

Aplicaciones de la generación de mallas

JOSÉ MARÍA ESCOBAR SÁNCHEZ

RESUMEN

La triangulación de Delaunay en dimensión dos y tres es uno de los métodos de generación de mallas no estructuradas que más se utiliza en la actualidad. Sus características geométricas y algorítmicas la hacen muy adecuada para la aplicación del método de elementos finitos. El objetivo principal de esta investigación es construir un programa, basado en la triangulación de Delaunay, para la generación automática de mallas tridimensionales, que resuelva de forma eficaz algunos problemas intrínsecos al método de triangulación.

Entre los numerosos algoritmos existentes, se ha escogido el de Watson, de tipo *incremental*, que crea la triangulación de Delaunay por adición de puntos uno a uno. La ventaja que ofrecen estos algoritmos estriba en su capacidad de adaptación a un proceso de refinamiento local de la malla.

ABSTRACT

Mesh generation applications

Delaunay triangulation in dimensions bi and tri is one of the most commonly used methods in non-structured mesh generation nowadays. It is very suitable for the application of the finite elements method, due to its geometrical and algorithmical characteristics. The main aim of this work is to develop a programme, based on Delaunay triangulation, for the automatic generation of three-dimensional meshes and able to efficiently solve some intrinsic problems of the triangulation method.

Among all the existing algorithms, one based on the well-known Watson algorithm has been chosen. This is an incremental type algorithm, that is, it builds Delaunay triangulation by adding points one by one. The advantage offered by that kind of algorithms lies in their ability to adapt themselves to a local refinement process of the mesh.

GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS PARA LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

La mayoría de los problemas de la física, la ingeniería, etc. son formulados por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En estas ecuaciones la incógnita, que puede depender de una o más variables, aparece bajo el signo de derivación. Para fijar ideas; supongamos que deseamos calcular los parámetros que caracterizan a una línea de transmisión con una geometría más o menos complicada (un ejemplo de línea de transmisión es el cable coaxial de una televisión). En la figura 1 se muestra la sección transversal de una posible línea de transmisión.

Los parámetros de una línea de transmisión están relacionados con una función potencial $\phi(x,y)$ que satisface una ecuación diferencial, conocida como ecuación de Laplace, que en dimensión dos es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Salvo en los casos particulares en que la geometría de la sección de la línea sea muy simple, por ejemplo un rectángulo, una circunferencia, etc., la resolución exacta de la ecuación anterior es imposible. No obstante, resulta de gran interés conocer su solución, aunque sólo sea de forma aproximada.

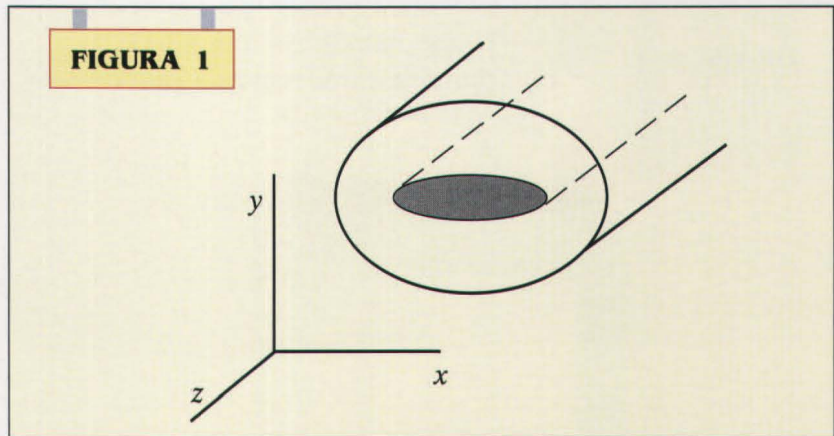


Figura 1. Sección transversal de una línea de transmisión.

