

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
INSTITUTO UNIVERSITARIO DE SISTEMAS INTELIGENTES Y  
APLICACIONES NUMÉRICAS EN INGENIERÍA

Trabajo Fin de Máster:

Algoritmo de desenredo y suavizado para T-mallas  
bidimensionales en análisis isogeométrico

Tutores:

José María Escobar Sánchez

Rafael Alejandro Montenegro Armas

Jabel Alejandro Ramírez Naranjo

Las Palmas de Gran Canaria, 25 de octubre de 2012

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>4</b>
<b>2. CONCEPTOS PRELIMINARES.....</b>	<b>9</b>
2.1 DEFINICIÓN DE ANÁLISIS ISOGEOMÉTRICO.....	9
2.2 DEFINICIÓN DE B-SPLINE.....	13
2.2.1 <i>Knots</i> .....	13
2.2.2 <i>Funciones base</i> .....	14
2.2.3 <i>Curvas B-spline</i> .....	15
2.2.4 <i>Superficie B-spline</i> .....	16
2.3 DEFINICIÓN DE NURBS .....	17
2.4 DEFINICIÓN DE T-SPLINE.....	18
2.5 T-SPLINES EN LA T-MALLA .....	20
<b>3. DESENREDO Y SUAVIZADO DE T-MALLAS .....</b>	<b>22</b>
3.1 EL CONCEPTO DE JACOBIANO DE LA TRANSFORMACIÓN .....	22
3.2 MEDIDAS ALGEBRAICAS DE CALIDAD PARA TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS.....	25
3.3 OPTIMIZACIÓN DE MALLAS DE ELEMENTOS CUADRILÁTEROS .....	28
3.4 OPTIMIZACIÓN DE LA T-MALLA.....	31
<b>4. RESULTADOS .....</b>	<b>38</b>
4.1 CASO 1: TRANSFORMACIÓN EN CUARTO DE ANILLO CON MALLAS CUADRILÁTERAS REGULARES.....	38
4.2 CASO 2: TRANSFORMACIÓN EN CONTORNO IRREGULAR CON MALLAS CUADRILÁTERAS REGULARES.....	40
4.3 CASO 3: AMPLIACIÓN DE ESCALA .....	42
4.4 CASO 4 : TRANSFORMACIÓN CIRCULAR .....	44
4.5 CASO 5: TRANSFORMACIÓN A UN CUARTO DE CORONO CIRCULAR.....	46
4.6 CASO 6: TRANSFORMACIÓN A UN CUARTO DE CÍRCULO.....	48
4.7 CASO 7: DESENREDO DE PUNTOS INTERNOS.....	50
4.8 CASO 8: TRANSFORMACIÓN EN SEMI-ELIPSE.....	52
4.9 CASO 9: TRANSFORMACIÓN EN ELIPSE.....	54
4.10 CASO 10: TRANSFORMACIÓN EN CONTORNO IRREGULAR (I) .....	56
4.11 CASO 11: TRANSFORMACIÓN EN CONTORNO IRREGULAR (II).....	58
4.12 CASO 12: TRANSFORMACIÓN EN FIGURA IRREGULAR CON 32X32 CELDAS. ....	60
4.13 CASO 13: TRANSFORMACIÓN A CÍRCULO CON MALLA DE 4X4 CELDAS. ....	62
4.14 CASO 14: TRANSFORMACIÓN A CÍRCULO CON MALLA DE 8X8 CELDAS. ....	64
4.15 CASO 15: TRANSFORMACIÓN A CÍRCULO CON MALLA DE 16X16 CELDAS.....	66
4.16 CASO 16: TRANSFORMACIÓN A CÍRCULO CON MALLA DE 32X32 CELDAS.....	68
4.17 CASO 17: TRANSFORMACIÓN A CÍRCULO CON MALLA DE 64X64 CELDAS.....	70
<b>5. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS.....</b>	<b>71</b>
<b>6. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>72</b>



# 1. Introducción

El presente trabajo se propone la elaboración de un código para el desenredo y suavizado automático de T-mallas en dos dimensiones aplicadas al análisis isogeométrico (IGA).

