista es muy bajo, concretamente para el valor $\tau = .01$, y que se muestran en las Figuras 1.35 y 1.36. En la parte superior de la Figura 1.35 podemos observar el ciclo límite rápido-lento cuando actúa el precio del primer activo p_1 frente a la expectativa chartista del primer activo Ψ_1 (cuya dinámica hemos explicado con la Figura 1.33). En las gráficas inferiores se indican las trayectorias temporales de p_1 y Ψ_1 , respectivamente; se observa cómo la trayectoria del precio muestra cambios abruptos mientras que a lo largo de toda la trayectoria de la expectativa chartista se van produciendo saltos.

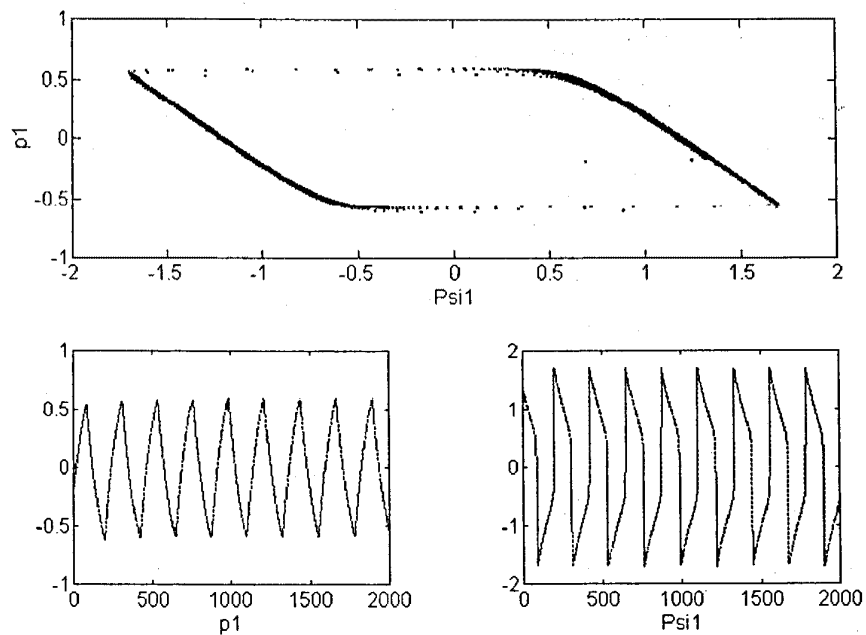


Figura 1.35

En la figura superior se observa el ciclo límite rápido-lento para el primer activo. En las figuras inferiores se muestran sus trayectorias temporales. $\tau = .01$, $n = 2000$ iteraciones.

En la parte izquierda de la Figura 1.36 se muestra, en las mismas condiciones en que se ha realizado la simulación previa, el ciclo límite rápido-lento cuando actúa el precio del primer activo frente a las dos expectativas chartistas. En los tres gráficos de la parte derecha están las trayectorias temporales del precio y de ambas expectativas chartistas que muestran la característica similar de venir determinadas por saltos bruscos.

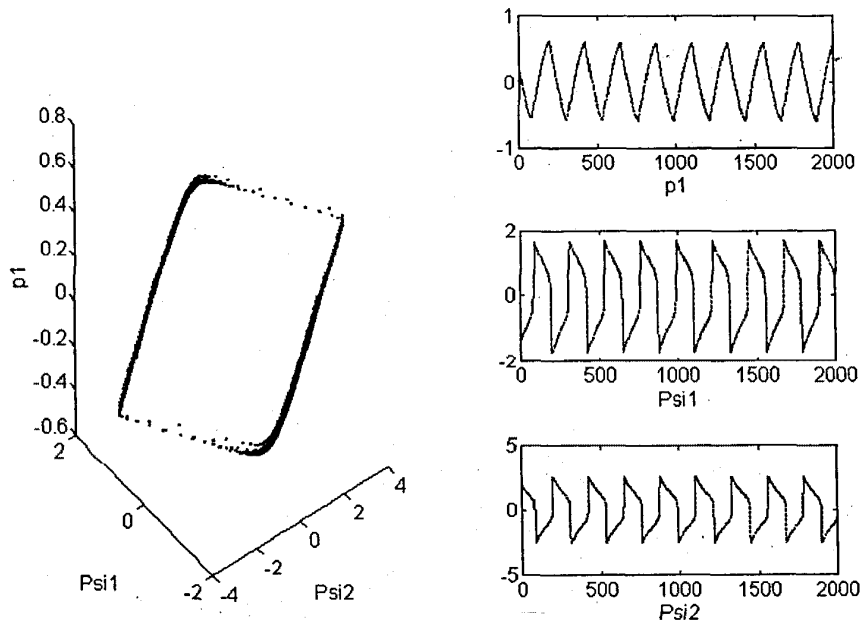


Figura 1.36

Simulación del Ciclo Límite Rápido-Lento en Tres Dimensiones.

En los gráficos de la derecha se muestran las trayectorias temporales del precio del primer activo y de las expectativas chartistas de los dos activos considerados. $\tau = .01$, $n = 2000$ iteraciones.

1.2.6. Discretización del Modelo: Aparición del Movimiento Caótico

El análisis del modelo especulativo en tiempo continuo cuando actúan dos activos ha revelado un comportamiento similar al deducido por Chiarella (1992) cuando sólo actúa un activo. El modelo de fundamentalistas y chartistas presenta una convergencia hacia el precio de equilibrio intertemporal walrasiano (el equilibrio es local y asintóticamente estable) y muestra también fluctuaciones de ciclo límite alrededor del precio de equilibrio (el equilibrio es local y asintóticamente inestable). En esta sección vamos a discretizar el modelo continuo de cuatro ecuaciones con el fin de detectar la posibilidad de que la interacción dinámica de fundamentalistas y chartistas, cuando actúan dos activos, presente también un comportamiento caótico.

Discretizamos por tanto el sistema de ecuaciones (1.2.7) haciendo $\dot{p}_i = p_{i,t+1} - p_{i,t}$, $\dot{\Psi}_i = \Psi_{i,t+1} - \Psi_{i,t}$, $i = 1, 2$

$$p_{1,t+1} = (1 - a_{11}) p_{1,t} + a_{12} p_{2,t} + k_1 (\Psi_{1,t} - \Psi_{2,t}) \quad (1.2.23a)$$

$$p_{2,t+1} = a_{21} p_{1,t} + (1 - a_{22}) p_{2,t} + k_2 (\Psi_{2,t} - \Psi_{1,t}) \quad (1.2.23b)$$

$$\tau \Psi_{1,t+1} = -a_{11} p_{1,t} + a_{12} p_{2,t} + (\tau - 1) \Psi_{1,t} + k_1 (\Psi_{1,t} - \Psi_{2,t}) \quad (1.2.23c)$$

$$\tau \Psi_{2,t+1} = a_{21} p_{1,t} - a_{22} p_{2,t} + (\tau - 1) \Psi_{2,t} + k_2 (\Psi_{2,t} - \Psi_{1,t}) \quad (1.2.23d)$$

donde las funciones k_1 y k_2 son las descritas por las expresiones (1.2.8). Aceptando el hecho (ya comprobado en la discretización del sistema de dos ecuaciones) que el rango de parámetros donde el comportamiento se vuelve caótico resulta ser cuando los parámetros de impacto fundamentalista son pequeños: $a_{ij} < 1$, $i, j = 1, 2$; los parámetros de impacto chartista son grandes: $b_i > 1$, $i = 1, 2$; y cuando el tiempo de respuesta chartista tiende a cero: $\tau \rightarrow 0$, hemos realizado con el sistema discreto algunas simulaciones que nos avalen esta tesis.

Dada la estructura de las ecuaciones (1.2.23), nuestro estudio está basado en analizar el comportamiento del activo 1 dado que el segundo de los activos tendría una estructura similar. Los valores de los parámetros para las primeras simulaciones realizadas son $a_{11} = .6$; $a_{12} = .2$; $a_{21} = .4$; $a_{22} = .7$; $b_1 = 1.2$; $b_2 = 1.7$; haciendo variar el parámetro τ .

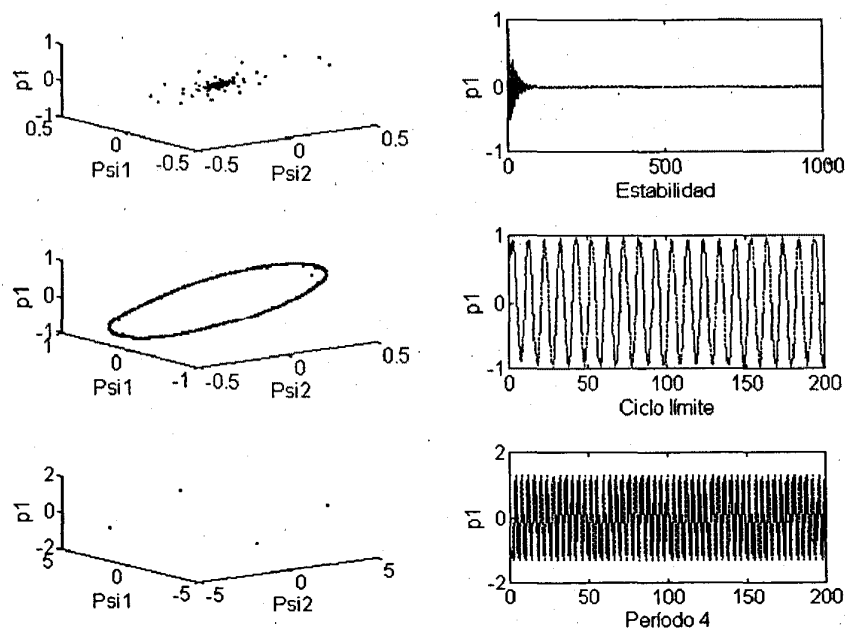


Figura 1.37

La primera columna muestra el comportamiento del primer activo cuando están interactuando las expectativas chartistas de los dos activos conjuntamente. La segunda columna indica la trayectoria temporal del precio del primer activo. De arriba a abajo, el tiempo de respuesta chartista toma los valores $\tau = 3.3$, 2.5 y $.7$

Así, en la primera columna de la Figura 1.37 se observa cómo varía el espacio de fase del precio del primer activo cuando están interactuando las expectativas chartistas de los dos activos conjuntamente. La segunda columna muestra la trayectoria temporal del precio del primer activo a medida que el tiempo de retardo disminuye. Para un valor de $\tau = 3.3$, la trayectoria converge hacia el precio de equilibrio. Si disminuye el valor del tiempo de respuesta chartista $\tau = 2.5$, aparecen fluctuaciones de ciclo límite alrededor del precio de equilibrio. Si seguimos bajando τ , la trayectoria se vuelve periódica con ciclos de período arbitrario. Pero lo que más perdura son trayectorias de período cuatro, como se muestra en la última fila de la Figura 1.37.

Las observaciones se vuelven más interesantes cuando los parámetros que miden la respuesta fundamentalista son muy pequeños: $a_{ij} \ll 1$, $i, j = 1, 2$; tal y como ocurre en el modelo discreto cuando sólo interviene un activo. En las simulaciones sucesivas: $a_{11} = .06$; $a_{12} = .02$; $a_{21} = .04$; $a_{22} = .07$; $b_1 = 1.2$; $b_2 = 1.7$. En este caso, y cuando disminuye el tiempo de retardo, el modelo pasa de ser estable a fluctuar alrededor del precio de equilibrio. A medida que τ sigue disminuyendo, el ciclo límite se convierte en un ciclo rápido-lento, permaneciendo todas las propiedades que caracterizan a los mismos. Por último, el sistema se vuelve caótico concentrándose en un atractor extraño.

En la Figura 1.38 se observa que el ciclo límite se vuelve del tipo rápido-lento para $\tau = .9$. La trayectoria temporal del precio tiene la característica de poseer cambios abruptos en su estructura, mientras que las trayectorias temporales de las expectativas chartistas con respecto al precio de los dos activos, Ψ_1 y Ψ_2 , presentan grandes saltos.

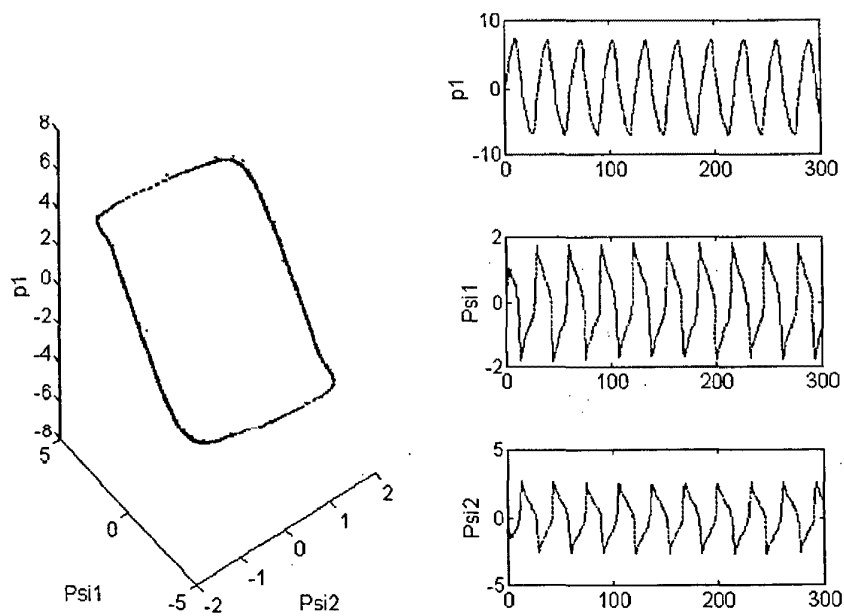


Figura 1.38

El Ciclo Límite Rápido-Lento en el Modelo Discreto cuando $\tau = .9$

Si seguimos disminuyendo el valor de τ , el precio del activo sigue manteniendo una estructura similar, pero las trayectorias de Ψ_1 y Ψ_2 se vuelven caóticas. La Figura 1.39 muestra en la fila superior la trayectoria temporal del precio del primer activo y su correspondiente espacio de fase cuando $\tau = .5$; la segunda fila presenta el mismo análisis para la expectativa chartista Ψ_1 , con respecto al primer activo.

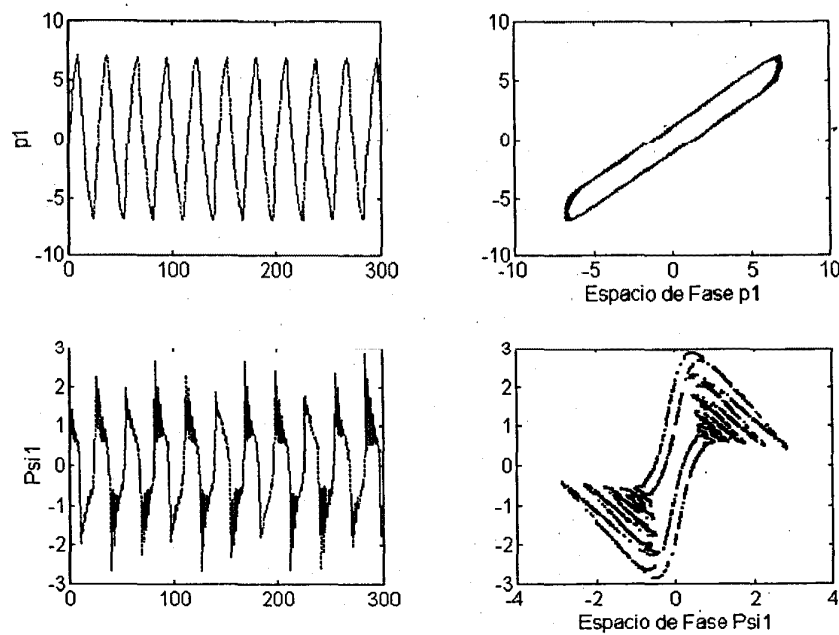


Figura 1.39

Análisis de la trayectoria temporal del precio del primer activo p_1 y de la expectativa chartista Ψ_1 con sus correspondientes espacios de fase cuando el tiempo de respuesta chartista es pequeño $\tau = .5$

Si consideramos primero el precio del activo 1 frente a la expectativa chartista del activo 1, observamos en la Figura 1.40 el comportamiento del sistema para el primero de los activos (el segundo muestra un comportamiento similar).

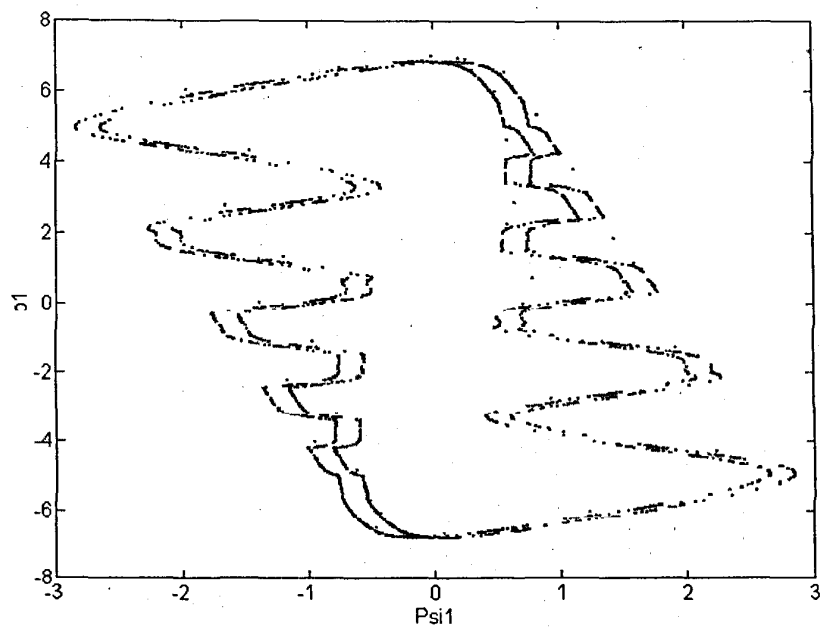


Figura 1.40

Atractor Caótico del Sistema para el Activo 1. (n = 10.000 iteraciones)

La Figura 1.41 muestra el atractor caótico cuando están interactuando el precio del primer activo frente a las expectativas chartistas de los dos activos conjuntamente. En la Figura 1.42 podemos observar la formación del atractor cuando aumenta el número de iteraciones.

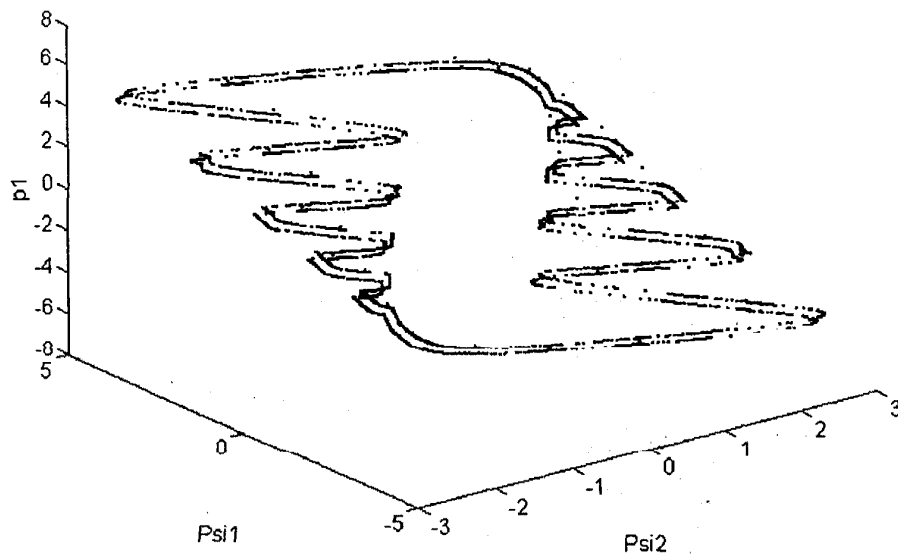


Figura 1.41

Atractor Extraño cuando estan interactuando el precio del primer activo frente a las expectativas chartistas de los dos activos conjuntamente. (n = 10.000 iteraciones)

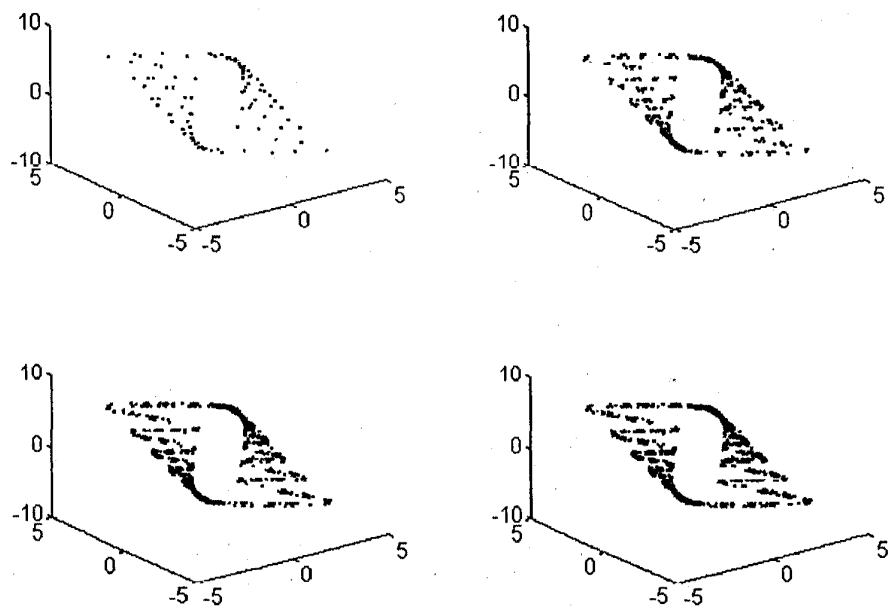


Figura 1.41

Formación del Atractor Caótico en Tres Dimensiones cuando el número de iteraciones aumenta, $n = 100, 500, 1000$ y 2000 respectivamente

1.2.7. A Modo de Síntesis

Al aumentar la dimensión en el modelo especulativo en tiempo continuo de fundamentalistas y chartistas [Ecuaciones (1.2.7)], considerando un mercado con dos activos, no se modifica la dinámica que Chiarella (1992) obtenía para el caso de un solo activo. En este sentido, la generalización del modelo continuo a diversos activos no enriquece esencialmente la dinámica original.

El modelo continuo con dos activos presenta una convergencia hacia el precio de equilibrio intertemporal walrasiano, revelando también comportamientos de ciclos límites en tres dimensiones alrededor del equilibrio cuando están interactuando el precio de un activo y las expectativas chartistas de todos los activos conjuntamente. Esto indica la posibilidad del movimiento de los precios fuera del equilibrio, apareciendo posibles burbujas especulativas cuando la influencia de la demanda chartista es mayor que la demanda fundamentalista, y cuando los chartistas revisan sus estimaciones de la tendencia del precio a gran velocidad.

En los mercados eficientes, la nueva información se absorbe rápidamente y es comprendida de forma inmediata por los agentes de modo que se incorpora casi instantáneamente a los precios del mercado. En nuestro modelo continuo con dos activos, en la medida en que la velocidad de ajuste de las expectativas chartistas sea muy rápida, se abre la posibilidad de que aparezcan comportamientos del tipo variedad rápido-lenta en tres dimensiones. Este tipo de dinámica se caracteriza por saltos muy abruptos, tanto en el comportamiento de los precios del mercado como en las expectativas de los agentes. La dinámica de la variedad rápido-lenta parece por tanto una buena descripción de un mercado real en momentos de incertidumbre y alta volatilidad como los ocurridos en octubre de 1929 o en octubre de 1987. Es de resaltar que las variaciones abruptas y la alta inestabilidad se

deben a factores puramente especulativos y por tanto propiamente intrínsecos del mercado, como son la velocidad de ajuste y formación de expectativas.