Los ordenadores posibilitan el empleo de técnicas de cálculo numérico para hallar soluciones aproximadas a diversas ecuaciones diferenciales. En concreto, el método de los elementos finitos (MEF) se ha revelado como un potente método de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. La esencia de este método consiste en el cálculo de la solución de la ecuación en algunos puntos del dominio de interés, denominados nodos. A partir de estos valores se puede calcular la solución en cualquier otro punto mediante el uso de funciones de interpolación. Los cálculos precedentes requieren, como primer paso, que el dominio esté discretizado en pequeñas parcelas, los elementos.

El conjunto de estas parcelas se denomina malla del dominio. La malla será unidimensional, bidimensional, tridimensional, etc. según el número de variables de las que dependa la incógnita.

Este preproceso tiene una importancia crucial en la convergencia de las soluciones numéricas y en su aproximación a los verdaderos valores. La malla debe acercarse lo más posible a algunos requisitos generales, tales como:

- Adaptarse lo mejor posible a la forma del objeto.
- Debe haber mayor densidad de elementos en las zonas donde la solución varíe más rápidamente.

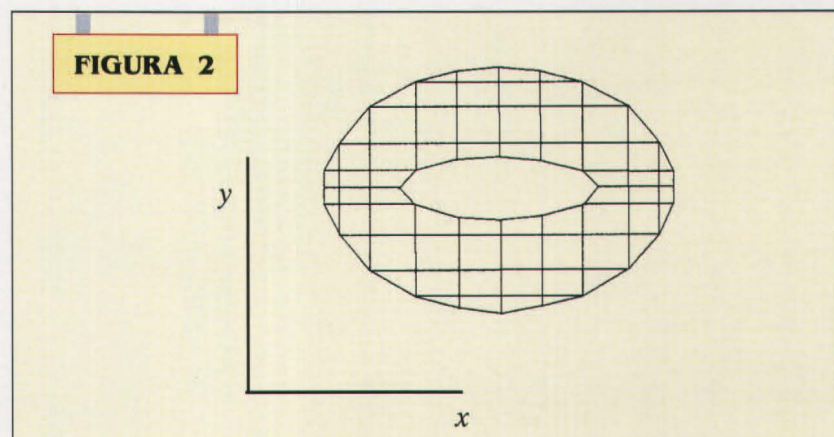


Figura 2. Malla bidimensional de la sección de la línea de transmisión anterior.

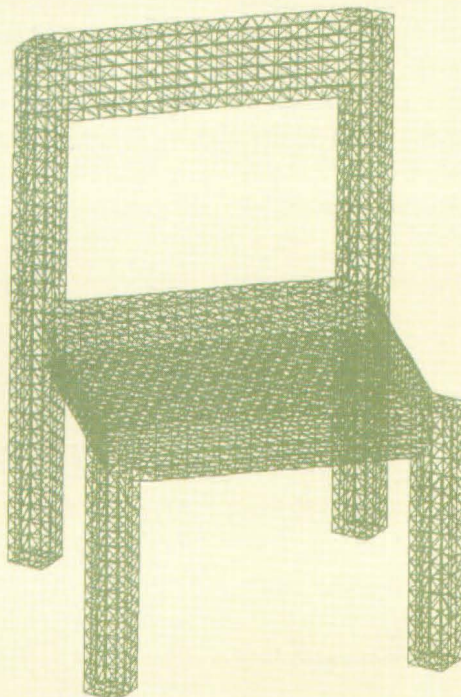
GRÁFICO 1

Triangulación de una silla con densidad uniforme de puntos



GRÁFICO 2

Líneas de la triangulación de la superficie



- La transición de una zona donde los elementos sean *grandes* a otra donde sean *pequeños* debe ser gradual.
- No debe haber elementos muy *degenerados*. El sentido preciso de la palabra degenerado depende del tipo concreto de elementos de que se trate. Por ejemplo, si los elementos son tetraedros, éstos se deben aproximar lo más posible al tetraedro regular. Así, un tetraedro será degenerado si es muy plano, o muy *puntiagudo*, o si la diferencia entre la esfera circunscrita y la inscrita es muy grande.

Otros requisitos, como la orientación de los elementos, etc., pueden estar motivados por el problema concreto que se pretenda resolver.

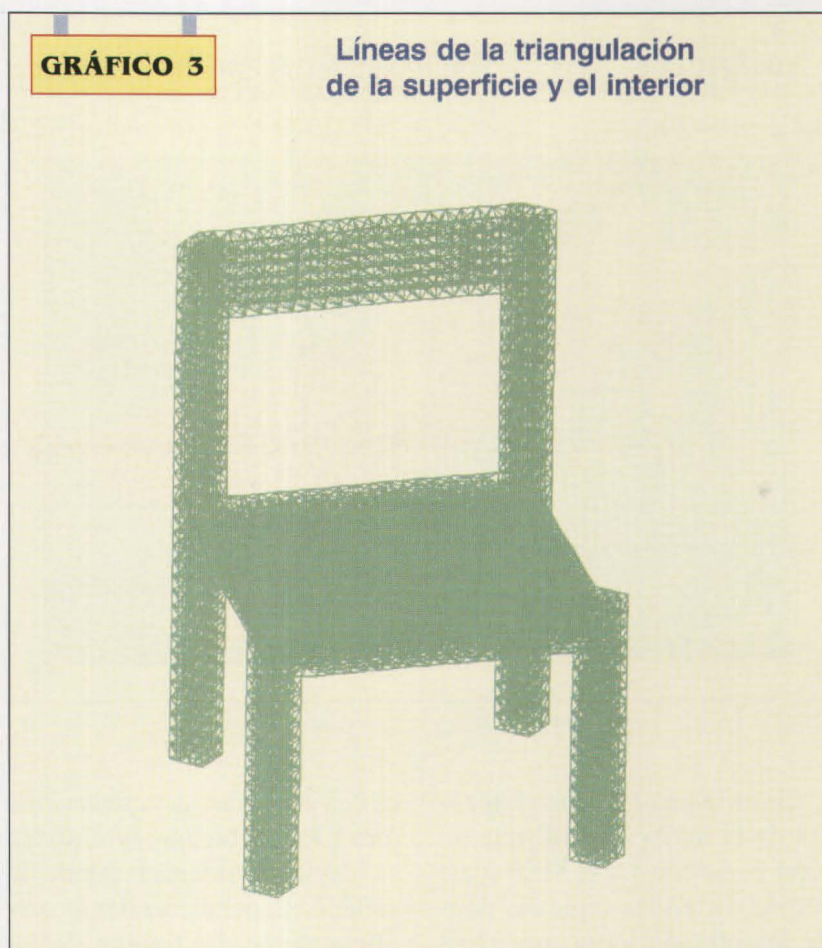
Existen dos tipos fundamentales de mallas: estructuradas y no estructuradas. En las mallas estructuradas la conexión entre elementos obedece a un patrón fijo; en las no estructuradas no existe tal patrón, el número de nodos vecinos de un dado es variable. Las mallas formadas por una transformación de coordenadas, de un cuadrado en dos dimensiones o un cubo en tres, son ejemplos de mallas estructuradas [KunSte93]. En ellas, el nodo de índices (i, j, k) siempre tiene como vecino por la izquierda al $(i - 1, j, k)$ y por la derecha al $(i + 1, j, k)$, etc.

Las mallas estructuradas tienen ciertas ventajas sobre las no estructuradas. Son más simples, y también más convenientes para su uso en el método de diferencias finitas. Requieren menos memoria para su almacenamiento en el ordenador y es más fácil controlar

la forma y el tamaño de los elementos.