No hemos detectado comportamiento caótico en el modelo continuo con dos activos. Sin embargo, al discretizar el sistema, nuestras simulaciones nos han permitido observar la presencia de caos determinista, concentrándose la trayectoria en un nuevo atractor extraño en el espacio tridimensional obtenido a partir del precio de cada activo frente a las dos expectativas chartistas.

Capítulo 2

CAPITULO 2

CONTRASTACIONES EMPIRICAS

2.1. Introducción

En este capítulo pretendemos contrastar empíricamente la actividad chartista y sus efectos dentro de los mercados financieros.

El chartismo o análisis técnico, como forma de especulación, parte como premisa básica de la existencia de diversos procesos de memoria dentro de las series financieras. La teoría de Dow considera tres tipos de movimientos o tendencias en las cotizaciones bursátiles. El primero con una duración aproximada entre nueve y dieciocho meses, el segundo entre una y ocho semanas y por último, movimientos diarios fruto de la oferta y la demanda que se superponen a los anteriores. Los chartistas han ido igualmente, a lo largo de su historia, formulando multitud de reglas de mercado basadas en el comportamiento de las cotizaciones de períodos anteriores. El empleo de reglas chartistas abre, pretendidamente, la posibilidad de obtener rendimientos superiores a los normales en las inversiones.

El conjunto de reglas chartistas apunta hacia una doble hipótesis sobre las series temporales de precios en los mercados financieros. Por un lado, en las cotizaciones se mezclan diversos procesos de memoria a largo plazo que darían lugar a la existencia de algún tipo de comportamiento cíclico; por otro, persisten diversos patrones de comportamiento, predecibles a corto plazo, en las citadas series temporales.

Intentaremos contrastar la presencia de procesos de memoria a largo plazo por medio del Análisis de Fourier. Como la utilización de estas técnicas espectrales sólo revelan la presencia de ciclos periódicos dentro de las series, emplearemos también otro procedimiento conocido como análisis de rango reescalado (R/S) que posibilita la detección de ciclos no periódicos (Hurst, 1951).

Para contrastar la existencia de patrones de comportamiento emplearemos un procedimiento estadístico, típicamente no lineal: el test BDS (Brock, Dechet y Scheinkman, 1987). Igualmente estudiaremos la posibilidad de realizar predicciones, a corto plazo, sobre las series financieras por medio de predictores empleados habitualmente en las series generadas por procesos deterministas caóticos (Fernández-Rodríguez, 1992).

2.2. Espectros de Fourier

El Análisis Espectral se ha revelado como una herramienta particularmente útil para investigar el comportamiento periódico con pocas frecuencias en sistemas dinámicos de alta dimensión. El objetivo es tratar de descubrir componentes periódicas en una serie temporal expresando los datos como una combinación lineal

de funciones trigonométricas. Los picos en el espectro de potencias resultante son considerados como evidencia de comportamiento cíclico de la serie temporal analizada.

Granger (1966) fue el primero en intentar aplicar el análisis espectral a las series de mercados financieros. Buscando con ello alguna evidencia de comportamiento cíclico, identificó la forma típica del espectro de potencias de una serie económica discutiendo sus implicaciones. Granger y Hudghes (1971) encontraron un pico en la frecuencia de un ciclo de 13 años cuando analizaron la serie del índice de precios anuales del trigo. La serie que disponían cubría un período de 369 años, que es muy superior a la longitud de la mayoría de las conocidas en economía, a excepción de las series financieras.

Chatfield (1974) intentó nuevamente aplicar el análisis espectral a series de precios de mercado. Sus resultados fueron poco concluyentes pues las series resultaban demasiado cortas y las variaciones estacionales demasiado largas para dar resultados útiles mediante el análisis espectral. En sus conclusiones, Chatfield (1980) observa que series temporales de forma muy irregular pueden obtenerse como suma de senoides de diferentes frecuencias y amplitudes.

Si partimos de una serie temporal $x(t)$, podemos considerar la representación en el dominio de frecuencias $X(\omega)$, donde las unidades de ω vienen dadas por 1/tiempo. En definitiva, $X(\omega)$ es la *Transformada de Fourier* de la serie temporal original. Por otra parte, $x(t)$ puede ser considerada como la *Transformada Inversa de Fourier* de $X(\omega)$. Así:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

Un hecho importante proporcionado por el *Teorema de Parseval* es que el cuadrado de la amplitud, llamado usualmente potencia, es invariante bajo estas transformaciones. Esto es, verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

donde la primera parte de la igualdad indica la varianza total y la segunda expresa la potencia. El objetivo del Análisis Espectral es determinar la fracción de la varianza total explicada por las frecuencias en algún intervalo $[\omega, \omega + d\omega]$.

Esta teoría puede trasladarse de forma inmediata al caso discreto para aplicarla a las series temporales

Dada una serie temporal x_j , $j = 1, \dots, n$ de una única variable observada en instantes equidistantes del tiempo, la transformada de Fourier de la serie x_j se define

$$\bar{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x_j e^{-2\pi i j k/n}, \quad k=1, \dots, n$$

siendo $i^2 = -1$. La transformada de Fourier inversa x_j es ahora periódica $x_j = x_{j+n}$

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \bar{x}_k e^{-2\pi i j k / n}, \quad j = 1, \dots, n$$

Considerando la *Función de Autocorrelación* definida como

$$\Psi_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j x_{j+m}$$

siendo m el retardo entre los valores correlados; si aplicamos la transformada de Fourier y sustituimos el valor de x_j , la expresión anterior se transforma

$$\Psi_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\bar{x}_k|^2 \cos\left(\frac{2\pi m k}{n}\right)$$

cuya inversa (Bergé, Pomeau y Vidal, 1986) es

$$|\bar{x}_k|^2 = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Psi_m \cos\left(\frac{2\pi m k}{n}\right)$$

de esta forma, la función $|\bar{x}_k|^2$ es proporcional a la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. El gráfico de $|\bar{x}_k|^2$, que usualmente se indica como $I(\omega)$, frente a la frecuencia $\omega = 2\pi / n$, se le denomina *Espectro de Potencia*.

Un espectro de potencia puede ser considerado como la contribución de cada frecuencia al movimiento total de la serie temporal. Por ejemplo, si existe una componente no periódica en una serie dada, el espectro de potencia será una curva monótona suave con un pico en el origen (dependiendo del procedimiento estadístico particular la pendiente de la curva podrá ser diferente). Si existen frecuencias para las cuales los valores de $I(\omega)$ son significativamente más altos que otros, el análisis espectral indica la existencia de comportamiento periódico. La interpretación de los picos dependerá del concepto temporal que se tome como base.

Cuando el sistema dinámico viene formulado en tiempo continuo, un único pico en el espectro de potencia equivale a la existencia de una única órbita cerrada con la frecuencia correspondiente. Un espectro de potencia con varios picos distinguibles indica la existencia de comportamiento cuasi-periódico. Los picos dominantes indican las frecuencias inconmesurables básicas del movimiento, mientras que los picos menores son combinaciones lineales de las frecuencias básicas.

Si el sistema viene dado en tiempo discreto, un único pico corresponde a un ciclo de período 2, la aparición de dos picos adicionales, uno a la derecha y otro a la izquierda del primer pico, corresponde a un ciclo de período 4; generalizando esta idea, n picos corresponderán a un ciclo de período $n+1$. Un atractor en forma de ciclo límite presentará un espectro de potencias de funciones delta con pequeños ensanchamientos en sus bases debidos al carácter discreto de los datos. Si se presenta un continuo de picos se dice que el espectro de potencia refleja un *espectro de banda*

ancha, el movimiento puede ser aleatorio o caótico para los dos conceptos temporales. El espectro de potencias de un atractor extraño contiene claros picos agudos y bandas anchas. A medida que un atractor adquiere más complejidad, su espectro contiene picos menos pronunciados.

A modo de ejemplo, en la Figura 2.1 se puede observar la trayectoria de una serie temporal que contiene 1000 observaciones, y que hemos muestreado a partir de la función $X_t = \sin 2\pi t/100 + \sin 6\pi t/100 + \sin 10\pi t/100$. En esta serie se advierten ciclos periódicos en su estructura. El análisis de su espectro de Fourier realizado en la Figura 2.2 indica claramente la existencia de tres ciclos de frecuencias $1/100$, $3/100$ y $5/100$.

La trayectoria temporal de la serie de 2000 observaciones muestreada a partir de la variable x en el atractor de Lorenz está representada en la Figura 2.3. El espectro de Fourier de la serie diferenciada se muestra en la Figura 2.4, donde se observa la existencia de un pico dominante de baja frecuencia y una serie de picos menores que son combinaciones lineales de la frecuencia básica.

La Figura 2.5 muestra la trayectoria temporal del precio del modelo especulativo en tiempo discreto que hemos desarrollado, en el rango de parámetros donde hemos demostrado que el comportamiento del sistema es caótico (Cap.1 Secc.1.1.). Su espectro de Fourier para la serie una vez se ha tomado primeras diferencias se representa en la Figura 2.6, donde se observa la existencia de picos adicionales en las bajas frecuencias alrededor de un pico más dominante.

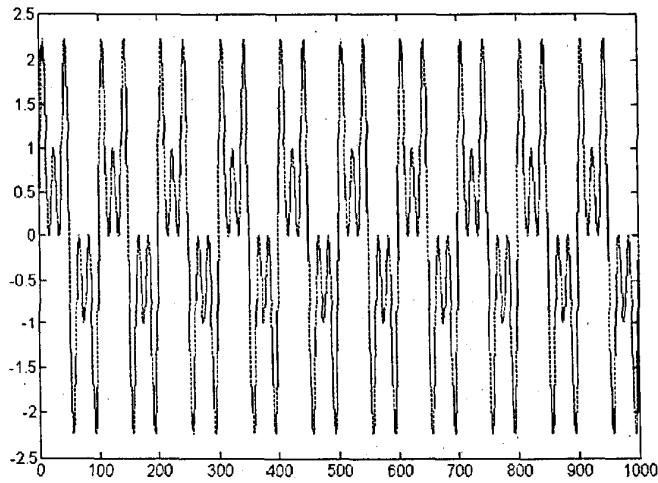


Figura 2.1
 Trayectoria Temporal de la Serie $X_t = \text{sen}2\pi/100 + \text{sen}6\pi/100 + \text{sen}10\pi/100$

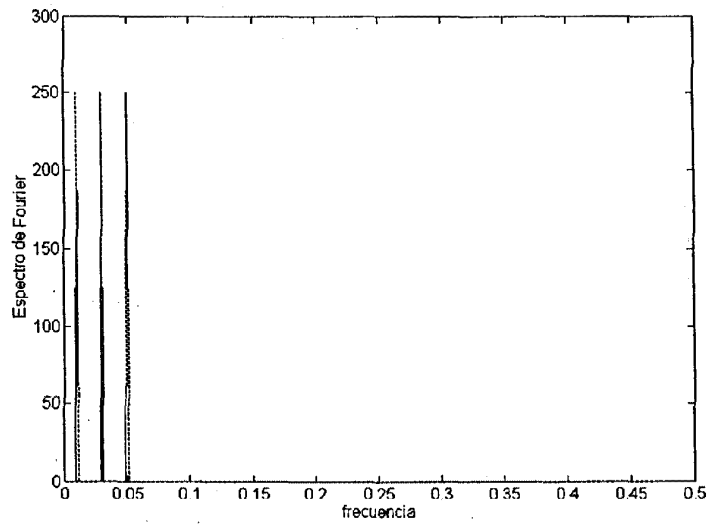


Figura 2.2
 Espectro de Fourier de la Serie $X_t = \text{sen}2\pi/100 + \text{sen}6\pi/100 + \text{sen}10\pi/100$
 donde se observan tres picos distinguibles con las frecuencias $1/100$, $3/100$ y $5/100$

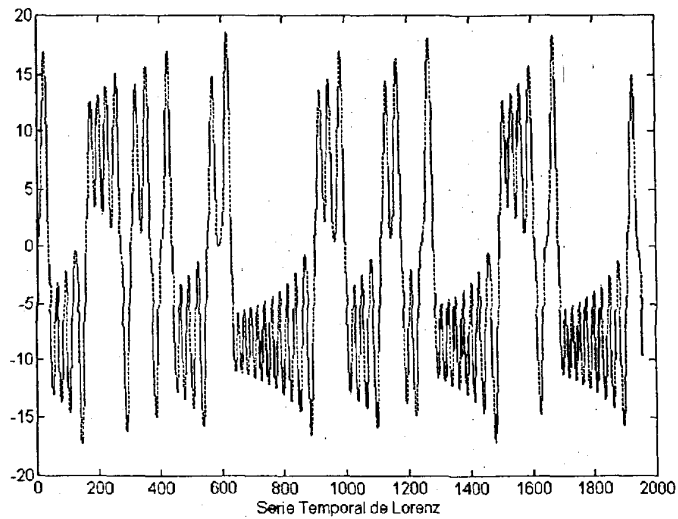


Figura 2.3
Trayectoria Temporal de la Serie de Lorenz

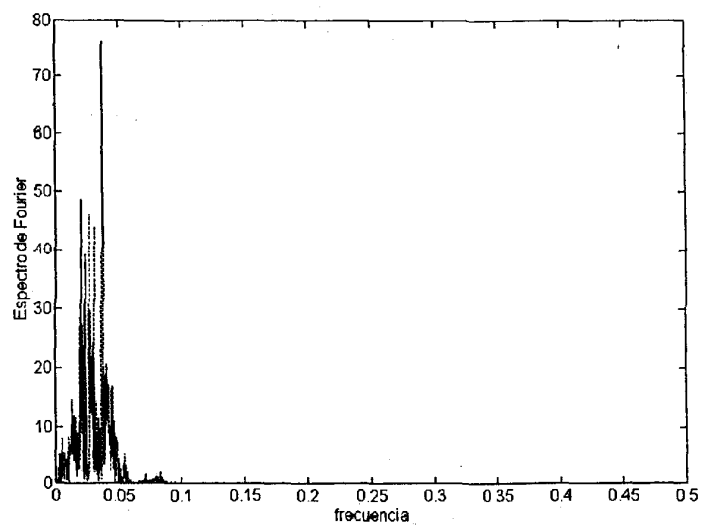


Figura 2.4
Espectro de Potencia de la Serie de Lorenz. Los picos dominantes indican las frecuencias incommensurables básicas del movimiento, mientras que los picos menores son combinaciones lineales de las frecuencias básicas

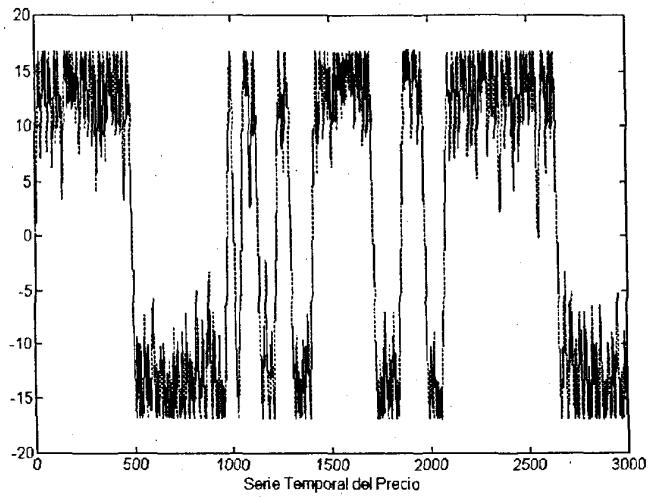


Figura 2.5

Trayectoria Temporal de la Serie Precio Generada por el Modelo Discreto

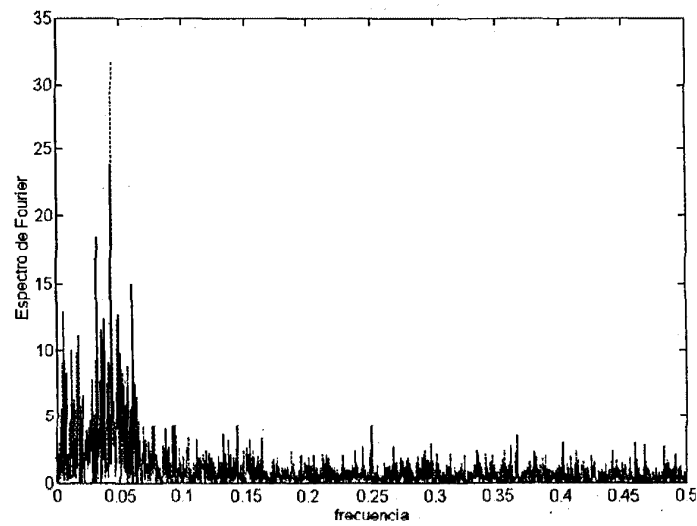


Figura 2.6

Espectro de Potencia de la Serie Precio

También generamos la trayectoria temporal de la expectativa chartista en el modelo especulativo discreto para ese mismo rango de parámetros. Su gráfica se muestra en la Figura 2.7, y el espectro de Fourier de la serie diferenciada está representado en la Figura 2.8.

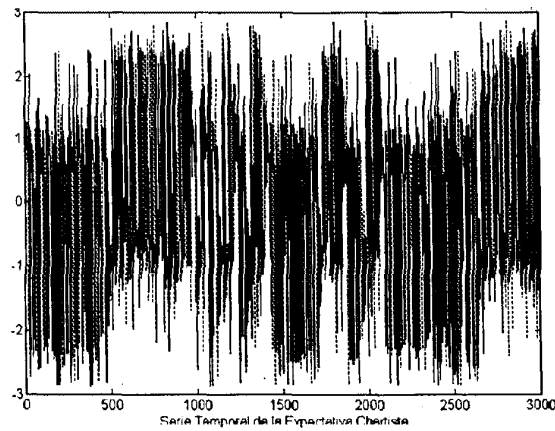


Figura 2.7
Trayectoria Temporal de la Expectativa Chartista Generada por el Modelo Discreto

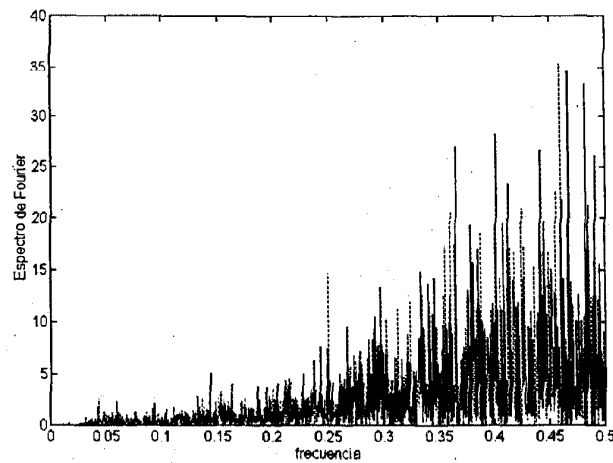


Figura 2.8
Espectro de Fourier de la Expectativa Chartista donde se observa un espectro de banda ancha que decae hacia las bajas frecuencias

Scheinkman y Le Baron (1987) son los autores de un sencillo procedimiento destinado a diagnosticar el caos y distinguirlo del ruido blanco. Consiste en una *técnica de barajado* o *randomizado* que trata la serie original como una urna en la que se toman muestras aleatorias sin reemplazamiento, creando de este modo una serie aleatorizada de la misma longitud que la anterior. Si la serie original fuese caótica, el tratamiento introducido destruiría su coherencia y haría crecer su dimensionalidad. Nosotros hemos aplicado este procedimiento a la serie de Lorenz, su espectro de potencia, una vez se ha aplicado primeras diferencias, está reflejado en la Figura 2.9 donde se observa, en comparación con la Figura 2.4, la no existencia de picos dominantes.

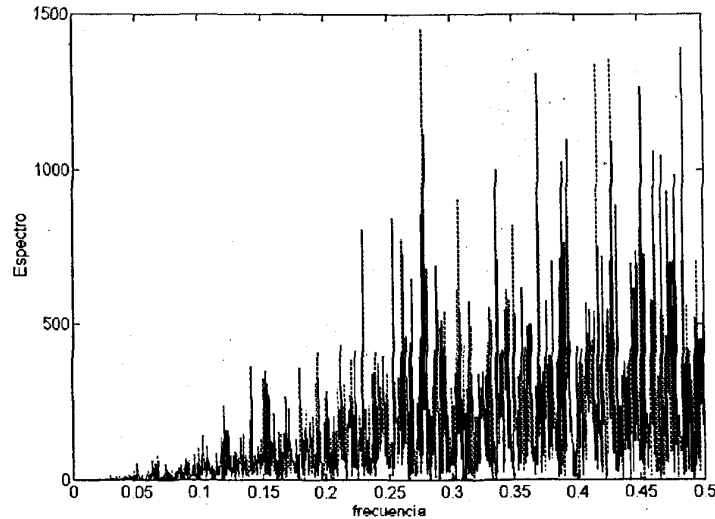


Figura 2.9

*Espectro de Potencia de la Serie de Lorenz Randomizada.
La Técnica de Randomizado destruye su coherencia y hace crecer su dimensionalidad*

Como carácter representativo, la Figura 2.10 muestra la trayectoria temporal del Índice General de la Bolsa de Madrid. Su Espectro de Fourier, una vez tomadas diferencias logarítmicas, se muestra en la Figura 2.11.

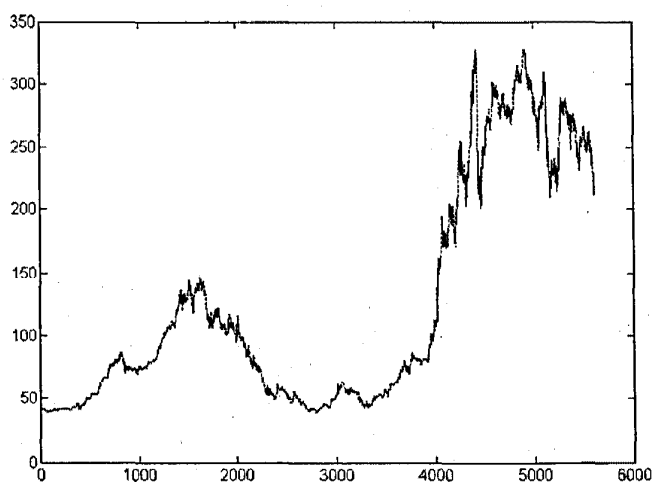


Figura 2.10
*Trayectoria Temporal del Índice General de la Bolsa de Madrid
datos diarios durante el periodo Enero-1966 a Julio-1992*

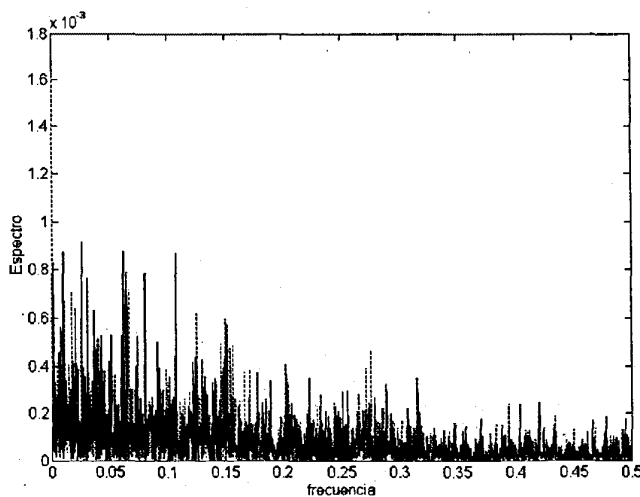


Figura 2.11
*Espectro de Fourier de la Serie del Índice General de la Bolsa de Madrid
donde se observa un espectro de banda ancha sin picos distinguibles*

También mostramos la serie temporal del tipo de cambio Peseta-Marco en la Figura 2.12, con su correspondiente Espectro de Potencia en la Figura 2.13.