La gran desventaja que ofrecen estas mallas es la poca flexibilidad para adaptarse a dominios con geometrías complicadas. Se han desarrollado numerosas técnicas para encontrar las transformaciones de coordenadas adecuadas: transformación conforme, métodos algebraicos, etc. Incluso con estas técnicas es imposible encontrar una transformación que se adapte satisfactoriamente a la forma de un dominio complicado. Existen multitud de problemas formulados en dominios cuya forma no es adecuada para una *discretización* mediante mallas estructuradas. En estos casos es necesario utilizar mallas no estructuradas. Por lo general, los elementos que componen las mallas no estructuradas son simples, esto es, triángulos en dimensión dos y tetraedros en dimensión tres. La utilización de simples es debida, entre otras cosas, a su capacidad para llenar el espacio y para adaptarse a los contornos del dominio sin que se produzcan discontinuidades. La malla formada por simples recibe el nombre de triangulación. Siempre es posible descomponer un dominio poliédrico (poligonal en dimensión dos) en tetraedros (triángulos). El problema está en encontrar una triangulación que se aproxime lo más posible a los requisitos mencionados anteriormente, o a cualquiera otros que determine el problema a tratar.

Muchas de las medidas de calidad de una triangulación están motivadas por la aplicación del método de los elementos finitos. Estas medidas toman en consideración las longitudes, ángulos y áreas o volúmenes de



los triángulos o tetraedros de la triangulación. En ocasiones, la relación entre el círculo (esfera) inscrito y circunscrito a un triángulo (tetraedro) da una buena medida de la calidad del

elemento. El *condicionamiento* de las matrices asociadas al MEF depende, entre otros aspectos, del mínimo ángulo de todos los triángulos de la triangulación.

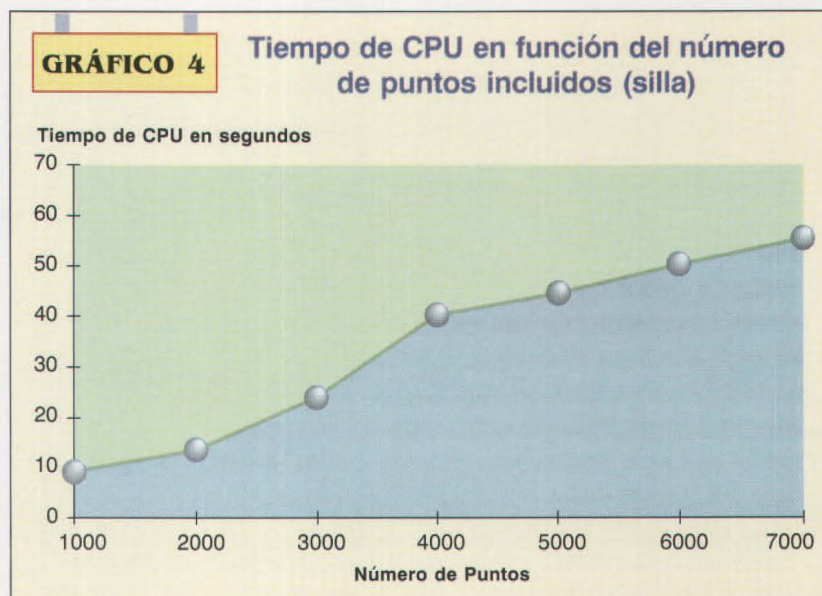
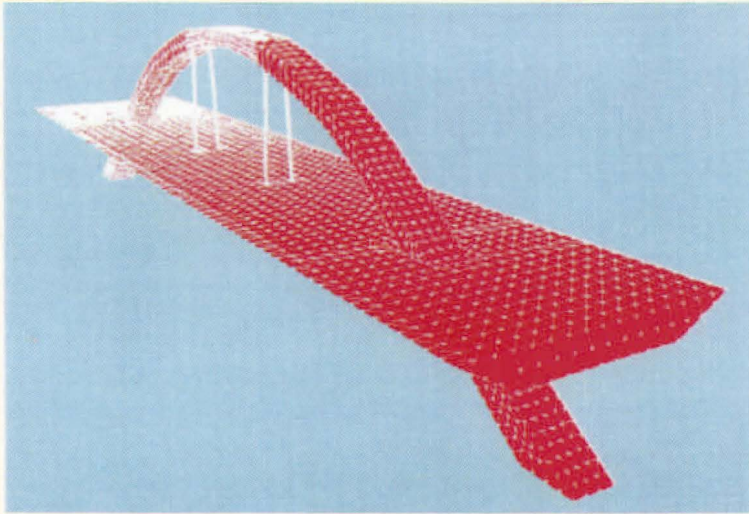
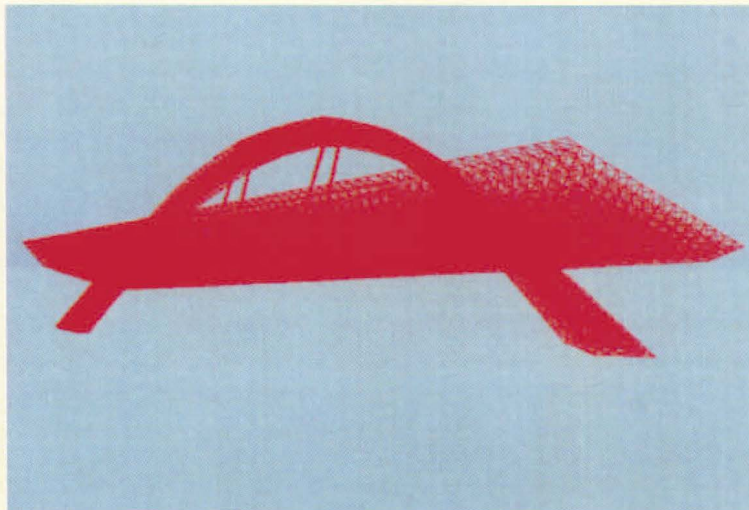


GRÁFICO 5**Triangulación del puente**

Si el tamaño de los elementos de la malla es uniforme, el error cometido por el MEF suele ser mayor en las regiones donde la solución varía más rápidamente, esto es, regiones donde el gradiente de la solución es mayor. Una forma de disminuir el error consiste en aumentar la densidad de elementos en estas zonas. Esta operación se cono-

ce con el nombre de *refinamiento local*. En problemas evolutivos, es decir, problemas donde la solución depende del tiempo explícitamente del tiempo, la localización de la zona donde el gradiente de la solución es mayor puede variar con éste. El refinamiento global de toda la malla puede hacer que el número de nodos aumente prohi-

GRÁFICO 6**Líneas de la triangulación del puente**

bitivamente. En dimensión dos existen técnicas de *desrefinamiento* que disminuyen la densidad de elementos en las regiones en las que la solución es más uniforme. Sin embargo, en dimensión tres el desrefinamiento está aún en su fase inicial de desarrollo.

La triangulación de Delaunay reúne algunas características que la hacen adecuada para la aplicación del MEF. Dado un conjunto X de puntos del plano o del espacio, la triangulación de Delaunay crea una triangulación en la que los vértices de los símlices son los puntos de X . Para crear la triangulación de Delaunay existen algoritmos de tipo incremental, como el de Watson, que construyen la triangulación de un conjunto X por adición de puntos uno a uno. Los algoritmos incrementales permiten un refinamiento local de la malla incrementando la densidad de puntos en las zonas en las que se ha cometido más error. Además de la capacidad de refinamiento, la triangulación de Delaunay posee propiedades geométricas óptimas desde el punto de vista del MEF. De todas las triangulaciones de un conjunto de puntos del plano, la de Delaunay es la que hace máximo el mínimo ángulo de cualquier triángulo. Sin embargo, no existe una generalización de esta propiedad para dimensión tres, al menos en términos de alguna medida angular de los tetraedros. En dimensión tres hay propiedades que hacen referencia al tamaño de las esferas que contienen a los tetraedros de la triangulación, pero que no nos dan una idea tan clara de la calidad de ésta como la que da la propiedad anterior [Fort92]. A pesar de ello, los resultados experimentales revelan

que las mallas tridimensionales, construidas a partir de la triangulación de Delaunay, dan buenas medidas de calidad cuando la distribución de puntos es suficientemente regular.