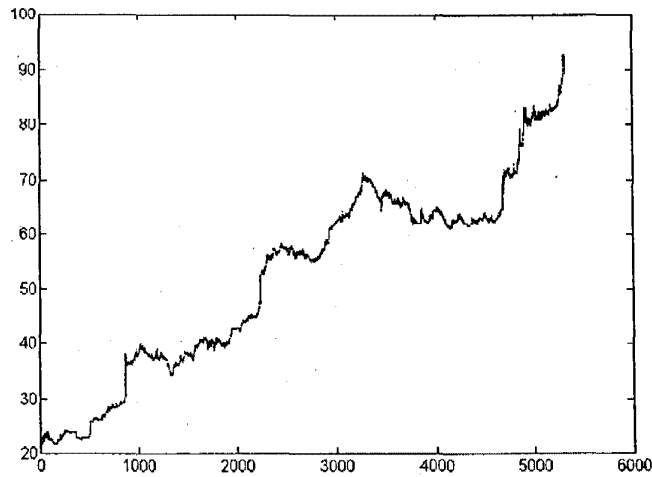


Figura 2.12
*Trayectoria Temporal de la Serie de Tipo de Cambio Peseta-Marco
datos diarios durante el periodo Enero-1974 a Abril-1995*

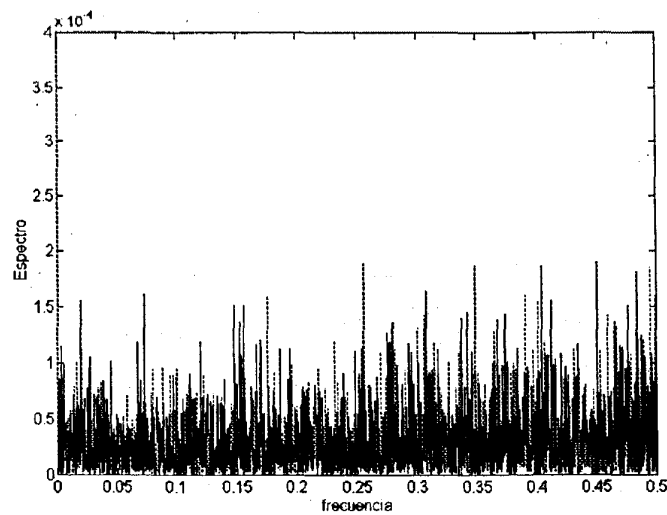


Figura 2.13
*Espectro de Potencia de la Serie de Tipo de Cambio Peseta-Marco
donde se observa un espectro de banda ancha sin picos distinguibles*

Los espectros de potencias obtenidos en estos ejemplos muestran que el análisis de Fourier no puede diferenciar el comportamiento caótico del aleatorio, incluso le es imposible discriminar entre el comportamiento caótico y el cuasi-periódico. El análisis de Fourier es incapaz de discernir, en determinadas series económicas, la presencia de caos determinista de otras explicaciones estocásticas alternativas, debido a que la mayoría de los espectros de dichas series presentan la típica forma consistente en un espectro de banda ancha que decae hacia las bajas frecuencias (Granger, 1987). Esta característica espectral se detecta no sólo en el caos determinista, sino también es compatible con un proceso estocástico altamente persistente que posee una raíz unitaria en su ecuación característica (Brock y Dechert, 1989).

En las siguientes secciones presentamos otros contrastes estadísticos que podrán proporcionar soluciones más definitivas sobre el reconocimiento de patrones subyacentes, ciclos no periódicos y procesos de memoria a largo plazo en una serie temporal.

2.3. Estadístico BDS

Una de las hipótesis más frecuentemente consideradas sobre las series financieras es que los precios siguen un camino aleatorio. Los estudios tradicionales para observar dependencias no lineales en las series financieras se planteaban a través de contrastes de autocorrelación y contrastes espectrales, de tal forma que la ausencia de dependencias lineales se entendía como justificación del mantenimiento de la hipótesis de independencia e idéntica distribución. Una vía utilizada actualmente para el rechazo de la hipótesis de que las rentabilidades de los activos o los tipos de cambio son variables independientes e idénticamente distribuidas, puede ponerse de manifiesto a través de la aplicación del estadístico BDS sobre las series originales.

Es posible contrastar, por tanto, la presencia de caos determinista, o comportamiento no lineal en general en una serie temporal por medio del test B.D.S. de Brock, Dechert y Scheinkman (1987), cuyos conceptos básicos exponemos a continuación.

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una serie finita de observaciones escalares que supondremos estacionaria. El concepto de *Espacio de Fases* asociado a la serie temporal permite examinar la evolución de los patrones de comportamiento dentro de la serie (Schuster, 1988). En este esquema, los segmentos formados por d términos consecutivos de la serie temporal se consideran puntos de un espacio vectorial real cuya dimensión es denominada *Dimensión de Inmersión* ($DI=d$). Tales puntos, llamados d -historias, se denotarán a partir de ahora como

$$x_t^d = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-(d-1)})$$

El conjunto de todas las d-historias es considerado como el espacio de fases de un sistema dinámico d-dimensional, definido por la serie temporal, y reflejará sus propiedades. El espacio d-dimensional \mathbb{R}^d se denomina entonces espacio de fases de la serie temporal.

El paradigma caótico establece que, pese a la apariencia ruidosa de la serie original, un ajuste correcto de la dimensión de inmersión daría lugar a una compleja configuración en el espacio de fases conocida como un atractor extraño. Estos atractores, lejos de estar formados por puntos distribuidos al azar, tienen características geométricas y dinámicas deterministas (Schuster, 1988).

El desarrollo básico del test BDS se fundamenta en el concepto de *Correlación Entera* $C_d(\epsilon)$, que se define como la probabilidad de que dos puntos del espacio de fases reconstruido se encuentren a una distancia menor que ϵ .

$$C_d(\epsilon) = \nu\{(i,j) / \|x_i^d - x_j^d\| < \epsilon, d \leq i, j \leq n, i \neq j\} / (n_d^2 - n_d)$$

donde $n_d = n - (d - 1)$ es el número de d-historias que pueden considerarse en la muestra de tamaño n y ν representa el número de elementos del conjunto.

El test BDS contrasta la existencia de estructuras potencialmente predecibles dentro de la serie temporal. Si dicha serie es un ruido blanco, la proximidad de dos patrones en una determinada dimensión no condiciona la proximidad de dichos patrones en una dimensión superior, por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_d(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)^d \text{ con probabilidad } 1$$

Brock, Dechet y Scheinkman (1987) demuestran que, bajo la hipótesis nula de ruido blanco para la serie temporal, la serie $|C_d(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)^d| n^{1/2}$ tiene media cero y está normalmente distribuida. Llamando $s_d(\varepsilon)$ a la desviación típica de las correlaciones enteras, el estadístico BDS, representado usualmente por w , estará también normalmente distribuido

$$w_d(\varepsilon) = \frac{|C_d(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)^d| n^{1/2}}{s_d(\varepsilon)}$$

cuando $w > 1.96$, podemos rechazar con un 95% de confianza la hipótesis nula de ruido blanco (Brock, Hsieh and Lebaron, 1992).

Este estadístico es robusto frente a una gran variedad de no linealidades sin que se precise de una formulación específica del comportamiento subyacente en la serie temporal, bien sea estocástico o determinista. La aplicación del estadístico BDS supone por tanto disponer de un número de datos relativamente grandes, ya que series con una longitud inferior a unas 500 observaciones representaría una aproximación poco representativa de su distribución muestral (Blasco y Santamaría, 1995).

Nosotros hemos aplicado este estadístico a series spot de tipos de cambio y a series financieras de activos de 5000 datos aproximadamente. La elección de la dimensión de inmersión "m" sugerida por los autores del test es que verifique $T/m \geq 200$, siendo T el tamaño total de la muestra. Por tanto, según el tamaño de

nuestras series, las dimensiones de inmersión estarían bien representadas tomándolas de 2 a 10. Otra cuestión a dilucidar es la elección de ϵ o rango de distancias. Nuestro criterio ha sido tomarlo igual o muy próximo a la desviación típica dividida por el rango de cada serie, ya que variaciones pequeñas de ϵ no son claramente significativas en el cálculo del BDS.

En la Tablas 2.1-2.6 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el estadístico BDS a distintas series spot de Tipos de Cambio con datos diarios desde el 1-1-74 al 18-4-95. En la Tablas 2.7-2.8 se aplica el estadístico al Índice General de la Bolsa de Madrid con datos diarios del 1-1-66 al 30-7-92, y al Índice S&P de la Bolsa de Nueva York con datos diarios durante el período 1-1-68 al 30-5-92.

Tabla 2.1. Estadístico BDS para el Tipo de Cambio Marco-Libra

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 4904, SD/Spread = 7.3077E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.080000	2	7637449	5096572	1.4370E+0000	9.0502E-0002	1.5878E+0001
0.080000	3	7637449	3520565	2.5689E+0000	1.3001E-0001	1.9759E+0001
0.080000	4	7637449	2513372	3.2511E+0000	1.4000E-0001	2.3222E+0001
0.080000	5	7637449	1840045	3.4882E+0000	1.3198E-0001	2.6429E+0001
0.080000	6	7637449	1380665	3.4537E+0000	1.1514E-0001	2.9995E+0001
0.080000	7	7637449	1055048	3.2343E+0000	9.5459E-0002	3.3881E+0001
0.080000	8	7637449	818783	2.9231E+0000	7.6338E-0002	3.8292E+0001
0.080000	9	7637449	643141	2.5762E+0000	5.9429E-0002	4.3349E+0001
0.080000	10	7637449	510715	2.2340E+0000	4.5314E-0002	4.9301E+0001

Tabla 2.2. Estadístico BDS para el Tipo de Cambio Peseta-Marco

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 5322, SD/Spread = 1.9540E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.019500	2	10368407	7889786	1.5467E+0000	8.9260E-0002	1.7328E+0001
0.019500	3	10368407	6169603	3.1651E+0000	1.4738E-0001	2.1476E+0001
0.019500	4	10368407	4912872	4.3633E+0000	1.8232E-0001	2.3932E+0001
0.019500	5	10368407	3957209	5.0569E+0000	1.9742E-0001	2.5615E+0001
0.019500	6	10368407	3222098	5.3817E+0000	1.9779E-0001	2.7210E+0001
0.019500	7	10368407	2644426	5.4158E+0000	1.8828E-0001	2.8764E+0001
0.019500	8	10368407	2183720	5.2458E+0000	1.7287E-0001	3.0346E+0001
0.019500	9	10368407	1808531	4.9257E+0000	1.5449E-0001	3.1884E+0001
0.019500	10	10368407	1506875	4.5520E+0000	1.3521E-0001	3.3667E+0001

Tabla 2.3. Estadístico BDS para el Tipo de Cambio Franco-Marco

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 5303, SD/Spread = 4.2632E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.042600	2	10058781	7898496	3.6482E+0000	1.1181E-0001	3.2629E+0001
0.042600	3	10058781	6489921	6.9669E+0000	1.8084E-0001	3.8526E+0001
0.042600	4	10058781	5468693	9.2712E+0000	2.1925E-0001	4.2287E+0001
0.042600	5	10058781	4702582	1.0736E+0001	2.3270E-0001	4.6136E+0001
0.042600	6	10058781	4110472	1.1556E+0001	2.2855E-0001	5.0562E+0001
0.042600	7	10058781	3638832	1.1894E+0001	2.1332E-0001	5.5757E+0001
0.042600	8	10058781	3246990	1.1854E+0001	1.9204E-0001	6.1724E+0001
0.042600	9	10058781	2920483	1.1586E+0001	1.6831E-0001	6.8837E+0001
0.042600	10	10058781	2647017	1.1188E+0001	1.4447E-0001	7.7439E+0001

Tabla 2.4. Estadístico BDS para el Tipo de Cambio Lira-Marco

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 5354, SD/Spread = 4.7870E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.047800	2	10083605	7740534	3.3078E+0000	1.0902E-0001	3.0340E+0001
0.047800	3	10083605	6191170	6.1408E+0000	1.7344E-0001	3.5407E+0001
0.047800	4	10083605	5088566	8.0700E+0000	2.0682E-0001	3.9020E+0001
0.047800	5	10083605	4264563	9.1808E+0000	2.1590E-0001	4.2523E+0001
0.047800	6	10083605	3620965	9.6363E+0000	2.0857E-0001	4.6202E+0001
0.047800	7	10083605	3113126	9.6756E+0000	1.9147E-0001	5.0534E+0001
0.047800	8	10083605	2706680	9.4523E+0000	1.6955E-0001	5.5750E+0001
0.047800	9	10083605	2377324	9.0735E+0000	1.4615E-0001	6.2082E+0001
0.047800	10	10083605	2104818	8.5986E+0000	1.2339E-0001	6.9684E+0001

Tabla 2.5. Estadístico BDS para el Tipo de Cambio Escudo-Marco

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 5342, SD/Spread = 2.8784E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.028700	2	9902235	7370600	2.5614E+0000	9.6870E-0002	2.6441E+0001
0.028700	3	9902235	5667731	4.6153E+0000	1.5187E-0001	3.0390E+0001
0.028700	4	9902235	4453313	5.8732E+0000	1.7845E-0001	3.2913E+0001
0.028700	5	9902235	3555809	6.4656E+0000	1.8354E-0001	3.5226E+0001
0.028700	6	9902235	2887556	6.6439E+0000	1.7469E-0001	3.8033E+0001
0.028700	7	9902235	2368592	6.4846E+0000	1.5799E-0001	4.1044E+0001
0.028700	8	9902235	1961465	6.1330E+0000	1.3782E-0001	4.4499E+0001
0.028700	9	9902235	1639061	5.6846E+0000	1.1704E-0001	4.8571E+0001
0.028700	10	9902235	1378961	5.1868E+0000	9.7336E-0002	5.3287E+0001

Tabla 2.6. Estadístico BDS para el Tipo de Cambio Florín-Marco

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 5150, SD/Spread = 3.7816E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.037800	2	9267575	7157976	3.6958E+0000	1.0792E-0001	3.4245E+0001
0.037800	3	9267575	5743028	6.5998E+0000	1.7054E-0001	3.8698E+0001
0.037800	4	9267575	4744023	8.5744E+0000	2.0202E-0001	4.2443E+0001
0.037800	5	9267575	4005786	9.7377E+0000	2.0950E-0001	4.6481E+0001
0.037800	6	9267575	3446244	1.0315E+0001	2.0104E-0001	5.1306E+0001
0.037800	7	9267575	3004599	1.0444E+0001	1.8334E-0001	5.6966E+0001
0.037800	8	9267575	2648420	1.0278E+0001	1.6128E-0001	6.3727E+0001
0.037800	9	9267575	2360947	9.9526E+0000	1.3810E-0001	7.2066E+0001
0.037800	10	9267575	2127889	9.5515E+0000	1.1583E-0001	8.2462E+0001

Tabla 2.7. Estadístico BDS para el Índice General de la Bolsa de Madrid

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 5605, SD/Spread = 4.8367E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.048000	2	9600431	6675712	3.8583E+0000	9.7248E-0002	3.9675E+0001
0.048000	3	9600431	4857679	6.0707E+0000	1.3466E-0001	4.5082E+0001
0.048000	4	9600431	3667264	7.0448E+0000	1.3982E-0001	5.0385E+0001
0.048000	5	9600431	2834984	7.1408E+0000	1.2711E-0001	5.6176E+0001
0.048000	6	9600431	2240733	6.7913E+0000	1.0695E-0001	6.3498E+0001
0.048000	7	9600431	1799899	6.2073E+0000	8.5526E-0002	7.2577E+0001
0.048000	8	9600431	1465142	5.5386E+0000	6.5977E-0002	8.3948E+0001
0.048000	9	9600431	1208098	4.8797E+0000	4.9551E-0002	9.8477E+0001
0.048000	10	9600431	1002662	4.2462E+0000	3.6453E-0002	1.1648E+0002

Tabla 2.8. Estadístico BDS para el Índice S&P de la Bolsa de Nueva York

Initial Obs : 1, Num Obs : N = 6140, SD/Spread = 3.0210E-0002

Epsilon	m	C1	Cm	BDS	SD	BDS/SD
0.050000	2	15328286	12675435	8.8499E-0001	6.6540E-0002	1.3300E+0001
0.050000	3	15328286	10595415	1.9247E+0000	1.2162E-0001	1.5825E+0001
0.050000	4	15328286	8943547	2.9340E+0000	1.6648E-0001	1.7624E+0001
0.050000	5	15328286	7620601	3.8388E+0000	1.9941E-0001	1.9251E+0001
0.050000	6	15328286	6559667	4.6361E+0000	2.2097E-0001	2.0981E+0001
0.050000	7	15328286	5674785	5.1921E+0000	2.3263E-0001	2.2319E+0001
0.050000	8	15328286	4932233	5.5483E+0000	2.3618E-0001	2.3492E+0001
0.050000	9	15328286	4313071	5.7741E+0000	2.3338E-0001	2.4741E+0001
0.050000	10	15328286	3793166	5.8893E+0000	2.2582E-0001	2.6079E+0001

Los resultados que se deducen para las series diarias de tipos de cambio manifiestan el rechazo a la hipótesis nula, ya que los valores obtenidos del BDS son generalmente mayores que dos, y por tanto revelan la existencia de procesos de dependencia no lineal en las series. Estas mismas conclusiones se derivan del análisis del Índice General de la Bolsa de Madrid y del Índice S&P de la Bolsa de Nueva York, lo que sugiere también la existencia de patrones de comportamiento en las series de rentabilidades.

Un trabajo reciente sobre no linealidades en el mercado de valores español debido a Blasco y Santamaría (1995) llega a estas mismas conclusiones. Su estudio, compuesto por las rentabilidades diarias del Índice General de la Bolsa de Madrid y 10 activos de distintos sectores (que pretenden ofrecer cierta representación del mercado de valores español durante el período Enero de 1980-Diciembre de 1992), muestra evidencias favorables para afirmar que las rentabilidades presentan adicionalmente dependencias no lineales claramente significativas, aunque éstas sean de especificación más compleja que la deducida de los modelos de caos blanco. Estos modelos se caracterizan por tener media cero, varianza constante y covarianza nula, propiedades que distinguen a las series aleatorias. Es por lo que a éstos procesos caóticos se les denomina *caos blanco* por su similitud con el ruido blanco.

Sin embargo, algunos autores como Provenzale et al. (1992) han sugerido que la distinción entre caos determinista de baja dimensión y el auténtico ruido blanco no debería basarse solamente en estimaciones de la Dimensión de Correlación o el test B.D.S., y deberían aplicarse otros métodos para analizar series temporales con el fin de extraer tanta información dinámica como sea posible. En este sentido, y para abordar la detección de memoria en las series financieras, plantearemos otras técnicas adicionales al estadístico BDS.

2.4. Estadístico de Hurts

La dependencia a largo plazo de las series económicas ha sido una hipótesis de trabajo básica en las primeras teorías sobre el ciclo económico. Igualmente, la existencia de memoria estadística de las rentabilidades del mercado de valores ha sido un tema desde siempre muy atractivo para los analistas financieros. La existencia de memoria estadística está directamente relacionada con la predecibilidad de los precios de los valores y ha sido negada sistemáticamente por la literatura económica. Así, la teoría de las Expectativas Racionales, que a nivel financiero se concreta en la Hipótesis de los Mercados Eficientes afirma, de forma genérica, que los beneficios no pueden ser incrementados de modo consistente actuando en el mercado por medio de la información obtenida a partir del comportamiento pasado de las cotizaciones.

2.4.1. La Memoria a Largo Plazo en los Precios de los Mercados de Valores

Es preciso distinguir entre dependencia estadística, y por tanto memoria, en una serie temporal a corto y a largo plazo. Intuitivamente, la memoria interna de una serie temporal se puede considerar como la influencia del pasado sobre el futuro. A efectos prácticos, la memoria interna suele medirse por medio de la función de autocovarianzas de la serie. En las series económicas y financieras, la función de autocovarianzas tiende a cero en una forma tal que puede ser considerada como una característica de la serie. La velocidad de esa caída representa una medida de la memoria interna de la serie (Crato, 1994).

Una serie temporal tiene dependencia a corto plazo cuando la dependencia maximal entre eventos, en cualquier par de fechas, se hace muy pequeña al aumentar el tiempo que media entre los eventos. Una serie temporal presenta dependencia a largo plazo cuando podemos encontrar eventos dependientes en fechas muy separadas. En Lo (1991) encontramos una compleja definición formal de la dependencia a corto y largo plazo, que finalmente se traduce en cuantificar la velocidad de caída de la función de autocorrelación como pasamos a resumir.

Partimos de una serie estacionaria X_t donde sus primeros y segundos momentos no dependen de t ; por lo tanto $E(X_t) = \text{cte}$ y $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ es sólo función del retardo h . Si $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$, la influencia de los valores pasados disminuye con el retardo h . En tal caso la velocidad con que $\gamma(h)$ decae es una medida de la memoria interna del proceso aleatorio. Consideremos varios casos paradigmáticos del decaimiento de $\gamma(h)$.

El ruido blanco es un proceso que carece de memoria. En la práctica, rara vez ocurre este caso extremo, no obstante, una implicación de la hipótesis de los mercados eficientes es que las rentabilidades del mercado de valores se comportan como un ruido blanco. Ejemplos típicos de memoria corta son los procesos ARMA, donde el decaimiento de la función $\gamma(h)$ está geoméricamente acotado, es decir

$$\exists c > 0, \exists r \in (0,1) / |\gamma(h)| \leq cr^h$$

resultando por tanto que la serie numérica generada por la sucesión $\gamma(h)$ es absolutamente sumable (Crato, 1994).

La memoria larga se caracteriza por una función de autocovarianzas que decae mucho más lentamente con el tiempo, siguiendo asintóticamente un decaimiento de tipo hiperbólico, esto es

$$\exists c > 0, \exists \alpha < 0 / \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{|\gamma(h)|}{c h^{-\alpha}} = 1 \quad \text{y por tanto} \quad |\gamma(h)| \sim c h^{-\alpha}$$

si $\alpha > -1$ se tiene que $\sum |\gamma(h)| = \infty$, la serie temporal X_t tiene memoria larga y se dice *persistente*.

Diversos autores como Mandelbrot y Van Ness (1968), Granger (1980), Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981), han desarrollado modelos que muestran dependencia incluso sobre períodos de tiempo muy largos.

2.4.2. Análisis del Rango Reescalado

El objetivo del análisis de rango reescalado (más brevemente análisis R/S), consiste en detectar en series temporales memoria a largo plazo. Se pretende distinguir procesos estocásticos generados por familias de variables aleatorias *I.I.D.* de otros tipos de procesos estocásticos "ruidosos" que, careciendo de memoria a corto plazo, pudiesen tenerla a largo plazo.

El análisis R/S es una metodología no paramétrica, muy robusta, descubierta por el hidrólogo británico H. E. Hurst en 1951 al estudiar los problemas derivados del mantenimiento de la capacidad en la presa de Asuán en el río Nilo. Hurst diseñó un exponente destinado a medir el nivel de fluctuación de los valores de una serie

temporal respecto a su media en las diferentes escalas de tiempo.

Dada una serie temporal x_1, \dots, x_n , de media aritmética muestral \bar{x}_n y desviación típica S_n , normalizamos primeramente los datos sustrayendo su media muestral $Z_i = x_i - \bar{x}_n$, $i = 1, 2, \dots, n$. A continuación formamos las sumas acumuladas de la serie $Y_r = \sum_{i=1}^r Z_i$, $r = 1, 2, \dots, n$. Y finalmente calculamos el rango ajustado, es decir, la diferencia entre las desviaciones acumuladas máxima y mínima respecto a la media de la serie

$$R_n = \text{Max} \{Y_1, \dots, Y_n\} - \text{Mín} \{Y_1, \dots, Y_n\} \quad (2.4.1)$$

como las variables Y_r tienen media cero, el valor máximo de Y_r , $r = 1, 2, \dots, n$ será mayor que cero y el valor mínimo será menor que cero y en consecuencia el rango R_n será siempre no negativo.

El estadístico R/S , o rango reescalado de fluctuaciones, es el rango de la suma parcial de desviaciones de la serie respecto de su media, expresado en unidades de su desviación típica

$$(R/S)_n = R_n/S_n$$

este rango crece al aumentar la escala temporal n . Hurst propuso la siguiente ley empírica de tipo potencial para describir dicho crecimiento

$$(R/S)_n = c n^H, \quad c \in \mathbb{R}$$

El exponente de Hurst, H , puede aproximarse representando $\log (R/S)$ frente $\log n$ y calculando la pendiente mediante una regresión mínimo cuadrática ordinaria, a través de la siguiente ecuación

$$\log (R/S)_n = \log c + H \log n$$

Por el reescalamiento de los datos a media cero y desviación típica uno, es posible comparar fenómenos y escalas de tiempo diferentes. Hurst concluyó mediante sus simulaciones que si un sistema fuese independientemente distribuido, entonces se verificaría $H = 0.5$, es decir que el rango reescalado se vería incrementado a una tasa de la raíz cuadrada del tiempo. En sus investigaciones sobre la serie histórica de desbordamientos del río Nilo encontró que $H \approx 0.75$.

Feller (1951) intentó estudiar este tipo de anomalías desde el punto de vista de la teoría estadística standard, buscando demostraciones en sentido formal. Feller trabajó exclusivamente con el rango ajustado R_n y demostró que para una familia de variables aleatorias independientes se verificaban las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} E[R(n)] &= (n \pi/2)^{1/2} \\ \text{Var}[R(n)] &= (\pi^2/6 - \pi/2)n \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Feller consideró que el rango reescalado $(R/S)_n$ era intratable debido al comportamiento de la desviación típica muestral, especialmente para pequeños valores de n . El rango reescalado podría sólo ser tratado buscando su equivalencia asintótica con el rango ajustado.

El problema básico suscitado por el estadístico de Hurst se convirtió entonces en identificar bajo qué circunstancias una familia de variables aleatorias podía dar lugar a un exponente $H > 1/2$. Morán (1964) demostró en éste terreno un importante resultado negativo. Considerando una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con "colas anchas" en su distribución, intentando con ello que S_n sirviese para compensar las fluctuaciones de R_n , obtuvo de nuevo $H = 1/2$.

El primer resultado positivo fue obtenido por Mandelbrot y VanNess (1968). En un modelo estacionario de variables aleatorias gaussianas, fuertemente dependientes con momentos de todos los órdenes, encontraron $H > 1/2$. Mandelbrot (1972) demuestra que el exponente H varía entre 0 y 1, siendo $H = 1/2$ para el caso de una serie generada por una familia de variables aleatorias independientes, gaussianas o no, que por tanto carece de cualquier clase de posibilidad de dependencia estadística a largo plazo. Si $H > 1/2$, la familia de variables no es independiente y aparece el efecto de *persistencia* o memoria larga que puede considerarse como una dependencia estadística no cíclica a largo plazo. Si $H < 1/2$, Mandelbrot llamó a este efecto *antipersistencia*.

Mandelbrot (1972) también desarrolló un tipo especial de correlación destinada a medir el impacto del presente sobre el futuro

$$C = 2^{2H-1} - 1$$

llegando a las siguientes conclusiones:

- si $H = 1/2 \rightarrow C = 0$, no hay dependencia estadística a largo plazo
- si $H > 1/2 \rightarrow C \in (0,1)$, hay correlación positiva a largo plazo o persistencia
- si $H < 1/2 \rightarrow C \in (-1,0)$, hay correlación negativa a largo plazo o antipersistencia

Mandelbrot demuestra igualmente que la dimensión fractal D de la serie es la inversa del exponente de Hurst, $D = 1 / H$. El ruido blanco gaussiano tiene por tanto dimensión fractal $D = 2$.

Los valores simulados del estadístico $(R/S)_n$ eran convergentes en los experimentos numéricos hacia los valores pronosticados por las fórmulas (2.4.2) de Feller únicamente para grandes valores de n . La causa de tales desviaciones sólo pudo ser encontrada muchos años más tarde cuando Anis y Lloyd (1976) desarrollaron la fórmula del valor medio del estadístico para pequeños valores de n , que era ciertamente diferente a la predicha por la teoría de Feller.

$$E(R/S)_n = [\Gamma(0.5(n-1))/(\pi^{1/2}\Gamma(0.5n))] \sum_{r=1}^{n-1} [(n-r)/r]^{1/2} \quad (2.4.3)$$

para valores de n grandes, usando la fórmula de Stirling, la expresión anterior se simplifica

$$E(R/S)_n = (n\pi/2)^{-1/2} \sum_{r=1}^{n-1} [(n-r)/r]^{1/2}$$

y suele usarse para aproximar el exponente de Hurst con $n > 300$.

2.4.3. Detección de Ciclos No Periódicos

La idea de que los mercados financieros poscan comportamientos cíclicos regulares, ocultos por ruido y otro tipo de perturbaciones irregulares, es antigua y controvertida. Esta idea se encuentra en la base del Análisis Técnico y ha sido

ampliamente contestada por la comunidad científica a través de la Teoría de los Mercados Eficientes.

La comprobación empírica de la existencia de ciclos periódicos se realiza utilizando el Análisis de Fourier o Análisis Espectral. Los picos en el espectro de potencias son considerados como evidencia de comportamiento cíclico como ya vimos anteriormente en la Sección 2.2. En la actualidad existe un consenso bastante general sobre que el Análisis Espectral puede ser una herramienta inapropiada para analizar comportamientos cíclicos en un mercado. Una razón es, naturalmente, que tales ciclos pudiesen no existir porque las fluctuaciones que se perciben en las gráficas son sencillamente una ilusión, efecto de un camino aleatorio (Malkiel, 1990).

Otra razón, en un sentido completamente distinto, es que los ciclos que pudiesen aparecer en el comportamiento de los mercados no tienen porqué ser adecuadamente descritos mediante ondas sinusoidales, u otro tipo de comportamientos periódicos típicos de los osciladores lineales. Los sistemas dinámicos no lineales son capaces de generar *ciclos no periódicos*, de duración variable, donde sólo podría hablarse de una duración media.

Los ciclos no periódicos pueden ser explicados matemáticamente desde dos teorías completamente diferentes. Pueden ser concebidos como ciclos estadísticos, conocidos en la actualidad como *procesos persistentes de Hurst*. Se trata de caminos aleatorios con deriva que consisten en procesos estocásticos con memoria y cambios abruptos en dirección y magnitud. En tal caso la duración del ciclo carece de significado y no tiene sentido plantearse una duración media del ciclo (Mandelbrot, 1972).

Por otra parte, los ciclos no periódicos también pueden considerarse originados por dinámicas deterministas no lineales conocidas genéricamente como caos determinista. Tales sistemas admiten en sus atractores extraños ciclos irregulares, ciertamente no periódicos, cuya forma y duración evoluciona a través del tiempo. Una herramienta mucho más robusta que el análisis de Fourier para el estudio de ciclos, es el análisis R/S pues permite detectar tanto los ciclos periódicos como los no periódicos.

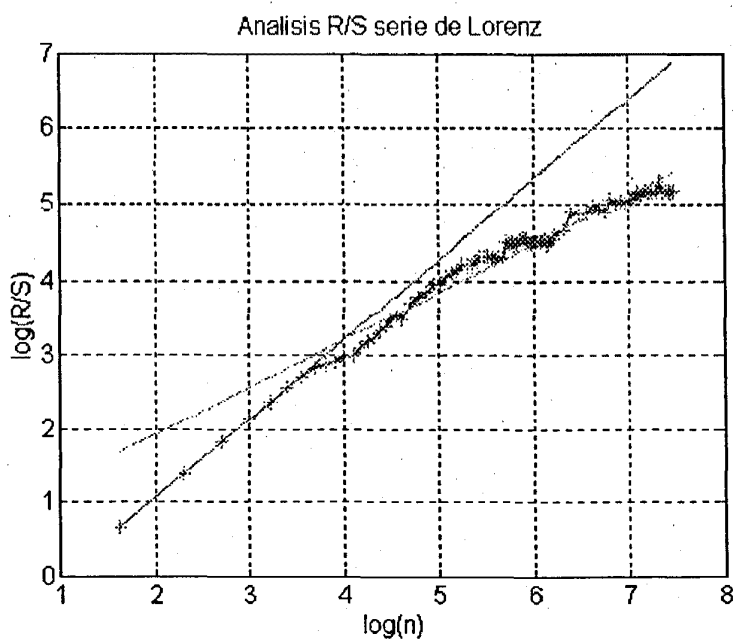


Figura 2.15

Las series temporales que generan los sistemas caóticos tienen exponentes de Hurst netamente distintos de 0.5. Este es el caso del análisis R/S correspondiente a la serie temporal de Lorenz (Figura 2.3) reflejado en la Figura 2.15, en la cual se

observa cómo el estadístico de Hurts crece inicialmente con un exponente $H > 1/2$, lo que indica una correlación positiva a largo plazo o persistencia. A partir de tamaños muestrales superiores a un cierto valor crítico situado entre 3 y 4, su crecimiento se produce con un exponente $H = 1/2$, es decir, similar al camino aleatorio. Esto indica la existencia de un ciclo de período aproximadamente igual a $\exp(3.5)$.

Mandelbrot y Wallis (1969a,b,c,d) desarrollaron un amplio conjunto de simulaciones destinadas a mostrar la capacidad del análisis R/S en la detección de periodicidades. Como una de las ideas clave, consideraremos una serie temporal de tipo sinusoidal muestreada a partir de la serie seno, de forma que dé lugar a ciclos de longitud 100. Sea por tanto una serie temporal de 1000 observaciones muestreada a partir de la función $X_t = \sin 2\pi t/100 + \sin 6\pi t/100 + \sin 10\pi t/100$, cuya gráfica ya se mostraba en la Figura 2.1 y cuyo espectro de Fourier denotaba la existencia de tres ciclos de frecuencias $1/100$, $3/100$ y $5/100$.

Si le aplicamos el análisis $(R/S)_n$ a dicha serie temporal, para valores de n sucesivamente crecientes, nos encontramos que cuando n sobrepasa la longitud 100 para cada uno de los ciclos, el rango reescalado alcanza en $100/5$, $100/3$ y en 100 su máxima amplitud y a partir de este valor deja de crecer. En la Figura 2.16 se muestra el análisis R/S de esta serie, donde podemos observar la existencia de los tres ciclos periódicos para los valores aproximados a $\exp(3)$, $\exp(3.5)$ y $\exp(4.6)$.

En diversos trabajos, como los de Mandelbrot y Taqqu (1979) y Mandelbrot y Wallis (1969a,b,c,d), se comprueba la superioridad del análisis R/S para detectar dependencias a largo plazo en las series temporales respecto a otros métodos más convencionales, tales como análisis de autocorrelaciones o descomposición espectral.

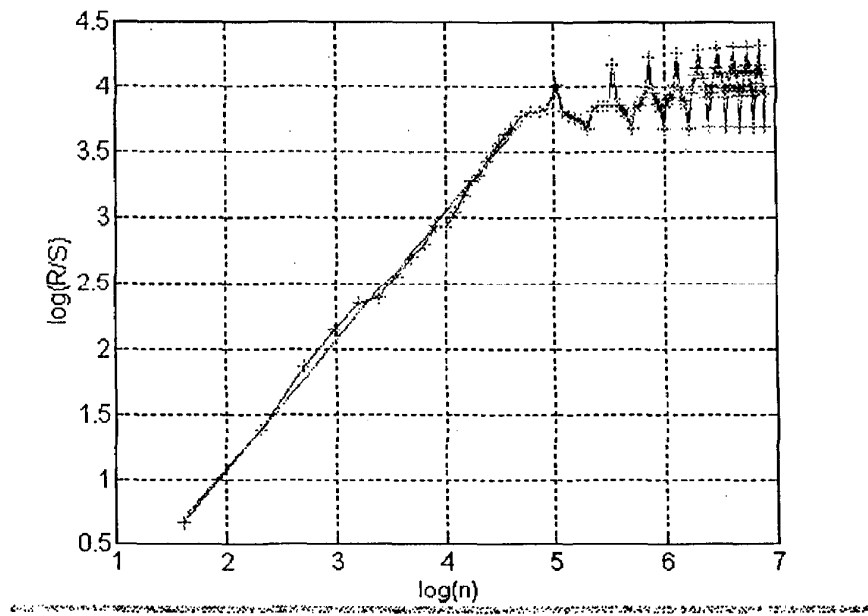


Figura 2.16
Análisis R/S de la Serie $X_t = \text{sen}2\pi t/100 + \text{sen}6\pi t/100 + \text{sen}10\pi t/100$

Mandelbrot y Wallis (1969a) demostraron, mediante simulaciones de Monte Carlo, que el estadístico R/S puede detectar dependencia a largo plazo en procesos estocásticos no gaussianos de gran sesgo y kurtosis. Mandelbrot (1972, 1975) analizó la convergencia del estadístico R/S para procesos estocásticos con varianza infinita. Tal extremo daba considerables ventajas al estadístico R/S sobre los métodos de autocorrelación no necesariamente bien definidos para tales procesos.

Hurst (1951) propuso el *Estadístico V* para estudiar cuando se rompe el crecimiento del rango reescalado en la representación $\log(R/S) / \log n$. Tal

estadístico da una medida más precisa de la longitud del ciclo y es bastante robusto ante la presencia de ruido. El estadístico V se define como

$$V_n = \frac{(R/S)_n}{\sqrt{n}}$$

En la medida que la serie temporal estudiada constituya un proceso de variables aleatorias independientes y el rango reescalado se comporte por tanto en la forma $(R/S)_n = c n^{1/2}$, la representación de $\log V_n$ frente a $\log n$ resultará una línea casi horizontal que puede aproximarse por el estadístico de Anis y Lloyd deducido de la ecuación (2.4.3). Si el proceso fuese persistente y el rango reescalado creciese con un exponente superior a $1/2$, esto es, si $(R/S)_n = c n^H$ con $H > 1/2$, la representación gráfica de $\log V_n$ frente a $\log n$ dará lugar a una pendiente positiva; por el contrario, si $H < 1/2$ la pendiente entonces sería negativa.

También es interesante notar que en la representación gráfica de $\log V_n$ frente a $\log n$, los escalones en la gráfica se producirán en aquellos tramos donde $\log V_n$ se mueve horizontalmente. En tales puntos de ruptura se disipa la memoria larga del proceso. En la Figura 2.17 puede observarse el estadístico V_n una serie temporal muestreada a partir de la función $X_t = \text{sen}2\pi t/100 + \text{sen}6\pi t/100 + \text{sen}10\pi t/100$, donde se aprecian puntos de pendiente horizontal en los valores aproximados $\exp(3)$, $\exp(3.5)$ y $\exp(4.6)$, que se corresponden con el final de cada uno de los períodos $100/5$, $100/3$, y 100 de los ciclos de la serie.

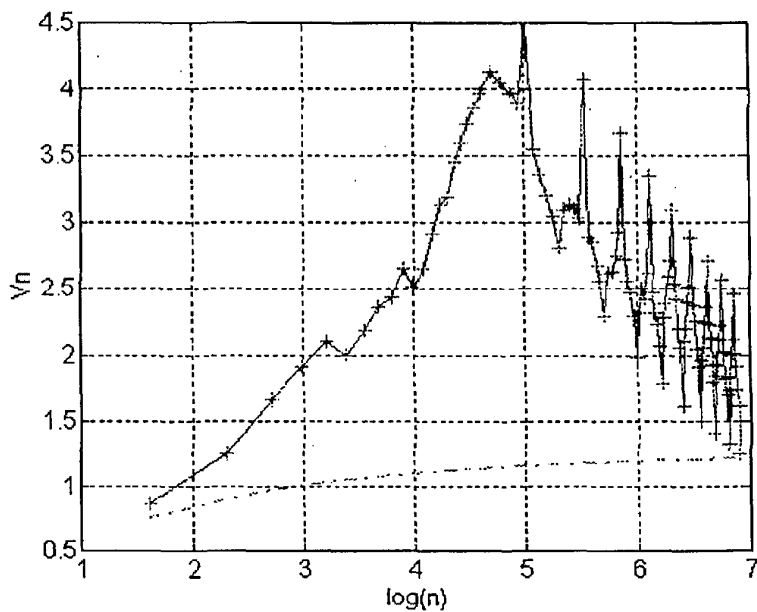


Figura 2.17

Análisis V de la serie $X_t = \text{sen}2\pi/100 + \text{sen}6\pi/100 + \text{sen}10\pi/100$ comparándolo con el Estadístico de Anis y Lloyd que simula el camino aleatorio

Recientemente Lo (1991) ha manifestado diversas objeciones al estadístico R/S, puntualizando que es sesgado e incapaz de distinguir, en muestras finitas, la memoria a corto plazo de la memoria a largo plazo. En su intento de solventar tales problemas, Lo (1991) desarrolló una versión modificada del estadístico R/S. Su aplicación contradice diversas conclusiones sobre varios índices norteamericanos de rentabilidades bursátiles, poniendo de manifiesto que sólo puede detectarse memoria a corto plazo en tales series de rentabilidades.

El estadístico modificado R/S, el cual será representado por V_n^L , pretende eliminar la dependencia a corto plazo y dar lugar a una nueva versión del estadístico de Hurst que sea robusto frente a la presencia de autocovarianzas dentro de las series temporales. La diferencia estriba en considerar un nuevo estimador para la varianza de la forma

$$S_{n,q}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 + \frac{2}{n} w_q(i) \sum_{i=1}^q \sum_{j=i+1}^n (x_j - \bar{x}_n)(x_{j-i} - \bar{x}_n) - \hat{\sigma}_n^2 + 2 \sum_{i=1}^q w_q(i) \hat{\gamma}(i)$$

donde $\hat{\sigma}_n^2$ y $\hat{\gamma}(i)$ representan los estimadores usuales para la varianza muestral y la covarianza respectivamente, y $w_q(i)$ indica pesos ponderados que vienen definidos como

$$w_q(i) = 1 - \frac{i}{q+1}, \quad q < n$$

$S_{n,q}^2$ consiste, por tanto, en una expresión que recoge las sumas parciales de las varianzas y, en presencia de autocorrelación, incluye además las autocovarianzas. El número q de pesos w_q que aparece en la expresión viene sugerido por Newey y West (1987) de la siguiente forma

$$q = \left\lceil \left[\left(\frac{3n}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{2\hat{\rho}(1)}{1-\hat{\rho}^2(1)} \right)^{2/3} \right] \right\rceil$$

donde $[.]$ indica la parte entera y $\hat{\rho}(1)$ es el estimador usual del coeficiente de autocorrelación de primer orden.

El rango reescalado modificado se define ahora como

$$(R/S)_n^L = \frac{R_n}{S_{n,q}}$$

donde R_n está descrito por la ecuación (2.4.1). Lo (1991) demuestra, bajo la hipótesis nula de dependencia a corto plazo, que el estadístico V modificado

$$V_n^L = \frac{(R/S)_n^L}{\sqrt{n}}$$

converge débilmente al movimiento browniano en el intervalo unitario.

Teniendo en cuenta las sugerencias de Lo, y con el objeto de obtener evidencia de memoria en las series de tipos de cambio y en las series de rentabilidades, hemos representado el estadístico de Hurst y el estadístico modificado de Lo en un mismo gráfico. También hemos randomizado ocho veces cada una de las series estudiadas y aplicado el estadístico de Hurst a esta serie, con el fin de comparar los resultados. Se constata que tras el proceso de randomización, la serie temporal pierde todas sus características iniciales, lo que indica un proceso de memoria dentro de las mismas. Igualmente, los gráficos incluyen la simulación de Anis y Lloyd sobre el estadístico V de Hurst del camino aleatorio, tal y como señala la ecuación (2.4.3), con el fin de realizar comprobaciones.

También hemos elaborado unas tablas que recogen los datos obtenidos para la representación de los gráficos. Cada tabla consiste en siete columnas que indican lo siguiente:

1ª columna: $n = n^\circ$ de elementos en que se va agrupando la serie

2ª columna: R/S = Estadístico V de Hurst

3ª columna: R/S RAN = Estadístico V de Hurst de la serie randomizada

4ª columna: STD = Desviación Típica del Estadístico V de Hurst

5ª columna: CA = Simulación del estadístico V deducido por Anis y Lloyd

6ª columna: LO = Estadístico V de Lo

7ª columna: STD LO = Desviación Típica del estadístico V de Lo

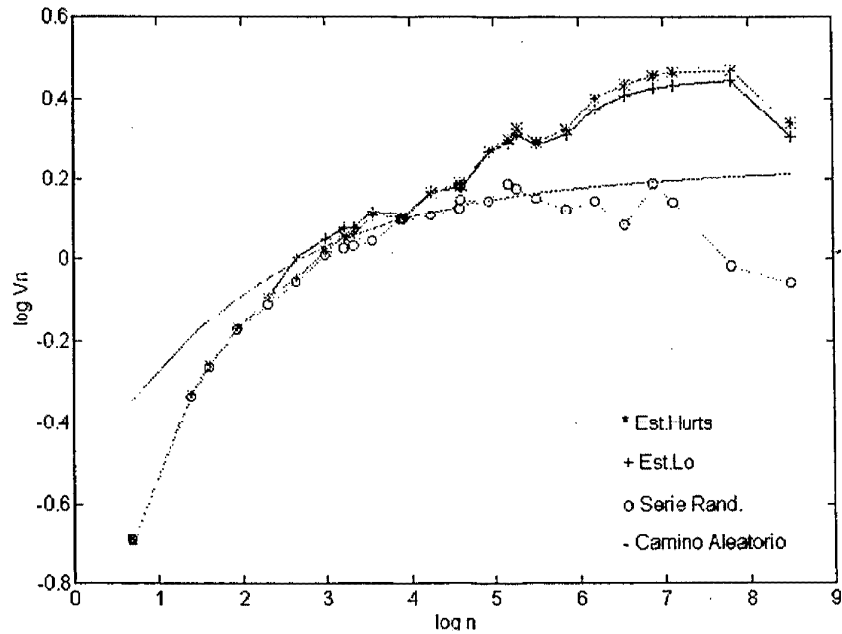


Figura 2.18

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo a la Serie de Tipo de Cambio Marco-Libra con datos diarios $N=4904$, durante el período Enero-1974 a Abril-1995

En la Figura 2.18 se observa claramente un proceso persistente en el tipo de cambio spot Marco-Libra indicando existencia de memoria a largo plazo. El estadístico de Lo modificado se comporta de forma muy similar al estadístico de Hurst, señalando con ello que los procesos de memoria detectados no se deben a valores significativos de la función de autocovarianza a corto plazo. El máximo local encontrado para valores de $\log n$ entre 5 y 6 parece sugerir la existencia de un ciclo no periódico de una amplitud aproximada comprendida $\exp(5)$ y $\exp(6)$. A continuación, en la Tabla 2.9 se observan los datos resultantes para la obtención del gráfico.