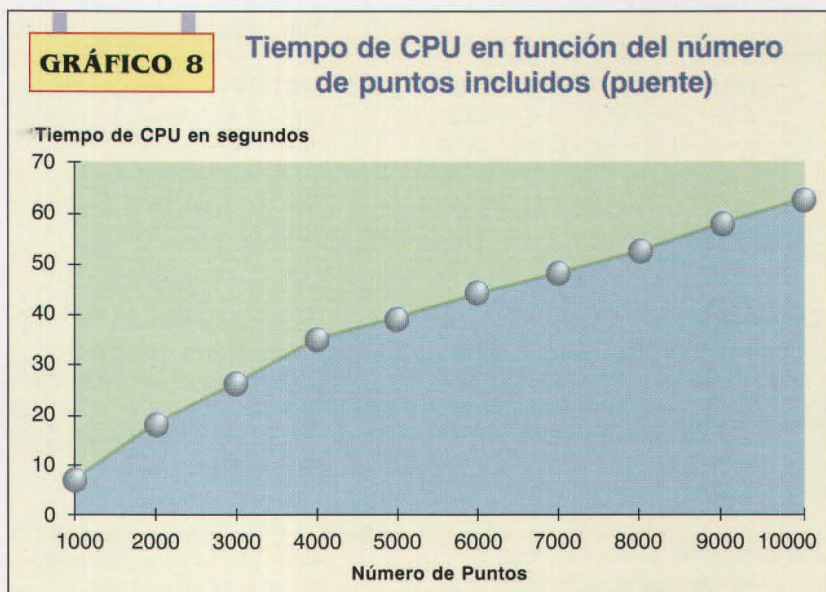
Una de las principales dificultades que plantea la utilización de la triangulación de Delaunay para generar mallas es conseguir que la triangulación *respete* la frontera del dominio de definición, esto es, que no haya ningún tetraedro que corte su superficie. Cuando esto ocurre decimos que la triangulación es conforme con la frontera del dominio. En dimensión dos se resuelve este problema, bien imponiendo que la triangulación contenga todas las aristas que definen el contorno del dominio (*Constrained Delaunay Triangulation*), bien colocando puntos sobre las aristas del dominio en posiciones adecuadas de manera que éstas sean la unión de aristas de la triangulación (*Conforming Delaunay Triangulation*). En dimensión tres hay algoritmos (ver por ejemplo [GeoHec91a] y [WeaHas94]) basados en el intercambio de aristas y caras que consiguen la conformidad con la frontera del dominio. Una vez que se ha definido una malla conforme con la frontera del dominio, una buena estrategia para adaptar la malla, asegurando que en todo momento se mantiene dicha conformidad, sería utilizar métodos de refinamiento/desrefinamiento de mallas encajadas. Esta estrategia se ha desarrollado para triangulaciones bidimensionales [FerMon94] [Plaz93], pero en la actualidad es una línea de investigación abierta en tres dimensiones.

Por otra parte, la realización práctica de algoritmos que ge-



neren la triangulación de Delaunay tiene serios problemas cuando los puntos no están en *posición general*, es decir, cuando hay más de tres puntos del plano sobre la misma circunferencia o más de cuatro sobre

la misma esfera. Incluso cuando los puntos no están *claramente* en posición general existen problemas debidos a los errores de redondeo que comete el ordenador al trabajar con *números en coma flotante*.