Tabla 2.9 Datos Obtenidos en la Serie de Tipo de Cambio Marco-Libra
(los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0002	0.0008	0.0014	0.0002
0.0050	0.0017	0.0017	0.0002	0.0009	0.0017	0.0002
0.0070	0.0022	0.0022	0.0004	0.0009	0.0022	0.0004
0.0100	0.0029	0.0028	0.0005	0.0010	0.0029	0.0005
0.0140	0.0036	0.0036	0.0007	0.0010	0.0038	0.0005
0.0200	0.0046	0.0045	0.0009	0.0010	0.0047	0.0008
0.0250	0.0053	0.0051	0.0011	0.0011	0.0054	0.0009
0.0280	0.0056	0.0055	0.0011	0.0011	0.0057	0.0009
0.0350	0.0066	0.0062	0.0014	0.0011	0.0067	0.0012
0.0490	0.0078	0.0077	0.0017	0.0011	0.0078	0.0014
0.0500	0.0079	0.0078	0.0017	0.0011	0.0079	0.0014
0.0700	0.0099	0.0093	0.0022	0.0011	0.0099	0.0018
0.0980	0.0120	0.0112	0.0023	0.0011	0.0119	0.0019
0.1000	0.0121	0.0116	0.0029	0.0011	0.0119	0.0025
0.1400	0.0155	0.0137	0.0033	0.0012	0.0155	0.0031
0.1750	0.0179	0.0160	0.0030	0.0012	0.0177	0.0029
0.1960	0.0194	0.0167	0.0035	0.0012	0.0191	0.0029
0.2450	0.0210	0.0182	0.0042	0.0012	0.0208	0.0036
0.3500	0.0259	0.0212	0.0069	0.0012	0.0255	0.0062
0.4900	0.0331	0.0256	0.0057	0.0012	0.0323	0.0053
0.7000	0.0410	0.0288	0.0070	0.0012	0.0399	0.0066
0.9800	0.0496	0.0378	0.0076	0.0012	0.0480	0.0062
1.2250	0.0559	0.0403	0.0103	0.0012	0.0540	0.0093
2.4500	0.0792	0.0486	0.0204	0.0012	0.0774	0.0217
4.9000	0.0982	0.0660	0	0.0012	0.0950	0

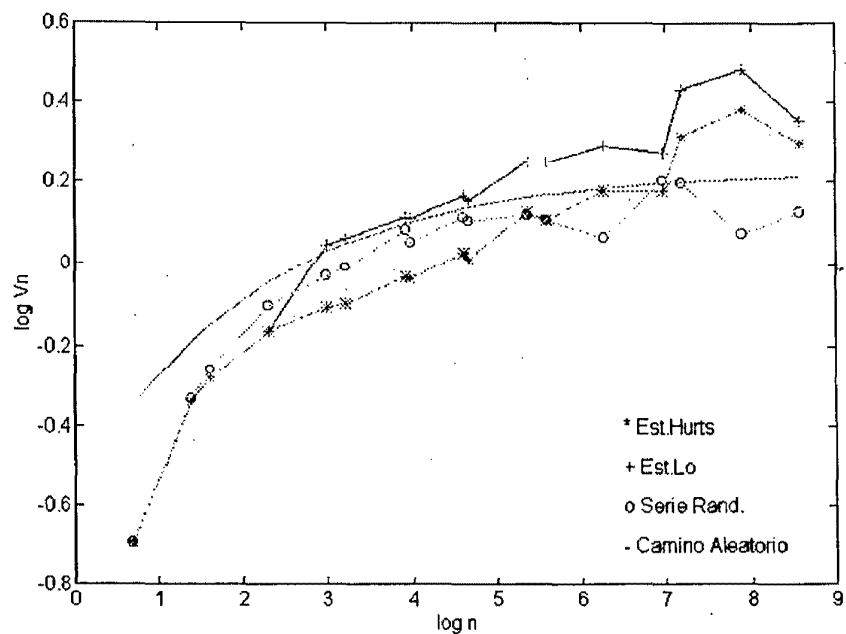


Figura 2.19

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo a la Serie de Tipo de Cambio Peseta-Marco con datos diarios $N=5322$, durante el periodo Enero-1974 a Abril-1995

La Figura 2.19 muestra que el hipotético proceso de Hurst señalado por el estadístico V_n en el tipo de cambio Peseta-Marco, queda desmentido por el estadístico modificado V_n^L que tiene un crecimiento similar al simulado por Anis y Lloyd del camino aleatorio. En el tipo de cambio Peseta-Marco no se aprecian por tanto síntomas de un proceso de memoria a largo plazo. En la Tabla 2.10 se muestran los datos obtenidos para la obtención de estos gráficos.

Tabla 2.10 Datos Obtenidos en la Serie de Tipo de Cambio Peseta-Marco
 (los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0002	0.0008	0.0014	0.0002
0.0050	0.0017	0.0017	0.0002	0.0009	0.0017	0.0002
0.0100	0.0027	0.0028	0.0005	0.0010	0.0027	0.0005
0.0200	0.0040	0.0043	0.0009	0.0010	0.0047	0.0008
0.0250	0.0045	0.0050	0.0011	0.0011	0.0053	0.0010
0.0500	0.0068	0.0077	0.0017	0.0011	0.0079	0.0014
0.0530	0.0070	0.0077	0.0017	0.0011	0.0081	0.0015
0.1000	0.0103	0.0112	0.0023	0.0011	0.0118	0.0021
0.1060	0.0104	0.0114	0.0025	0.0011	0.0120	0.0022
0.2120	0.0165	0.0165	0.0037	0.0012	0.0187	0.0033
0.2650	0.0181	0.0182	0.0036	0.0012	0.0209	0.0042
0.5300	0.0275	0.0246	0.0051	0.0012	0.0309	0.0046
1.0600	0.0390	0.0400	0.0041	0.0012	0.0428	0.0059
1.3250	0.0500	0.0443	0.0088	0.0012	0.0559	0.0153
2.6500	0.0753	0.0554	0.0259	0.0012	0.0832	0.0338
5.3000	0.0983	0.0828	0	0.0012	0.1038	0

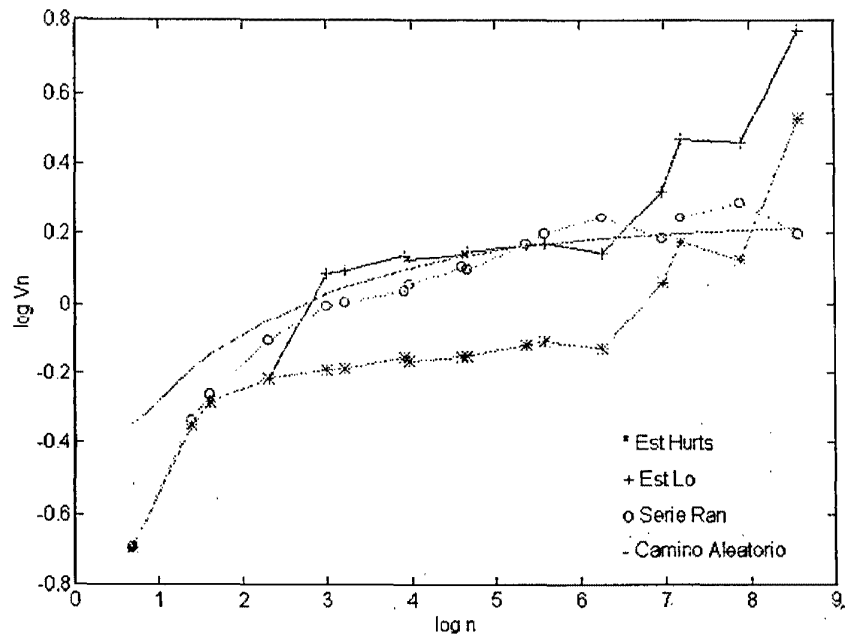


Figura 2.20

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo a la Serie de Tipo de Cambio Escudo-Marco con datos diarios $N=5342$, durante el periodo Enero-1974 a Abril-1995

En el tipo de cambio Escudo-Marco reflejado en la Figura 2.20 se observa antipersistencia del estadístico V de Hurst poco significativa, según indica la gráfica del estadístico V de Lo. La Tabla 2.11 muestra los datos obtenidos para la obtención del gráfico.

Tabla 2.11 Datos Obtenidos en la Serie de Tipo de Cambio Escudo-Marco
 (los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0002	0.0008	0.0014	0.0002
0.0050	0.0017	0.0017	0.0002	0.0009	0.0017	0.0002
0.0100	0.0026	0.0028	0.0005	0.0010	0.0026	0.0005
0.0200	0.0037	0.0045	0.0008	0.0010	0.0049	0.0008
0.0250	0.0042	0.0050	0.0010	0.0011	0.0055	0.0010
0.0500	0.0061	0.0074	0.0016	0.0011	0.0081	0.0014
0.0530	0.0062	0.0077	0.0017	0.0011	0.0082	0.0013
0.1000	0.0086	0.0111	0.0024	0.0011	0.0115	0.0019
0.1060	0.0089	0.0113	0.0026	0.0011	0.0119	0.0022
0.2120	0.0129	0.0172	0.0038	0.0012	0.0172	0.0037
0.2650	0.0146	0.0199	0.0038	0.0012	0.0193	0.0044
0.5300	0.0202	0.0294	0.0059	0.0012	0.0266	0.0060
1.0600	0.0346	0.0393	0.0121	0.0012	0.0449	0.0106
1.3250	0.0434	0.0466	0.0072	0.0012	0.0582	0.0057
2.6500	0.0583	0.0689	0.0002	0.0012	0.0814	0.0183
5.3000	0.1234	0.0887	0	0.0012	0.1575	0

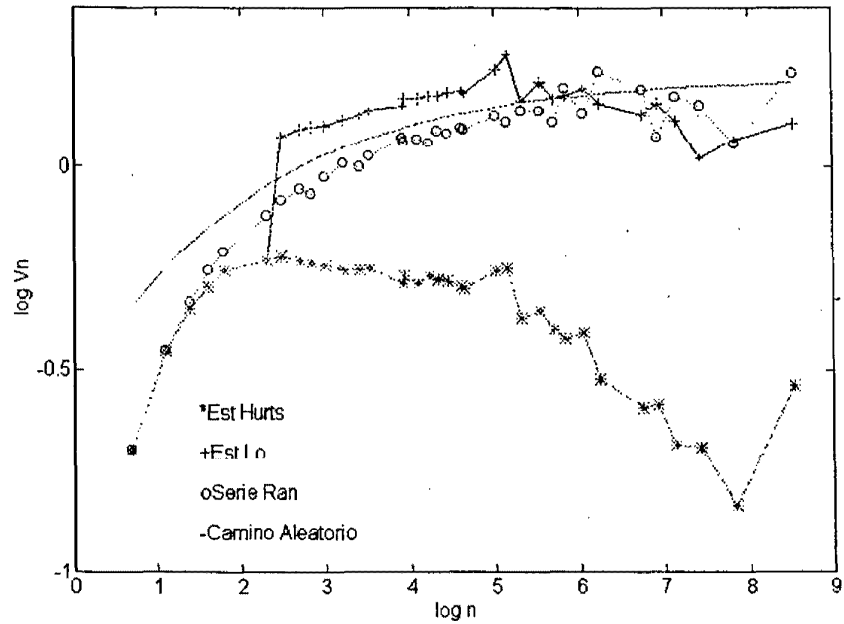


Figura 2.21

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo a la Serie de Tipo de Cambio Florín-Marco con datos diarios $N=5150$, durante el periodo Enero-1974 a Abril-1995

La Figura 2.21 indica que el tipo de cambio Florín-Marco muestra antipersistencia señalada por el estadístico de Hurst, pero no queda contrastada por el estadístico modificado de Lo con lo cual no es posible obtener conclusiones significativas. Los resultados numéricos obtenidos para la realización de estos gráficos se muestran en la Tabla 2.12.

Tabla 2.12 Datos Obtenidos en la Serie de Tipo de Cambio Florín-Marco
(los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0030	0.0011	0.0011	0.0000	0.0008	0.0011	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0002	0.0008	0.0014	0.0002
0.0050	0.0017	0.0017	0.0002	0.0009	0.0017	0.0002
0.0060	0.0019	0.0020	0.0003	0.0009	0.0019	0.0003
0.0100	0.0025	0.0028	0.0005	0.0010	0.0025	0.0005
0.0120	0.0028	0.0032	0.0005	0.0010	0.0037	0.0007
0.0150	0.0031	0.0037	0.0007	0.0010	0.0043	0.0008
0.0170	0.0033	0.0039	0.0007	0.0010	0.0046	0.0009
0.0200	0.0035	0.0044	0.0008	0.0010	0.0050	0.0009
0.0250	0.0039	0.0050	0.0010	0.0011	0.0056	0.0011
0.0300	0.0043	0.0055	0.0011	0.0011	0.0063	0.0012
0.0340	0.0045	0.0060	0.0012	0.0011	0.0067	0.0013
0.0500	0.0053	0.0076	0.0015	0.0011	0.0083	0.0016
0.0510	0.0055	0.0076	0.0016	0.0011	0.0085	0.0018
0.0600	0.0058	0.0083	0.0016	0.0011	0.0092	0.0020
0.0680	0.0063	0.0088	0.0021	0.0011	0.0099	0.0021
0.0750	0.0066	0.0095	0.0020	0.0011	0.0103	0.0020
0.0850	0.0069	0.0101	0.0021	0.0011	0.0111	0.0023
0.1000	0.0074	0.0110	0.0025	0.0011	0.0121	0.0025
0.1020	0.0075	0.0111	0.0025	0.0011	0.0121	0.0028
0.1500	0.0095	0.0139	0.0034	0.0012	0.0156	0.0031
0.1700	0.0101	0.0146	0.0035	0.0012	0.0172	0.0035
0.2040	0.0099	0.0165	0.0034	0.0012	0.0169	0.0038
0.2550	0.0112	0.0184	0.0039	0.0012	0.0197	0.0047
0.3000	0.0116	0.0194	0.0043	0.0012	0.0206	0.0043
0.3400	0.0121	0.0224	0.0036	0.0012	0.0220	0.0051
0.4250	0.0137	0.0236	0.0042	0.0012	0.0251	0.0047
0.5100	0.0134	0.0286	0.0034	0.0012	0.0265	0.0062
0.8500	0.0162	0.0354	0.0032	0.0012	0.0333	0.0062
1.0200	0.0178	0.0346	0.0031	0.0012	0.0375	0.0077
1.2750	0.0181	0.0426	0.0025	0.0012	0.0401	0.0115
1.7000	0.0208	0.0481	0.0041	0.0012	0.0421	0.0029
2.5500	0.0220	0.0535	0.0011	0.0012	0.0542	0.0217
5.1000	0.0417	0.0903	0	0.0012	0.0799	0

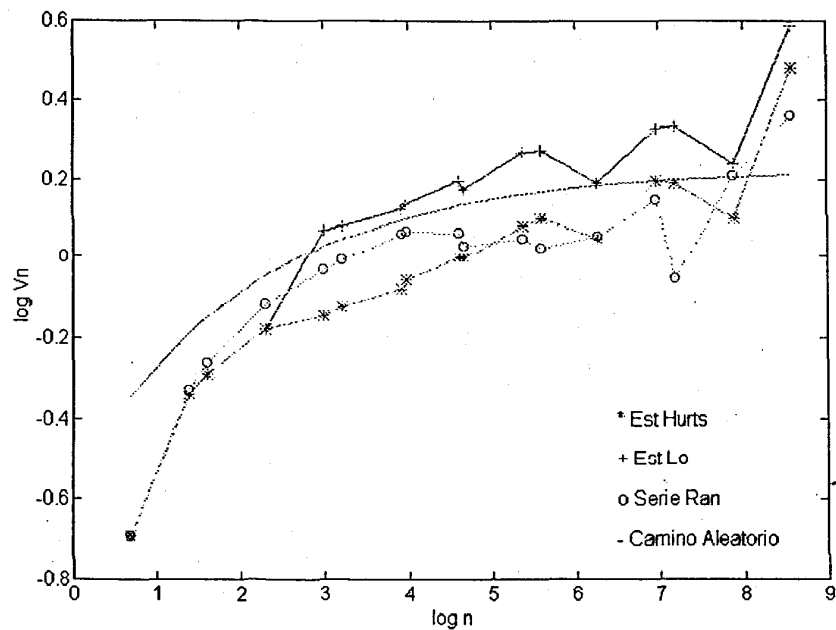


Figura 2.22

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo a la Serie de Tipo de Cambio Franco-Marco con datos diarios $N=5303$, durante el periodo Enero-1974 a Abril-1995

Del análisis obtenido para el tipo de cambio Franco-Marco, que nos muestra la Figura 2.22, se observa una clara antipersistencia tal y como indica el estadístico de Hurst, pero no es posible contrastarla mediante el estadístico Vde Lo modificado. Los resultados numéricos se presentan en la Tabla 2.13.

Tabla 2.13 Datos Obtenidos en la Serie de Tipo de Cambio Franco-Marco

(los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0002	0.0008	0.0014	0.0002
0.0050	0.0017	0.0017	0.0002	0.0009	0.0017	0.0002
0.0100	0.0026	0.0028	0.0005	0.0010	0.0026	0.0005
0.0200	0.0039	0.0043	0.0010	0.0010	0.0048	0.0009
0.0250	0.0044	0.0050	0.0011	0.0011	0.0054	0.0010
0.0500	0.0065	0.0075	0.0016	0.0011	0.0080	0.0015
0.0530	0.0069	0.0078	0.0018	0.0011	0.0084	0.0015
0.1000	0.0100	0.0107	0.0023	0.0011	0.0122	0.0021
0.1060	0.0103	0.0106	0.0029	0.0011	0.0123	0.0022
0.2120	0.0158	0.0153	0.0045	0.0012	0.0191	0.0033
0.2650	0.0181	0.0167	0.0042	0.0012	0.0214	0.0035
0.5300	0.0242	0.0244	0.0061	0.0012	0.0279	0.0063
1.0600	0.0397	0.0378	0.0120	0.0012	0.0452	0.0115
1.3250	0.0441	0.0345	0.0098	0.0012	0.0509	0.0097
2.6500	0.0571	0.0635	0.0100	0.0012	0.0654	0.0073
5.3000	0.1177	0.1043	0	0.0012	0.1312	0

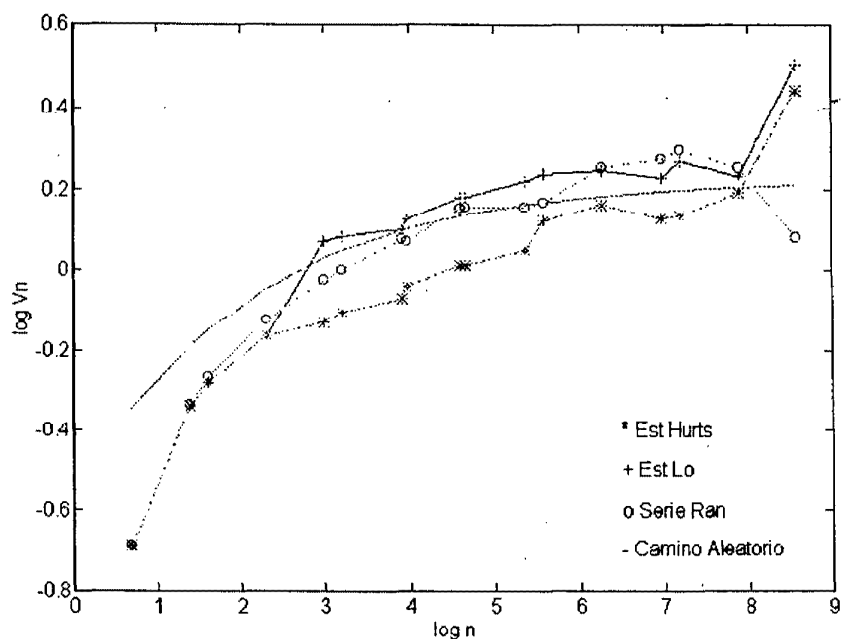


Figura 2.23

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo a la Serie de Tipo de Cambio Lira-Marco con datos diarios $N=5354$, durante el periodo Enero-1974 a Abril-1995

Para el tipo de cambio Lira-Marco observamos resultados similares a los obtenidos por los tipos de cambio Franco-Marco y Flórin-Marco. Los tres muestran antipersistencia indicada por el estadístico V de Hurst, concluyendo que el estadístico V de Lo modificado no permite deducir conclusiones significativas. Los datos numéricos obtenidos se muestran en la Tabla 2.14.

En general, para las series de tipos de cambio, los resultados no sugieren ninguna relación, para las monedas y períodos analizados, entre persistencia y credibilidad de los compromisos cambiarios asumidos por las autoridades monetarias de los países correspondientes.

Tabla 2.14 Datos Obtenidos en la Serie de Tipo de Cambio Lira-Marco

(los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0002	0.0008	0.0014	0.0002
0.0050	0.0017	0.0017	0.0002	0.0009	0.0017	0.0002
0.0100	0.0027	0.0028	0.0005	0.0010	0.0027	0.0005
0.0200	0.0039	0.0044	0.0009	0.0010	0.0048	0.0009
0.0250	0.0045	0.0050	0.0010	0.0011	0.0054	0.0010
0.0500	0.0066	0.0076	0.0019	0.0011	0.0078	0.0015
0.0530	0.0070	0.0078	0.0021	0.0011	0.0083	0.0016
0.1000	0.0101	0.0117	0.0028	0.0011	0.0120	0.0025
0.1060	0.0104	0.0121	0.0029	0.0011	0.0123	0.0021
0.2120	0.0153	0.0171	0.0046	0.0012	0.0182	0.0030
0.2650	0.0185	0.0193	0.0058	0.0012	0.0207	0.0036
0.5300	0.0271	0.0297	0.0101	0.0012	0.0295	0.0058
1.0600	0.0371	0.0430	0.0116	0.0012	0.0410	0.0062
1.3250	0.0417	0.0491	0.0106	0.0012	0.0478	0.0022
2.6500	0.0626	0.0664	0.0047	0.0012	0.0651	0.0058
5.3000	0.1135	0.0789	0	0.0012	0.1205	0

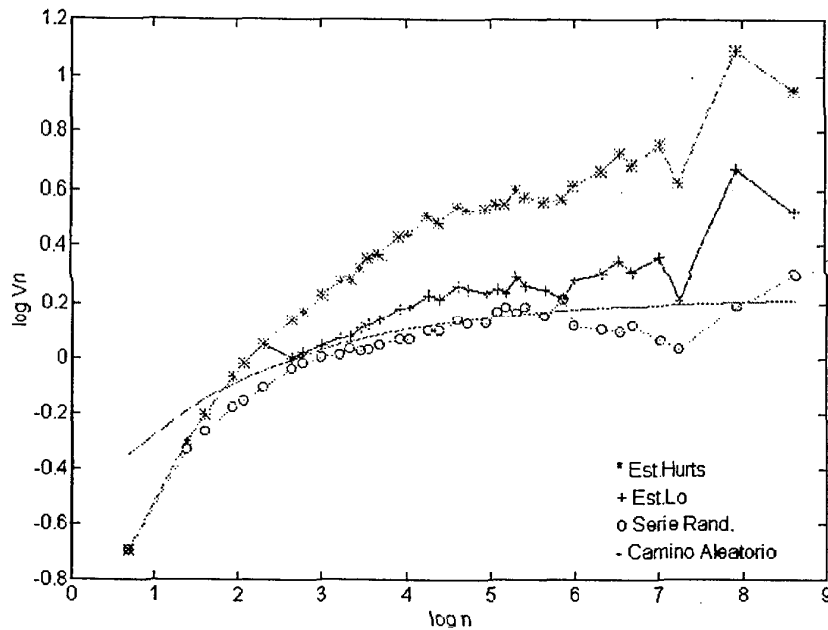


Figura 2.24

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo al Índice General de la Bolsa de Madrid con datos diarios $N=5605$, durante el periodo Enero-1966 a Julio-1992

En el análisis de la Figura 2.24 se observa un proceso persistente indicando existencia de memoria a largo plazo en el Índice General de la Bolsa de Madrid. El estadístico de Lo modificado se comporta de forma muy similar al estadístico de Hurst, por tanto los procesos de memoria no se deben a valores significativos de la función de autocovarianza a corto plazo. No obstante, los valores del estadístico V modificado de Lo se muestran superiores a la simulación de Anis y Lloyd de forma menos significativa que el estadístico V de Hurst. Esto concuerda con el estudio realizado por Blasco y Santamaría (1994). A continuación, en la Tabla 2.15 se observan los datos resultantes para la obtención del gráfico.

Tabla 2.15 Datos Obtenidos en el Índice General de la Bolsa de Madrid
(los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0015	0.0014	0.0001	0.0008	0.0015	0.0001
0.0050	0.0018	0.0017	0.0002	0.0009	0.0018	0.0002
0.0070	0.0025	0.0022	0.0004	0.0009	0.0025	0.0004
0.0080	0.0028	0.0024	0.0004	0.0009	0.0028	0.0004
0.0100	0.0033	0.0028	0.0006	0.0010	0.0033	0.0006
0.0140	0.0043	0.0036	0.0008	0.0010	0.0037	0.0005
0.0160	0.0047	0.0039	0.0009	0.0010	0.0041	0.0006
0.0200	0.0056	0.0045	0.0012	0.0010	0.0047	0.0007
0.0250	0.0066	0.0051	0.0015	0.0011	0.0054	0.0008
0.0280	0.0070	0.0055	0.0016	0.0011	0.0057	0.0008
0.0320	0.0078	0.0058	0.0017	0.0011	0.0063	0.0008
0.0350	0.0084	0.0061	0.0018	0.0011	0.0067	0.0010
0.0400	0.0092	0.0066	0.0019	0.0011	0.0073	0.0010
0.0500	0.0109	0.0076	0.0023	0.0011	0.0085	0.0013
0.0560	0.0116	0.0080	0.0026	0.0011	0.0090	0.0014
0.0700	0.0139	0.0093	0.0034	0.0011	0.0105	0.0018
0.0800	0.0145	0.0099	0.0033	0.0011	0.0111	0.0021
0.1000	0.0172	0.0115	0.0035	0.0011	0.0130	0.0022
0.1120	0.0180	0.0120	0.0038	0.0012	0.0136	0.0026
0.1400	0.0201	0.0135	0.0042	0.0012	0.0150	0.0029
0.1600	0.0219	0.0150	0.0045	0.0012	0.0163	0.0030
0.1750	0.0229	0.0159	0.0038	0.0012	0.0168	0.0031
0.2000	0.0258	0.0167	0.0039	0.0012	0.0190	0.0035
0.2240	0.0266	0.0180	0.0052	0.0012	0.0194	0.0033
0.2800	0.0293	0.0195	0.0043	0.0012	0.0214	0.0036
0.3500	0.0330	0.0233	0.0067	0.0012	0.0234	0.0037
0.4000	0.0371	0.0225	0.0064	0.0012	0.0265	0.0039
0.5600	0.0461	0.0262	0.0113	0.0012	0.0321	0.0048
0.7000	0.0548	0.0291	0.0163	0.0012	0.0375	0.0090
0.8000	0.0563	0.0318	0.0141	0.0012	0.0386	0.0079
1.1200	0.0714	0.0357	0.0220	0.0012	0.0482	0.0099
1.4000	0.0699	0.0387	0.0162	0.0012	0.0463	0.0066
2.8000	0.1577	0.0641	0.0382	0.0012	0.1037	0.0188
5.6000	0.1934	0.1010	0	0.0012	0.1261	0

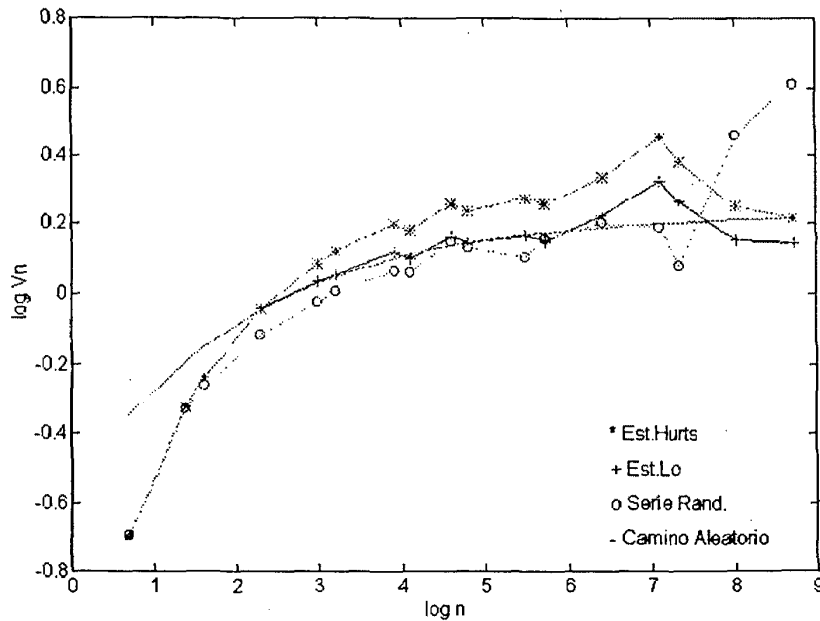


Figura 2.25

Análisis del Estadístico V_n de Hurst y del Estadístico V_n^L modificado de Lo al Índice S&P de la Bolsa de Nueva York con datos diarios $N=6140$, durante el periodo Enero-1968 a Mayo-1992

El estadístico V de Hurst da signos de existencia de memoria a largo plazo en el análisis del Índice S&P de la Bolsa de Nueva York. Tales signos se muestran poco significativos ya que el estadístico V modificado de Lo evoluciona siguiendo las pautas de Anis y Lloyd para el camino aleatorio. Los resultados numéricos se muestran en la Tabla 2.16.

Tabla 2.16 Datos Obtenidos en el Indice S&P de la Bolsa de Nueva York
 (los datos vienen dados de la forma 1.0e+003)

n	R/S	R/S RAND	STD	CA	LO	STD LO
0.0020	0.0007	0.0007	0.0000	0.0007	0.0007	0.0000
0.0040	0.0014	0.0014	0.0001	0.0008	0.0014	0.0001
0.0050	0.0018	0.0017	0.0002	0.0009	0.0018	0.0002
0.0100	0.0030	0.0028	0.0005	0.0010	0.0030	0.0005
0.0200	0.0049	0.0044	0.0010	0.0010	0.0046	0.0007
0.0250	0.0056	0.0050	0.0011	0.0011	0.0053	0.0008
0.0500	0.0086	0.0075	0.0020	0.0011	0.0079	0.0015
0.0610	0.0093	0.0083	0.0022	0.0011	0.0086	0.0017
0.1000	0.0129	0.0116	0.0030	0.0011	0.0118	0.0023
0.1220	0.0140	0.0126	0.0033	0.0012	0.0128	0.0025
0.2440	0.0205	0.0173	0.0050	0.0012	0.0185	0.0033
0.3050	0.0225	0.0204	0.0052	0.0012	0.0202	0.0038
0.6100	0.0346	0.0302	0.0077	0.0012	0.0308	0.0055
1.2200	0.0550	0.0421	0.0159	0.0012	0.0483	0.0102
1.5250	0.0573	0.0422	0.0154	0.0012	0.0509	0.0105
3.0500	0.0708	0.0872	0.0151	0.0012	0.0643	0.0070
6.1000	0.0968	0.1439	0	0.0012	0.0903	0

2.5. Patrones de Comportamiento y Predictores Locales en Series Temporales

Con frecuencia se habla de la existencia de comportamiento caótico dentro de las series financieras. La teoría del caos determinista ha posibilitado la modelización y predicción de muchas series temporales consideradas tradicionalmente como ruidos de comportamiento puramente aleatorio. No obstante, la detección empírica de dinámicas deterministas, no lineales, caóticas, es un problema extremadamente sutil debido a que la reconstrucción del atractor es sumamente sensible a los parámetros usados en los tests no lineales (Chen, 1992).

En ciencias como la Economía, el debate entre la existencia de comportamiento aleatorio o caótico es más agudo, si cabe, debido a que la longitud de las series disponibles es, por lo general, demasiado pequeña para garantizar la fiabilidad estadística de los tests que suelen usarse para detectar el caos.

Diversos autores como Ramsey, Sayers y Rothman (1990), concluyen que los métodos clásicos de detección experimental del caos, tales como la Dimensión de Correlación, los Exponentes de Lyapunov y la Entropía de Kolmogorov, no pueden aplicarse de modo fiable a pequeños grupos de datos tales como los que se utilizan en la Economía.

En la presente sección desarrollamos un contraste para comprobar la existencia de patrones de comportamiento en una serie temporal en apariencia ruidosa por medio de la predicción. Para ello nos basaremos en la idea de que en una serie temporal caótica es posible realizar predicciones a corto plazo a base del estudio de

patrones de comportamiento, análogos al presente, ocurridos en el pasado. Esta situación no se daría en el caso del ruido blanco.

El método que usaremos en este apartado para detectar el determinismo en una serie consiste en analizar, para cada una de las observaciones finales de la serie, en nuestras simulaciones hemos considerado las cien últimas, las posibilidades de predicción a corto plazo. Estudiaremos si los puntos del espacio de fases reconstruido se comportan de acuerdo al principio de predicción por ocurrencias análogas, es decir, tratamos de ver si puntos próximos evolucionan, a corto plazo, con trayectorias similares dentro del espacio de fase.

Nuestro método puede ser considerado como un caso particular del test BDS, porque permite analizar separadamente las posibilidades de predicción de los diferentes patrones de comportamiento dentro de una serie temporal.

Seguimos igualmente la idea central de Farmer y Sidorowich (1987) o Sugihara y May (1990). Tales autores consideran que la posibilidad de hacer predicciones a corto plazo es crucial para detectar la presencia de caos. En esta misma línea, en Bajo, Fernández y Sosvilla (1992a,b) se realizaron este tipo de predicciones sobre series de tipos de cambio que mejoran las del camino aleatorio.

Con el fin de separar el comportamiento aleatorio del determinístico no lineal, usaremos varias técnicas no paramétricas de predicción por ocurrencias análogas, introducidas ya por Farmer y Sidorowich (1987), y que describimos a continuación.

Dada una serie temporal $\{x_1, \dots, x_n\}$, un predictor es simplemente una regla para obtener una estimación \hat{x}_{n+1} para la observación siguiente a la última de

la serie.

La predicción por ocurrencias análogas es una técnica de predicción donde los segmentos de observaciones sucesivas con un comportamiento dinámico similar son empleados para predecir, por extrapolación, el término siguiente al que ocupa el final de la serie. Este término se calcula como algún tipo de promedio de las observaciones siguientes a los segmentos que se utilizan. En Gershenfeld y Weigend (1994) podemos encontrar una panorámica amplia y actual de este tipo de predicciones.

La ocurrencia análoga en un comportamiento dinámico se mide en términos de algún concepto métrico del espacio vectorial real d-dimensional: puntos próximos en el espacio de fase reconstruido corresponden a segmentos similares en la serie temporal. Generalmente se emplea la distancia euclídea entre puntos, aunque, en muchos casos, pueden emplearse conceptos más sofisticados.

La forma más común de buscar la ocurrencia análoga a x_n^d (según la notación introducida en la secc. 2.3) consiste en encontrar un determinado número k de puntos x_i^d del espacio de fases

$$x_i^d = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-(d-1)})$$

que minimicen la función $\|x_i^d - x_n^d\|$. Alternativamente, podemos minimizar cualquiera de las funciones: $1 - \rho(x_i^d, x_n^d)$ ó $1 - \cos(x_i^d, x_n^d)$.

En Fernández-Rodríguez (1992) se establece la equivalencia entre las ocurrencias análogas que se obtienen al utilizar las tres funciones para una serie

caótica. LeBaron (1990) estudia la función de ocurrencias análogas $\|x_t^d\| - \|x_n^d\|$. En tal caso, la información previa que se considera para realizar la predicción es la volatilidad de la última d-historia x_n^d de la serie temporal.

Suelen emplearse cotas superiores e inferiores en el número de puntos próximos (NPP) a la hora de construir el predictor (Farmer y Sidorowich, 1988). Esta es una cuestión no trivial, especialmente cuando el número de datos de la serie no es demasiado pequeño ni demasiado elevado. Nosotros emplearemos aproximadamente el 2% del número total de observaciones de la serie.

Contrastaremos la existencia de patrones de comportamiento estudiando las posibilidades de predicción por ocurrencias análogas. Para ello se analiza la calidad de las predicciones de los sucesivos datos de la serie. Cada predicción utiliza todas las observaciones inmediatamente anteriores, generando una serie paralela de predicciones que puede ser comparada con la serie original. La calidad predictiva puede ser establecida por medio del estadístico

$$E(n+1) = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (X_{n,i} - \hat{X}_{n,i})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{100} (X_{n,i} - \bar{X})^2}} = \frac{\text{ECM}}{\text{STD}}$$

donde \bar{X} es la media aritmética de las observaciones y donde el cociente ECM/STD indica el error cuadrático medio dividido por la desviación típica.

Si $E(n+1) < 1$, nuestra predicción es más precisa que la predicción constante dada por la media de la serie, y por lo tanto muestra patrones de comportamiento.

Si $E(n+1) > 1$, la predicción es peor que la proporcionada por la media y en consecuencia no es posible detectar patrones de comportamiento.

Tales errores permiten también la obtención de diversas medidas de volatilidad para series financieras (Bajo, Fernández y Sosvilla, 1992b), (Bajo, Fernández, Mora y Sosvilla, 1994) y (Fernández-Rodríguez y Mora, 1995).

Dada la serie temporal $\{x_1, \dots, x_n\}$, consideraremos ahora los predictores autorregresivos ajustados localmente

$$\hat{x}_{n+1} = a_0(n)x_n + a_1(n)x_{n-1} + \dots + a_{d-1}(n)x_{n-(d-1)} + b_0(n)$$

cuyos coeficientes se ajustarán localmente en el punto x_n^d a partir del cual realizamos la predicción. Estos predictores se construyen por medio de una regresión mínimo cuadrática basada en los k puntos más próximos a x_n^d , esto es: $x_{j_1}^d, \dots, x_{j_k}^d$ y las observaciones siguientes en la serie a cada uno de tales puntos $x_{j_1,1}, \dots, x_{j_k,1}$, de modo que la suma cuadrática de los errores $\sum_{i=1}^k (x_{j_i,1} - \hat{x}_{j_i,1})^2$ sea mínima. Este tipo de predictores está ampliamente estudiado en Fernández-Rodríguez (1992).

La predicción de los datos está condicionada por dos parámetros que deben ser elegidos a priori, la dimensión de inmersión (DI) y el número de puntos próximos (NPP).

Para series caóticas, el teorema de Takens (1981) asegura que si de un sistema dinámico m -dimensional extraemos como observable una única serie temporal, de modo genérico, la dinámica reconstruida por medio del espacio de fases \mathbb{R}^d de la serie es equivalente para $d > 2m$, a la dinámica del sistema original. En la práctica,

existe un procedimiento simple para determinar la DI adecuada para realizar predicciones en una serie temporal, basado en minimizar el error cuadrático medio de predicción.

Para una mejor comprensión del funcionamiento de nuestro contraste de predicibilidad, lo hemos aplicado a la serie temporal de Lorenz diferenciada con $N=2000$ observaciones. Los resultados obtenidos se ilustran en la Figura 2.26. Las dimensiones de inmersión DI oscilan entre 2 y 10. El cociente ECM/STD indica el error cuadrático medio dividido por la desviación típica. En la medida que éste cociente sea inferior al valor uno se entenderá que la predicción realizada mejora la del camino aleatorio. El número de puntos próximos NNP se ha tomado aproximadamente igual al 2% del número total de observaciones de la serie. En la Figura 2.26, y para cada una de las dimensiones de inmersión consideradas, se advierte que los errores de predicción se muestran considerablemente inferiores a los de un modelo de camino aleatorio cuya mejor predicción es la media de la serie.

También hemos generado la serie precio obtenida en el modelo discreto de dos ecuaciones (Cap. 1, Secc. 1.1), en el rango de parámetros donde hemos probado que el modelo tiene un comportamiento caótico. Los resultados del contraste de predicción se pueden observar en la Figura 2.27. El número de puntos próximos considerados es de 60, que corresponden igualmente al 2% del total de observaciones de la serie. Notamos para la serie precio, que los errores de predicción también se muestran inferiores a los de un modelo de camino aleatorio, ya que para todas las dimensiones de inmersión analizadas el cociente entre el error cuadrático medio y la desviación típica resulta menor que uno.

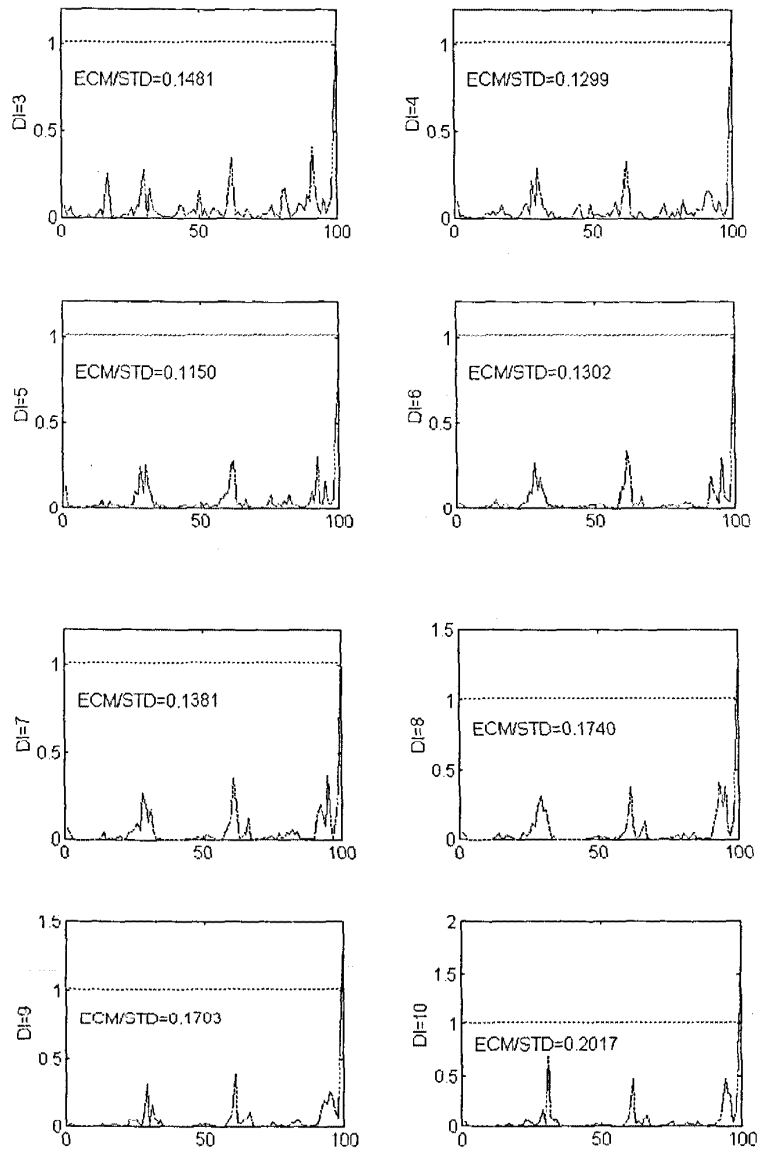


Figura 2.26
 Aplicación del Contraste de Predecibilidad por Ocurrencias Análogas a la Serie Temporal de Lorenz diferenciada con $N=2000$ observaciones, considerando las Dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 10. Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la obtenida por el camino aleatorio

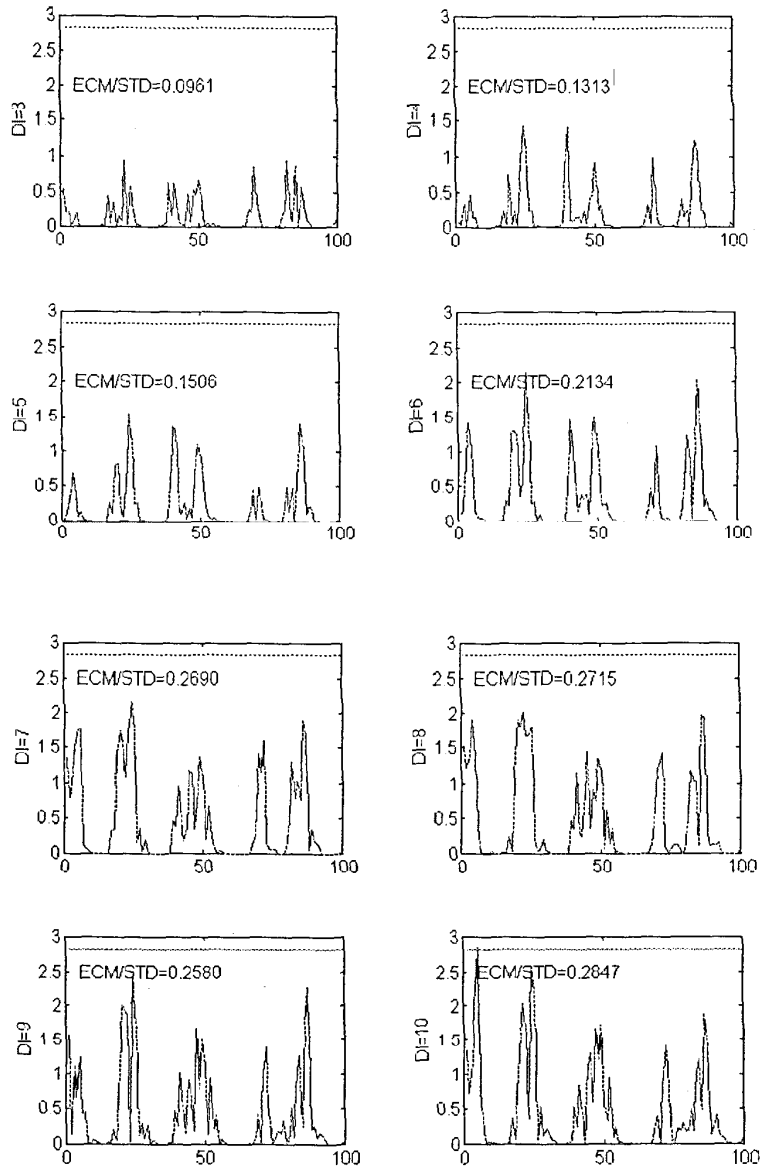


Figura 2.27
 Aplicación del Contraste de Predecibilidad por Ocurrencias Análogas a la Serie Temporal del Precio Generada por el Modelo Discreto con $N=3000$ observaciones, considerando las Dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 10.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la obtenida por el camino aleatorio

Con el fin de detectar patrones de comportamiento que posibilitarían la predicción por ocurrencias análogas, hemos aplicado el contraste de predecibilidad a las series spot de Tipos de Cambio Peseta, Escudo, Franco, Libra, Florín y Lira frente al Marco, con datos diarios de aproximadamente $N=4000$ observaciones, durante el período Enero-1974 a Abril-1992. También hemos realizado el contraste de predecibilidad a las Series de Rentabilidades del Índice General de la Bolsa de Madrid en el período Enero-1966 a Julio-91 y al Índice S&P de la Bolsa de Nueva York en el período Enero-1968 a Abril-1991.