- [AllFig92] D. Alleau, J. P. Figeac and B. Mantel, J. Periaux, «Unstructured Mesh Generation and Adaptation Techniques for 3-D Compressible Flows», *Comp. Meth. in Appl. Sciences* 225-232 (1992).
- [Bäns91] E. Bänsch, «Local Mesh Refinement in 2 and 3 Dimensions», *Imp. Comp. in Scien. and Eng.* 3, 181-191 (1991).
- [BerEpp92] M. Bern and D. Eppstein, «Mesh Generation and Optimal Triangulation», *Computing in Euclidean Geometry*, 23-90, World Scientific, Singapore, 1992.
- [BorErd93] F. Boremann, B. Erdmann and R. Kornhuber, «Adaptive Multilevel Methods in Three Space Dimensions», *Int. J. Num. Meth. Eng.* 36, 3187-3203 (1993).
- [Bowy81] A. Bowyer, «Computing Dirichlet Tessellations», *The Computer Journal* 24, 162-166 (1981).
- [CavFie85] J. Cavendish, D. Field and W. H. Frey, «An Approach to Automatic Three-dimensional Finite Element Mesh Generation», *Int. J. Num. Meth. Eng.* 21, 329-347 (1985).
- [EscMon93] J. M. Escobar y R. Montenegro, «Introducción a la generación de mallas en 3-D», *Actas del XIII C.E.D.Y.A., III Congreso de Matemática Aplicada* (a aparecer), Madrid 13-15 Septiembre 1993.
- [EscMon94a] J. M. Escobar y R. Montenegro, «Construction of 3-D Meshes Using the Triangulation of Delaunay», *VSP International Colloquium on Numerical Analysis* (a aparecer), Plovdiv, (1994).
- [EscMon94b] J. M. Escobar y R. Montenegro, «Several Aspects of the Three-dimensional Triangulation of Delaunay», *Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology*, Civil Comp Ltd., Edinburgh, 193-204 (1994).
- [FerMon94] L. Ferragut, R. Montenegro and A. Plaza, «Efficient refinement/ derefinement algorithm of nested meshes to solve evolution problems», *Comm. in Num. Meth. in Eng.* 10, 403-412 (1994).
- [Fort92] Fortune, «Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations», *Computing in Euclidean Geometry*, 193-233, World Scientific, Singapore, 1992.
- [Fried93] O. Friedrich, «A New Method for Generating Inner Points of Triangulations in Two Dimensions», *Comp. Meth. in Mech. and Eng.* 104, 77-86 (1993).
- [GeoHec90] P. L. George, F. Hecht and E. Saltel, «Fully Automatic Mesh Generator for 3-D Domains of Any Shape», *Imp. Comp. in Scien. and Eng.* 2, 187-218 (1990).
- [GeoHec91a] P. L. George, F. Hecht and E. Saltel, «Automatic Mesh Generator with Specified Boundary», *Comp. Meth. in Mech. and Eng.* 92, 269-288 (1991).
- [GeoHec91b] P. L. George, F. Hecht and M. G. Vallet, «Creation of Internal Points in Voronoi's Type Method. Control Adaptation», *Adv. Eng. Software* 13, 303-312 (1991).
- [GeoHer92] P. L. George and F. Hermeline, «Delaunay's Mesh of a Convex Polyhedron in Dimension d . Application to Arbitrary Polyhedra», *Int. J. Num. Meth. Eng.* 33, 975-995 (1992).
- [Geor91] P. L. George, *Automatic Mesh Generation*, John Wiley & Sons, París, 1991.
- [GröLov93] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Germany., 1993.
- [JohSul93] B. P. Johnson and J. M. Sullivan, «A Normal Offsetting Technique for Mesh Generation in Three Dimensions», *Int. J. Num. Meth. Eng.* 36, 1717-1734 (1993).
- [KnuSte93] P. Knupp and S. Steinberg, *Fundamentals of Grid Generation*, CRC, U.S.A., 1993.
- [LöhBau92] R. Löhner and J. D. Baum, «Adaptive h -Refinement on 3D Unstructured Grids for Transient Problems», *Int. J. Num. Meth. Eng.* 14, 1407-1419 (1992).
- [LöhCam92] R. Löhner, J. Camberos and Marshall Mrrrian, «Parallel Unstructured Grid Generation», *Comp. Meth. in Mech. and Eng.* 95, 343-357 (1992).
- [MonPlaz95] R. Montenegro, A. Plaza, J. M. Escobar y L. Ferragut, «Aspects about Mesh Generation for Finite Elements Method», *Neural, Parallel and Scientific Computation*. 1, (a aparecer), Atlanta 1995.
- [Pach93] J. Pach, *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, Springer-Verlag, U.S.A., 1993.
- [Plaz93] Plaza A., «Algoritmos de desrefinamiento en mallas estructurados bidimensionales», *Tesis Doctoral*, Departamento de Matemáticas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1993.
- [PouRad91] M. Pourazady and M. Radhakrishnan, «Optimization of Triangular Mesh», *Com. and Struc.* 40, 795-804 (1991).