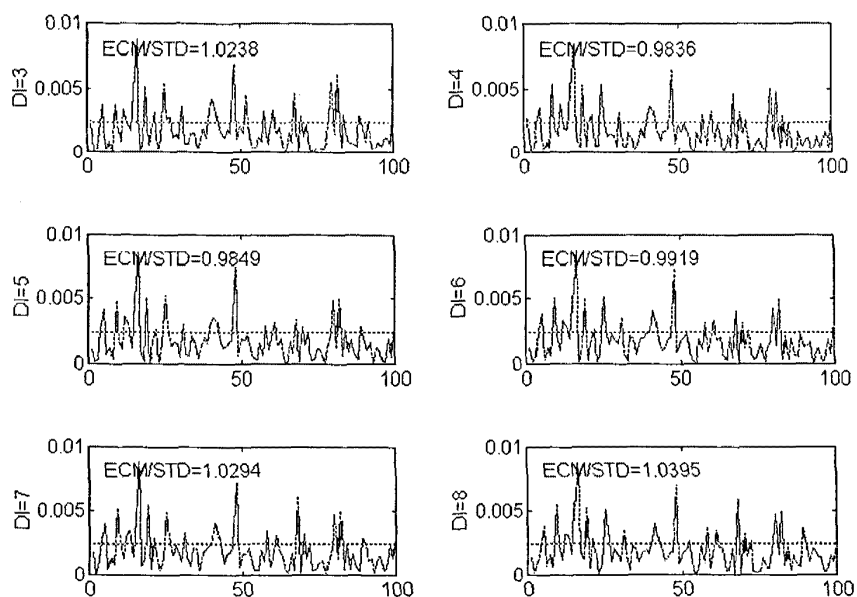


Figura 2.28

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad a la Serie de Tipo de Cambio Peseta-Marco
 $N=4000$ observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

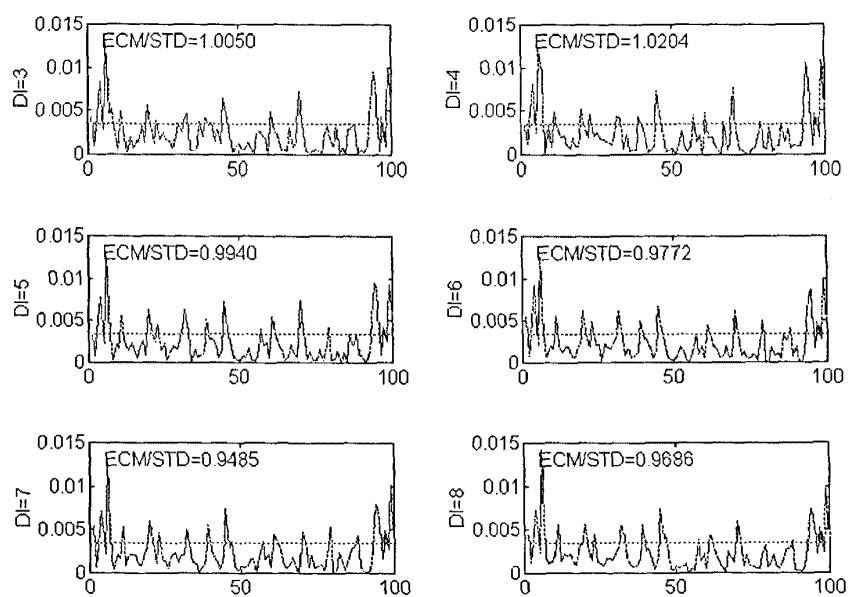


Figura 2.29

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad a la Serie de Tipo de Cambio Escudo-Marco
 $N=4500$ observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

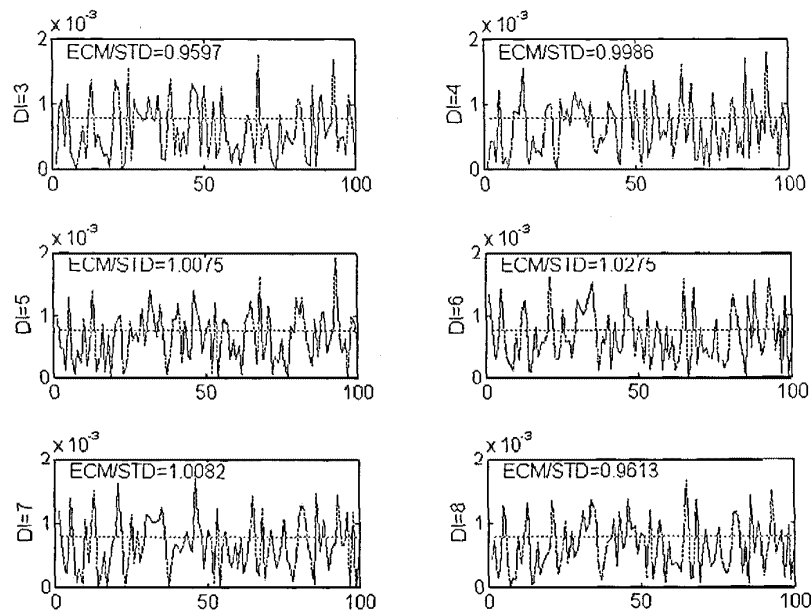


Figura 2.30

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad a la Serie de Tipo de Cambio Franco-Marco
 N=4500 observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

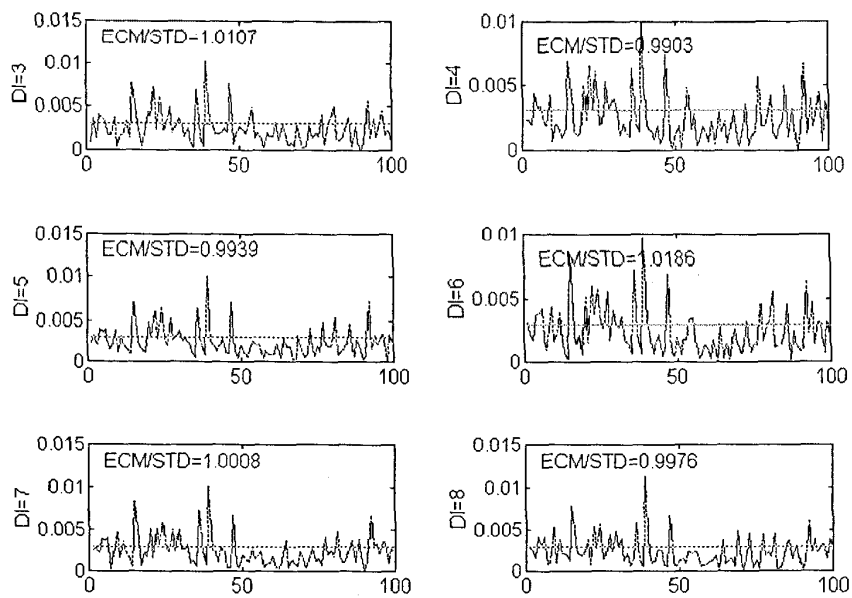


Figura 2.31

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad a la Serie de Tipo de Cambio Libra-Marco
 $N=4000$ observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

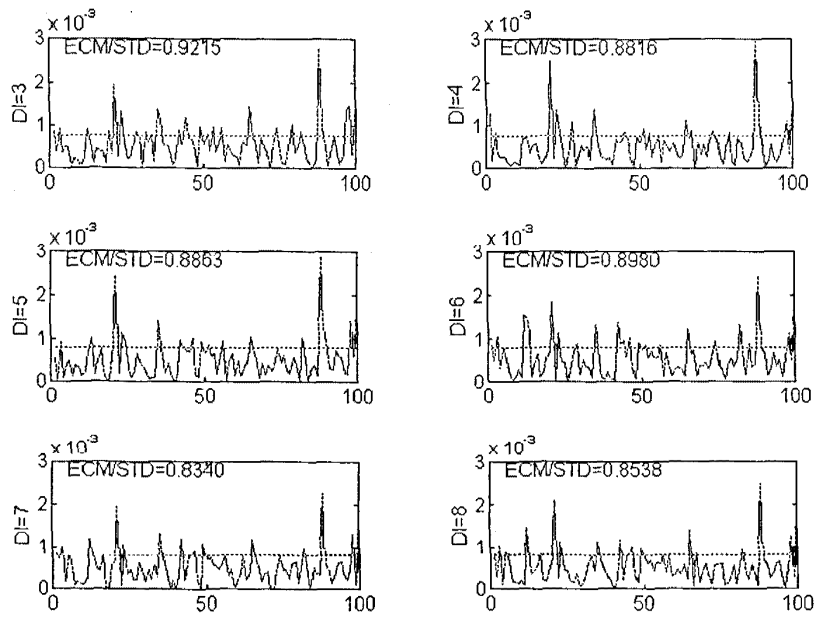


Figura 2.32

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad a la Serie de Tipo de Cambio Florín-Marco
 N=4500 observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

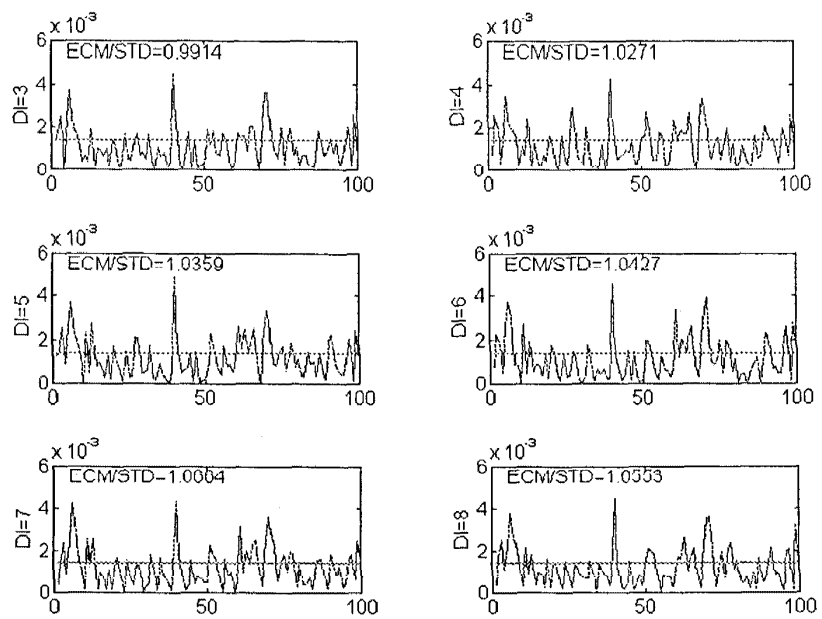


Figura 2.33

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad a la Serie de Tipo de Cambio Lira-Marco
 $N=4700$ observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

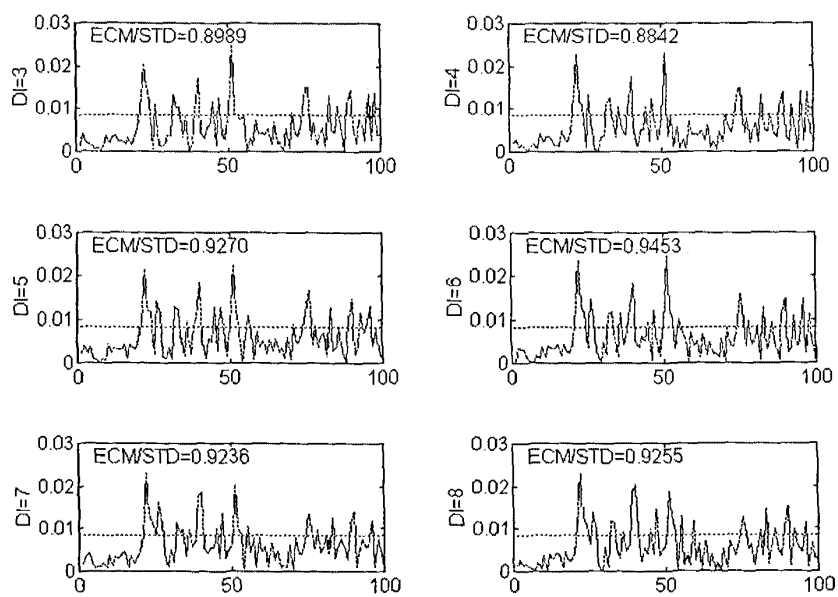


Figura 2.34

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad al Índice General de la Bolsa de Madrid
 N=4000 observaciones, considerando las dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

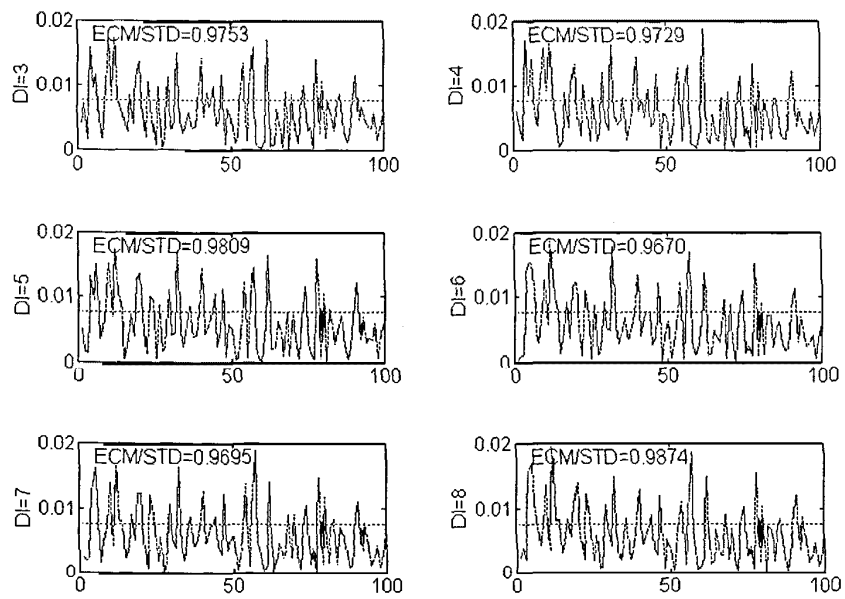


Figura 2.35

*Aplicación del Contraste de Predecibilidad al Índice S&P de la Bolsa de Nueva York
 N=4000 observaciones, considerando las Dimensiones de Inmersión DI entre 3 y 8.
 Si $ECM/STD < 1$, la predicción mejora a la del camino aleatorio.*

Los resultados de las predicciones a corto plazo realizadas en las diversas series financieras pueden resumirse de la siguiente forma.

Detectamos la existencia de determinados tramos dentro de dichas series donde nuestro contraste de predecibilidad es inferior a uno, revelando por tanto la posibilidad potencial de realizar predicciones que mejoran las del camino aleatorio. Junto con estos tramos predecibles, que en el contraste tienen una longitud superior a 100 observaciones consecutivas, aparecen otros tramos donde las predicciones son considerablemente inferiores a las del camino aleatorio.

Concretamente, el Índice S&P de la Bolsa de Nueva York contiene tramos de 100 datos consecutivos donde nuestro contraste de predecibilidad varía, para dimensiones de inmersión entre 3 y 8, entre los valores 0.9670 y 0.9874. Por otra parte, el contraste de predecibilidad aplicado al Índice General de la Bolsa de Madrid, durante el mismo período, oscila entre los valores 0.8842 y 0.9453. En ambas series pueden también detectarse otros tramos claramente impredecibles. Estos resultados están resumidos en la Tabla 2.5.1.

Figura	Indices	Valores Contraste Predecib.
2.34	General Bolsa Madrid	0.8842 - 0.9453
2.35	S&P Bolsa Nueva York	0.9670 - 0.9874

Tabla 2.5.1.

**Valores obtenidos en el Contraste de Predecibilidad
para las Series de Rentabilidades**

En los tipos de cambio hemos analizado las series en la etapa inmediatamente anterior a las sucesivas tormentas monetarias que se desencadenan a partir de 1992. El resultado del contraste de predecibilidad está estrechamente relacionado a la divisa que se utilice. Así, el tipo de cambio Florín-Marco muestra períodos de más de 100 observaciones consecutivas de muy buena predecibilidad, donde nuestro contraste varía entre 0.8340 y 0.9215 para las diferentes dimensiones de inmersión consideradas. A excepción de éste caso, el contraste de predecibilidad sobre las distintas series de tipos de cambio no detecta claramente la posibilidad de predicciones mejores que el camino aleatorio. Los resultados obtenidos están resumidos en la Tabla 2.5.2.

Figura	Tipo de Cambio	Valores Contraste Predecib.
2.28	Peseta-Marco	0.9836 - 1.0395
2.29	Escudo-Marco	0.9485 - 1.0204
2.30	Franco-Marco	0.9597 - 1.0275
2.31	Libra-Marco	0.9903 - 1.0186
2.32	Florín-Marco	0.8340 - 0.9215
2.33	Lira-Marco	0.9914 - 1.0664

Tabla 2.5.2.
Valores obtenidos en el Contraste de Predecibilidad
para los Tipos de Cambio

Teniendo en cuenta que los errores de predicción señalados pueden ser considerados como una medida de volatilidad local de las series temporales. [Ver (Bajo, Fernández, Mora y Sosvilla, 1994) o (Fernández-Rodríguez y Mora, 1995)]. Notamos que aparece una cierta tendencia a obtener medidas de volatilidad inferiores para aquellas monedas (Florín, Franco y en algunos periodos para la Peseta) cuyas bandas de actuación fueron creíbles en la mayor parte del período analizado. Mientras que para el caso de la Lira y la Libra se obtiene un aumento de la volatilidad tras el abandono del mecanismo de cambio del Sistema Monetario Europeo. Estos resultados están en línea con los presentados por (Sosvilla, Fernández, Bajo y Martín, 1994).

CONCLUSIONES

1. El caos determinista constituye una herramienta matemática muy útil para describir el comportamiento de un mercado financiero. El caos parece ser la forma más plausible de determinismo en los modelos que explican la dinámica del comportamiento especulativo, con el fin de evitar la paradoja de la predecibilidad (toda profecía sobre el valor de las cotizaciones se anula a sí misma).

Los modelos que presentan caos determinista no se muestran en abierta contradicción con la teoría de los Mercados Eficientes si la dimensión del modelo es suficientemente elevada. Basta tener en cuenta que el comportamiento caótico consiste en una dinámica determinista que es predecible sólo en un plazo muy corto. Los modelos basados en ecuaciones en diferencias no lineales podrían servir de puente entre dos posiciones antagónicas sobre el comportamiento de las cotizaciones de los mercados financieros: la postura defendida en la literatura teórica que postula el movimiento aleatorio de las cotizaciones y, por otro lado, la ampliamente extendida por los profesionales del mercado que basan sus predicciones en el comportamiento histórico de las series de precios.

2. Todos los modelos analizados señalan que cuando en un mercado predomina el componente chartista respecto al fundamentalista, los precios se mueven en dinámicas fuera de los valores de equilibrio del mercado, dando lugar a la existencia de burbujas de tipo especulativo. Los efectos de tales burbujas son una forma plausible de explicar la alta volatilidad registrada durante los últimos veinte años en los mercados financieros.

3. El modelo bidimensional discreto de fundamentalistas y chartistas posee una dinámica mucho más rica que los modelos similares, en tiempo continuo, desarrollados por Beja y Goldman (1980) y Chiarella (1992). Para un determinado rango de los parámetros, nuestro modelo presenta distintos tipos de bifurcaciones entre la estabilidad y el caos que no se dan en el modelo continuo. La transición de uno a otro comportamiento se realiza por medio de bifurcaciones de Neimark y bifurcaciones de Hopf para el caso discreto.

Hemos demostrado la existencia de un comportamiento caótico en el modelo por medio de un Teorema de Marotto (1978), implementando un nuevo algoritmo que permite su aplicación sistemática. El rango de parámetros, donde el sistema se concentra en un atractor extraño, se caracteriza por la predominancia de la influencia chartista sobre la fundamentalista y donde además el tiempo de respuesta chartista en la formación de expectativas es muy pequeño. Este comportamiento persiste bajo ligeras perturbaciones de los parámetros.

También hemos detectado un complejo movimiento transitorio o pre-caos que degenera en un atractor regular y se produce en el sistema para valores inmediatamente anteriores al que produciría el movimiento caótico.

Por último, observamos que si el tiempo de respuesta en la formación de expectativas chartista es cero, la dinámica del modelo depende de la interacción de los parámetros chartistas y fundamentalistas. Pueden presentarse diversas situaciones dinámicas (estabilidad, bifurcación flip y comportamiento periódico) según el rango de variación de los parámetros. El caos sólo aparece en el rango de parámetros donde la influencia de las expectativas chartista es mayor que la fundamentalista.

4. La ampliación del modelo continuo de Chiarella (1992) al caso de dos activos no enriquece esencialmente la dinámica. Su comportamiento se podría considerar como una generalización del caso de un solo activo. El tiempo de retardo en la formación de expectativas chartista juega un papel fundamental dentro del análisis del comportamiento del precio de uno de los activos cuando están interactuando dos expectativas chartistas sobre distintos precios. A medida que el tiempo de respuesta disminuye el sistema pasa, por medio de una bifurcación de Hopf, de ser estable a concentrarse en un ciclo límite.

En nuestro modelo continuo con dos activos, cuando la velocidad de ajuste de las expectativas chartistas es muy grande, aparecen comportamientos del tipo variedad rápido-lenta. Este tipo de dinámica se caracteriza por saltos muy abruptos tanto en el comportamiento de los precios del mercado como en las expectativas de los agentes. La dinámica de la variedad rápido-lenta en tres dimensiones podría ser una buena aproximación de un mercado real en momentos de incertidumbre y alta volatilidad. Las variaciones abruptas y la alta inestabilidad se deben a factores puramente especulativos, y por tanto propiamente intrínsecos del mercado, como son la velocidad de ajuste y la formación de expectativas.