- [PreSha85] F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational Geometry. An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Reba93] S. Rebay, «Efficient Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm», *J. of Com. Phy.* **106**, 125-138 (1993).
- [RivLev92] M. C. Rivara and C. Levin, «A 3-D Refinement Algorithm Suitable for Adaptive and Multi-Grid Techniques», *Comm. in Appl. Num. Meth.* **8**, 281-290 (1992).
- [SchShe90] W. J. Schroeder and M. S. Shephard, «A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3-D Mesh Generation», *Int. J. Num. Meth. Eng.* **29**, 37-55 (1990).
- [SouGat93] L. T. Souza and M. Gattass, «A New Scheme for Mesh Generation and Refinement Using Graph Theory», *Com. and Struc.* **46**, 1073-1084 (1993).
- [Wats81] D. F. Watson, «Computing the n -dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoy Polytopes», *The Computer Journal* **24**, 167-172 (1981).
- [WeaHas94] N. P. Weatherhill and O. Hassan, «Efficient Three-Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints», *Int. J. Num. Meth. Eng.* **37**, 2005-2039 (1994).
- [Weath92] N. P. Weatherhill, «The Integrity of Geometrical Boundaries in the Two-dimensional Delaunay Triangulation», *Comm. in Appl. Num. Meth.* **6**, 101-109 (1992).
- [WrigJac94] J. P. Wright and A. G. Jack, «Aspects of Three-Dimensional Constrained Delaunay Meshing», *Int. J. Num. Meth. Eng.* **37**, 1841-1861 (1994).

BIOGRAFÍA

José María Escobar Sánchez

Nació en Ciudad Real en 1962. Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad Complutense de Madrid. Después de dos años como profesor interino en centros de enseñanzas medias, en 1989 fue contratado como profesor asociado a tiempo completo por la ULPGC (Departamento de Electrónica y Telecomunicación, Área de Teoría de la Señal) para impartir las asignaturas de Teoría de la Señal y Campos Electromagnéticos. Cursó estudios de doctorado en el programa "El método de los elementos finitos en la ingeniería", impartido en el Departamento de Matemáticas. Doctor en Ma-

temáticas en marzo de 1995 con la tesis titulada "Generación de mallas tridimensionales mediante la triangulación de Delaunay" dirigida por el Dr. D. Rafael Montenegro Armas. Actualmente esta trabajando en la simulación numérica de problemas relacionados con el electromagnetismo.

Dirección:

Departamento de Electrónica y Telecomunicación
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Campus Universitario de Tafira,
35017-Las Palmas de Gran Canaria, España, Fax: (34-28) 45 88 11

Este trabajo ha sido patrocinado por

ESTABLECIMIENTOS INDUSTRIALES AHEMÓN, S.A.