El sistema enriquece su dinámica si lo discretizamos. Las simulaciones realizadas permiten generalizar los resultados obtenidos en el caso bidimensional discreto. El movimiento se concentra en un nuevo atractor caótico, siempre en el rango de parámetros donde la influencia chartista es mayor.

5. Los modelos analizados revelan que el caos es consecuencia de la propia especulación. La dinámica caótica en las cotizaciones y la consiguiente posibilidad de realizar predicciones, a corto plazo, está producida por la actuación de los propios agentes chartistas al intentar anticiparse al mercado.

6. Los patrones de comportamiento que presentan las dinámicas caóticas no son cíclicos sino evolutivos y su obediencia se produce a muy corto plazo. Tal comportamiento parece ser una buena aproximación a lo que muchos teóricos, como Bowden (1990), consideran sobre la efectividad de las reglas chartistas: existe una multitud de reglas del tipo de expectativas extrapolativas que pueden ser empleadas con éxito de forma muy localizada en el tiempo. En la medida en que determinada regla tiene éxito y se generaliza su uso por parte de los agentes, los patrones de comportamiento (origen de dicha regla) evolucionan hasta convertirse en nuevos patrones que sólo serán predecibles por nuevas reglas.

Conclusiones Empíricas

El chartismo como forma de especulación parte de la existencia de diversas escalas de memoria dentro de las series financieras. Según el Análisis Técnico, el empleo de multitud de reglas de mercado basadas en el comportamiento de las cotizaciones, abre la posibilidad de obtener rendimientos superiores a los normales en las inversiones de forma persistente.

El conjunto de reglas chartistas apunta hacia una doble hipótesis sobre las series temporales de precios en los mercados financieros. Por un lado, en las cotizaciones se mezclan diversos procesos de memoria a largo plazo que darían lugar a la existencia de algún tipo de comportamiento cíclico; por otro, persisten diversos patrones de comportamiento predecibles a corto plazo.

7. Algunos de los contrastes empíricos realizados muestran la existencia de diferentes escalas de memoria no necesariamente basadas en ciclos regulares. Tales dinámicas podrían atribuirse a ciclos no periódicos y otros patrones de comportamiento propios de las trayectorias de los sistemas no lineales.

a) Los espectros de Fourier son de banda ancha, siendo incapaces de detectar ciclos periódicos dentro de las series.

b) Los tests BDS son, en la práctica totalidad de las series, superiores a dos, revelando con ello la existencia de patrones de comportamiento dentro de las mismas.

c) Los estadísticos de Hurst, en las versiones de Mandelbrot y Lo, muestran la existencia de indicios de memoria a largo plazo y procesos de memoria a corto plazo claramente reconocibles.

d) Al realizar en las series financieras predicciones locales a corto plazo, aparecen zonas donde los errores de predicción son considerablemente pequeños, mostrando con ello la posibilidad efectiva de realizar predicciones de calidad superior a las del modelo de camino aleatorio. Tales zonas se entremezclan con otras, manifiestamente turbulentas, donde las predicciones resultan imposibles.

8. Los contrastes empíricos realizados parecen apuntar hacia muchas de las conclusiones señaladas por Bowden (1990). Si un número considerable de agentes sigue las reglas de tipo chartista, tales reglas podrían de esta forma encontrar con ello una autojustificación. Por otro lado, también puede observarse que la paradoja de la predecibilidad desaparece si el número de reglas chartistas es múltiple, el número de agentes que las siguen no constituyen la totalidad del mercado y existen diversos horizontes temporales de inversión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abel, A.B. (1982): "*Dynamic Effects of Permanent and Temporary Tax Policies in a q Model of Investment*", Journal of Monetary Economics, vol. 9, pp. 353-373.
- Alvarez, F. (1992): "*Utilización del Análisis Técnico en la Bolsa: Una Valoración del Caso Español*", Mercados Financieros: Un Paradigma Inestable (Madrid, Corporación Financiera Caja de Madrid).
- Ambrose, B.W., Weinstock, E. y Griffiths, M.D. (1993): "*Fractal Structure in the Capital Markets Revisited*", Financial Analysts Journal, May-Jun. pp. 73-77.
- Andronov, A.A., Vitt, A.A. y Khaikin, S.E. (1966): Theory of Oscillators, Pergamon Press, Oxford.
- Anis, A. y Lloyd, E. (1976): "*The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands*", Biometrika, 63.
- Bachelier, L. (1900): Théorie de la Spéculation, Gauthier Villars. Paris. (Reproducido en Cootner, 1964).

- Bajo, O., Fernández, F. y Sosvilla, S. (1992a): "*Chaotic Behaviour in Exchange-Rate Series: First Results for the Peseta-U.S. Dollar Case*", Economic Letters, vol. 39, pp. 207-211.
- Bajo, O.; Fernández, F. y Sosvilla, S. (1992b): "*Volatilidad y predecibilidad en las series del tipo de cambio peseta-dólar: un enfoque basado en el caos determinista*", Revista Española de Economía, vol. 9, nº 3, pp. 91-109.
- Bajo, O., Fernández, F., Mora, A. y Sosvilla, S. (1994): "*Un análisis comparado de volatilidad para los índices bursátiles de Madrid y Nueva York*", Revista de Economía Aplicada, nº 4 (Vol II) pp. 177-186.
- Bajo, O. y Sosvilla, S. (1993): "*Teorías del Tipo de cambio: Una Panorámica*". Revista de Economía Aplicada, nº 2, pp. 175-205.
- Barnett, W. y Chen, P. (1988): "*The Aggregation Theoretic Monetary Aggregates are Chaotic and have Strange Attractors*" in Barnett, W. and White, H. eds. Dynamic Econometrics Modeling, Proceedings of the Third International Symposium on Economic Theory and Econometrics. Cambridge University Press.
- Begg, D. (1982): The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics, Oxford: Phillip Allan.
- Beja, A. y Goldman, M.B. (1980): "*On The Dynamic Behaviour of Prices in Disequilibrium*", Journal of Finance, XXXV(2), pp.235-248.

- Bergé, P., Pomeau, Y. y Vidal, C. (1986): Order within Chaos, New York: Wiley
- Blasco, N. y Santamaría, R. (1994): "*Memoria a largo plazo en el mercado de valores español: una aproximación mediante el análisis R/S*", Investigaciones Económicas, vol. XVIII(3), pp. 571-583.
- Blasco, N. y Santamaría, R. (1995): "*No Linealidades en el Mercado de Valores Español*", *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, (próxima aparición).
- Bowden, R.J. (1990): "*Predictive Disequilibria and the Short Run Dynamics of Asset Prices*", Australian Journal of Management, vol. 15(1), pp. 65-87.
- Brock, W.A. y Dechert, W.D. (1989): "*Statistical Inference Theory for Measures of Complexity in Chaos Theory and Nonlinear Science*", in Measures of Complexity and Chaos. Edited by Abraham, N.B. et al., N.A.T.O. Workshop proceedings series.
- Brock, W.A., Dechert, W.D. y Scheinkman, J. (1987): "*A Test for Independence based on the Correlation Dimension*", Department of Economics, University of Wisconsin, Madison, University of Houston and University of Chicago.
- Brock, W.A., Hsieh, D.A. y LeBaron, B. (1992): Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability, MIT Press.
- Brockwell, P. y Davis, R. (1991): Time Series: Theory and Methods, 2ª ed. Springer-Verlag.

- Cagan, P. (1956): *The Monetary Dynamics of Hyperinflation*", en Friedman, M. ed., Studies in the Quantitative Theory of Money, Chicago. University of Chicago Press.
- Casdagli, M. (1991): Nonlinear Forecasting, Chaos and Statistics, in Modeling Complex Phenomena. Edited by L. Lam. Springer-Verlag.
- Chatfield, C. (1974): "*Some Comments on Spectral Analysis in Marketing*", Journal of Marketing Research, vol. 11, pp. 97-101.
- Chatfield, C. (1980): The Analysis of Time Series: An Introduction, Chapman and Hall.
- Chen, P. (1992): "*Searching for Economic Chaos: A Challenge to Econometric Practice and Nonlinear Tests*", in Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics, edited by Richard Day and Ping Chen, Oxford University Press.
- Chiarella, C. (1990): The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics, Springer-Verlag. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 343.
- Chiarella, C. (1992): "*The Dynamics of Speculative Dynamics*", Annals of Operations Research, vol. 37, pp.101-124.
- Cootner, P.H. (1964): The Random Character of Stock Market Prices, Cambridge, MA:MIT Press.

- Cowles, A. (1933): "Can Stock Market Forecast?", Econométrica, vol. 1, pp. 309-324.
- Crato, N. (1994): "Some international evidence regarding the stochastic Memory of Stocks Return", Applied Financial Economics, vol. 4, pp. 33-39.
- Cugno, F. y Montrucchio, L. (1984): "Some New Techniques for Modelling Non-Linear Economic Fluctuations: A Brief Survey", in Goodwin, R.M., Krüger, M. and Vercelli, A. (eds): Non Linear Models of Fluctuating Growth, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
- De Grauwe, P. y Vansanten, K. (1990): *Determinist Chaos in the Foreign Exchange Market*", Discussion paper 370 (CEPR, London).
- De Grauwe, P. Dewachter, H. y Embrechts, M. (1993): Exchange Rate Theory, Blackwell.
- Diamond, P. (1976): "Chaotic Behaviour of Systems of Difference Equations" International Journal of Systems Science, vol. 7, pp. 953-956.
- Edwards, R.D. y Magee, J. (1989): Technical Analysis of Stock Trends. 1ª ed. española. Gesmovasa.
- Fama, E.F. (1965): "Random Walks in Stock Market Prices", Financial Analyst Journal, vol. 21(5), pp. 55-59.

Fama, E.F. (1970): "*Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*", Journal of Finance, vol. 25, pp.383-417.

Fama, E.F. (1976): Foundations of Finance, Basic Books, New York.

Fama, E.F. y French, K.R. (1988): "*Permanent and Temporary Components of Stock Prices*", Journal of Political Economy, vol. 96(2), pp. 246-273.

Farmer, J.D. y Sidorowich, J. (1987): "*Predicting Chaotic Time Series*", Phys. Rev. Lett., vol. 59, pp. 845-848.

Farmer, J.D. y Sidorowich, J. (1988): "*Exploiting Chaos to Predict the Future and Reduce Noise*", in Evolution Learning and Cognition, ed. Lee, Y.C. World Scientific Press.

Feller, W. (1951): "*The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of independent Random Variables*", Ann. Math. Statist., vol. 22, pp. 427-432.

Fernández Díaz, A. (1994): La Economía de la Complejidad, McGraw-Hill.

Fernández Díaz, A., Parejo Gamir, J.A. y Rodríguez Saiz, L. (1993): Curso de Política Económica, Ed. AC Madrid.

Fernández-Rodríguez, F. (1992): "El Problema de la Predicción en Series Temporales: aplicaciones del caos determinista" Tesis Doctoral. Departamento de Economía Aplicada. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

- Fernández-Rodríguez, F. y Mora, A. (1995): "*El efecto de noticias no económicas en la volatilidad de los índices bursátiles*", Información Comercial Española, nº 738, pp. 143-151.
- Flavin, M. (1981): "*The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income*", Journal of Political Economy, vol. 89, pp. 974-1009.
- Frankel, J.A. y Froot, K.A. (1986): "*Understanding the US Dollar in the Eighties: The Expectations of Chartists and Fundamentalists*", Economic Record, Special Issue on Exchange Rates and the Economy, pp. 24-38.
- French, K. y Roll, R. (1986): "*Stock Return Variances*", Journal of Financial Economics, Sept.
- Frost, A.J. y Prechter, R. (1985): El Principio de la Onda de Elliott, Gesmovasa.
- Gandolfo, G. (1983): Economic Dynamics: Methods and Models, 2ª ed. Amsterdam North- Holland.
- Gershenfeld, N.A. y Weigend, A.S. (1994): "*The Future of Time Series: Learning and Understanding*", in Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past, edited by Weigend, A.S. and Gershenfeld, N.A. Addison-Wesley.
- Goldman, M.B. y Beja, A. (1979): "*Market Prices vs. Equilibrium Prices: Returns' Variance, Serial Correlation, and the Role of the Specialist*", Journal of Finance, XXXIV(3), pp. 595-607.

- Granger, C.W.J. (1966): "*The typical shape of an econometric variable*". Econometrica, vol. 34, pp. 150-161.
- Granger, C.W.J. (1980): "*Long memory relationships and the aggregation of dynamic models*", Journal of Econometrics, vol. 14, pp. 227-238.
- Granger, C.W.J. (1987): "*Stochastic or Deterministic Nonlinear Model? A Discussion of the Recent Literature in Economics*", University of California at San Diego.
- Granger, C.W.J. y Hudghes, A. (1971); "*A new look at some old data: the Beveridge wheat price series*"; Journal of the Royal Statistic Society, vol. 134, pp. 413-428.
- Granger, C.W.J. y Joyeux, R. (1980): "*An introduction to long-memory time series models and fractional differencing*", Journal of Time Series Analysis, vol. 1, pp. 15-29.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983): "*Characterization of Strange Attractors*", Phys. Rev. Lett, vol. 50, nº 5, pp. 346-394.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983): Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag. New York.
- Hall, R.E. (1978): "*Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: Theory and evidence*", Journal of Political Economy, vol. 86, pp. 971-987.

- Hamilton, W.P. (1922): The Stock Market Barometer, New York.
- Hayashi, F. (1982): "*Tobin's marginal and average q: A neoclassical interpretation*", Econometrica, vol. 50, pp. 213-224.
- Herrmann, R. (1985): "*Stability and Chaos in a Kaldor-type Model*", DP22, Department of Economics, University of Göttingen.
- Hirsch, M.W. y Smale, S. (1974): Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press: New York.
- Hosking, J. (1981): "*Fractional differencing*", Biometrika, vol. 68, pp. 165-176.
- Hurst, H. E. (1951): "*The long-term storage capacity of reservoirs*", Transactions of the American Society of Civil Engineers, vol. 116, pp. 770-808.
- Iooss, G. (1979): Bifurcations of Maps and Applications, Amsterdam: North Holland
- Keim, D.B. (1986): "*The CAPM and Equity Return Regularities*", Financial Analysts Journal, May-June 1986, pp.19-34.
- Kendall, M. (1953): "*The Analysis of Economic Time Series*" Part I: Prices Journal of the American Statistical Association, vol. 96, pp. 11-25.
- Keynes, J.M. (1936): The General Theory of Employment, Interest and Money. Londres: MacMillan

- LeBaron, B. (1990): *"Forecast Improvements Using A Volatility Index"*, Social Systems Research Institute. University of Wisconsin. Madison.
- Leland, H. (1988): *"Black Monday: The Catastrophe Theory"*, Risk, vol. 1(10), pp. 6-13.
- Levinson, N. y Smith, O.K. (1942): *"A General Equation for Relaxation Oscillations"*, Duke Mathematical Journal, vol. 9, pp.382-403.
- Li, T.Y. y Yorke, J.A. (1975): *"Period three implies chaos"*, American Mathematical Monthly, vol. 82, pp. 895-992
- Lintner, J. (1965): *"The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets"*, The Review of Economic and Statistics, XLVII(1), pp. 13-37.
- Lo, A.W. (1991): *"Long-term memory in stock market prices"*, Econometrica, vol. 59, pp.1279-1313.
- Lo, A.W. y MacKinlay, A.C. (1988): *"Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence From A Simple Specification Test"*, The Review of Financial Studies, 1(1), pp. 41-66.
- Lorenz, H.W. (1992): *"Multiple Attractors, Complex Basin Boundaries, and Transient Motion in Deterministic Economic Systems"*, Dynamic Economic Models and Optimal Control, Ed. Feichtinger. Elsevier Science Publishers B.V.

- Lorenz, H.W.(1993): Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion, 2ª ed.
Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg.
- Lorie, J.H. y Hamilton, M.T.(1973): The Stock Market: Theories and Evidence.
Homewood, IL: Richard D. Irwin.
- Lucas, R.E. (1972): "*Expectations and the Neutrality of Money*", Journal of Economic Theory, vol. 4, pp. 103-124.
- Lucas, R.E. (1973): "*Some International Evidence on Output-Inflation Tradeoffs*",
American Economic Review, vol. 63, pp. 326-334.
- MacDonal, R. y Power, D.M. (1993): "*Persistence in UK Share Returns: Some Evidence from Disaggregated Data*", Applied Financial Economics, vol. 3,
pp. 27-38.
- Malkiel, B.G. (1990): Un paseo Aleatorio por Wall Street, Alianza Editorial.
- Mandelbrot, B. (1964): "*The Variation of Certain Speculative Prices*", en P. Cootner, ed., The Random Character of Stock Prices. Cambridge, MA:MIT Press.
- Mandelbrot, B. (1972): "*Statistical methodology of non-periodic cycles: From the covariance to R/S Analysis*", Annals of Econ. and Social Measurement, vol.1.

- Mandelbrot, B. (1975): "*Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes*", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete vol. 31, pp. 271-285.
- Mandelbrot, B. y Taqqu, M. (1979): "*Robust R/S analysis of long-run serial correlation*", Proceedings of the 42nd session on the International Statistical Institute. Manila. Bulletin of the I.S.I. vol. 48, pp. 69-104.
- Mandelbrot, B. y Van Ness J.W. (1968): "*Fractional Brownian Motions. Fractional Noises and Applications*". SIAM Review, vol. 10.
- Mandelbrot, B. y Wallis, J. (1969a): "*Computer experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 1, Averages and Variances*", Water Resources Research, vol. 5.
- Mandelbrot, B. y Wallis, J. (1969b): "*Computer experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 2, Rescaled Ranges and Spectra*", Water Resources Research, vol. 5.
- Mandelbrot, B. y Wallis, J. (1969c): "*Computer experiments with Fractional Gaussian Noises. Part 3, Mathematical Appendix*", Water Resources Research, vol. 5.
- Mandelbrot, B. y Wallis, J. (1969d): "*Robustness of the Rescaled Range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence*", Water Resources Research, vol. 5.

- Markowitz, H.M. (1959): Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York: John Wiley & Sons.
- Marotto, F.R. (1978): "*Snap-Back Repellers Imply Chaos in \mathbb{R}^n* ", Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 72, pp. 199-223.
- May, R.M. (1983): "*Nonlinear Problems in Ecology and Resource Management*", en Ioss (ed), Chaotic Behaviour of Deterministic Systems, North Holland.
- Merton, R.C. (1971): "*Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*", Journal of Economic Theory, vol. 3, pp 373-413.
- Mishkin, F. (1983): A Rational Expectations Approach to Macroeconometric, ed. The University of Chicago Press
- Modigliani, F. y Sutch, E. (1954): "*The predictability of social events*", Journal of Political Economy, vol. 62, pp. 456-470.
- Modigliani, F. y Sutch, E. (1966): "*Innovation in interest rate policy*", American Economic review, vol 56, pp. 178-197.
- Moran, P.A.P. (1964): "*On the Range of Cumulative Sums*", Ann. Inst. Statist. Math, vol. 16, pp. 109-112.
- Muth, J.F. (1961): "*Rational expectations and the theory of price movements*", Econometrics, vol. 29, pp. 315-335.

- Newey, W.K. and West, K.D. (1987): "*A Simple, Positive Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*", Econometrica, vol. 55, pp.703-708.
- Osborne, M.F.M. (1959): "*Brownian Motion in the Stock Market*", Operations Research, vol. 7, pp. 145-173.
- Peters, E.E. (1991): Chaos and Order in the Capital Markets. John Wiley & Sons, Inc.
- Peters, E.E. (1994): Fractal Market Analysis, Applying Chaos Theory to Investment and Economics. John Wiley.
- Poterba, J.M. y Summers, L.H. (1987): "*Mean Reversion in Stock prices: Evidence and Implications*", NBER Working Paper, 2343.
- Provenzale A., Smith, L.A., Vio R. y Murante G. (1992): "*Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series*", Physica, vol. 58D, pp. 361-372.
- Pruitt, S.W. y White, R.E. (1988): "*The CRISMA Trading System: Who Says Technical Analysis Can't Beat The Market?*", The Journal of Portfolio Management, Spring, pp. 55-58.
- Ramsey J., Sayers, C. y Rothman P. (1990): "*The Statistical Properties of Dimension Calculations using small data sets: some economic applications*", International Economic Review, vol. 31, n°4, pp. 991-1020.

- Reichlin, P. (1986): "*Equilibrium Cycles and Stabilization Policies in an Overlapping Generations Model with Production*", Journal of Economic Theory, vol. 40, pp. 89-102.
- Roberts, H.V. (1959): "*Stock Market Patterns and Financial Analysis: Methodological Sugestions*", Journal of Finance, vol. 14, n° 1, pp. 1-10.
- Roll, R. (1988): "*R2*", Journal of Finance, Julio.
- Ruelle, D. y Takens, F. (1971): "*On the Nature of Turbulence*", Communications in Mathematical Physics, vol. 20, pp. 167-192.
- Samuelson, P.A. (1965): "*Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*", Industrial Management Review, vol. 71, pp. 421-436.
- Sargent, T. y Wallace, N. (1975): "*Rational expectations, the optimal monetary instrument and the optimal money supply rule*", Journal of Political Economy, vol. 83, pp. 241-254
- Sayers, C. L. (1986): "*Work Stoppages: Exploring the Nonlinear Dynamics*", Mimeo, Department of Economics, University of Houston.
- Scheinkman, J. y LeBaron, B. (1987): "*Nonlinear Dynamics and GNP data*", Department of Economics, University of Chicago. I.L.
- Scheinkman, J. y LeBaron, B. (1989): "*Nonlynear Dynamics and Stock Returns*", Journal of Business, vol. 62(3), pp. 311-337.

- Schuster, H.G. (1988): Deterministic Chaos. An Introduction, VCH Weinheim.
- Sharpe, W.F. (1964): "*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*", Journal of Finance, vol. XIX, nº 3, pp. 425-442.
- Shiller, R.J. (1989): Market Volatility, Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- Sosvilla, S., Fernández, F., Bajo, O. y Martín, J. (1994): "*Exchange Rate Volatility in the EMS Before and After the Fall*", Documento de Trabajo 94-16, FEDEA, Madrid
- Sterge, A.J. (1989), "*On the Distribution of Financial Futures Price Changes*", Financial Analysts Journal, May-Jun.
- Sugihara, G. y May, R. (1990): "*Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series*", Nature, vol. 344, pp. 735-741.
- Takens, F. (1981): "Detecting strange attractors in turbulence", in Lect. Notes Math. 898. Edited by Raud, D.A. and Young, L.S. Springer-Verlag.
- Thompson, J.M.T. y Stewart, H.B. (1993): Nonlinear Dynamics and Chaos, Chichester-New York: John Wiley. 1ª ed. (1986)
- Tobin, J. (1958): "*Liquidity Preference as Behavior Toward Risk*", Review of Economic Studies, vol. XXVI (1), pp. 65-86.

West, K.D. (1988): "*Bubbles, Fads and Stock Price Volatility: A Partial Evaluation*", Journal of Finance, vol. 43(3), pp. 639-660.

Whitley, D. (1983): "*Discrete Dynamical Systems in Dimensions One and Two*", Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 15, pp. 177-217.

Working, H. (1934): "*A Random Difference Series for Use in the Analysis of Time Series*", Journal of the American Statistical Association, vol. 29, pp. 11-24.

Zeeman, E.C. (1974): "*On The Unstable Behaviour of Stock Exchanges*", Journal of Mathematical Economics, vol. 1, pp. 39-49.