El análisis isogeométrico supone una comunicación directa entre el diseño asistido por ordenador (CAD) y el Análisis, ya que se usa la misma base geométrica en ambos, esto significa que sería posible una construcción automática y directa de un modelo de análisis a partir de cualquier modelo geométrico, y de esta forma se conseguirían modelos de análisis geoméricamente exactos en cualquier fase del CAD.

Las funciones que se utilizan mayoritariamente en el CAD son las NURBS (non-uniform rational B-splines), estas funciones presentan algunas características positivas, como su idoneidad para representar cualquier superficie cuadrática, su capacidad de refinamiento y su continuidad  $C^{p-1}$  para NURBS de grado  $p$ .

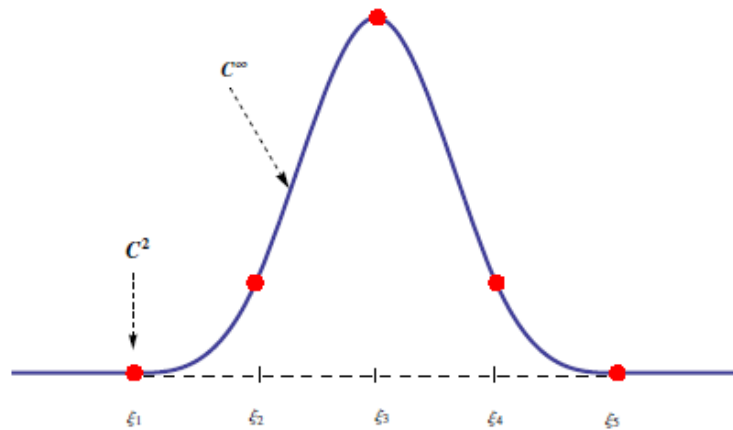


Fig. 1. Continuidad mínima  $C^2$  para spline cúbica.

Sin embargo también poseen algunas deficiencias, especialmente discontinuidades y superposiciones en las intersecciones de superficies e ineficiencia en la representación de detalles locales debido a su incapacidad para el refinamiento local, admitiendo solamente un refinamiento que se extiende a todo el dominio o refinamiento global.

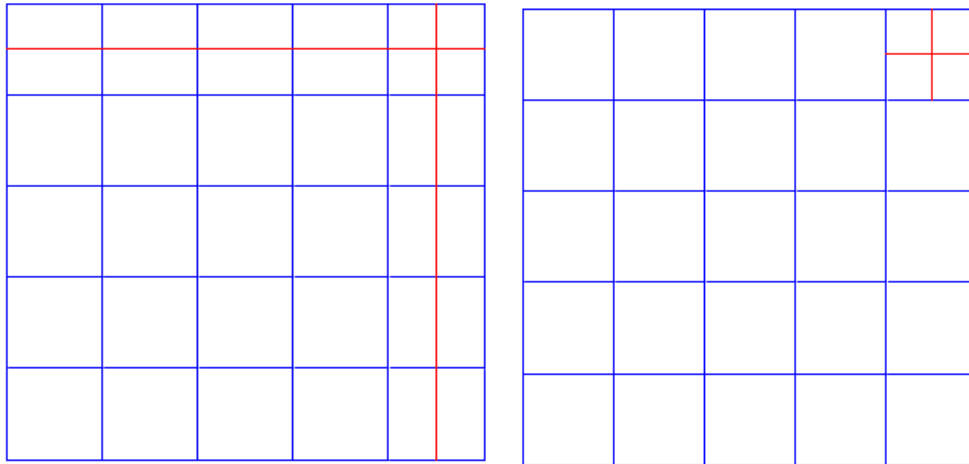


Fig. 2. Refinamiento global y local de una malla.

Con el fin de paliar dichas deficiencias han surgido recientemente las funciones T-splines; estas son una generalización de las NURBS pero con capacidad de refinamiento local y de generación de mallas más groseras pero con el mismo nivel de definición que las NURBS. Las funciones T-splines, al tener como soporte local a sus knots y admitir refinamiento local, son idóneas para su uso en el análisis isogeométrico, y en cuanto tales, han sido combinadas con un tipo de mallado apto a dicho propósito denominado T-malla.

Las T-mallas entonces, son un tipo de mallado caracterizado por disponer de T-uniones y que siendo soporte para T-splines en IGA, admiten refinamiento local.

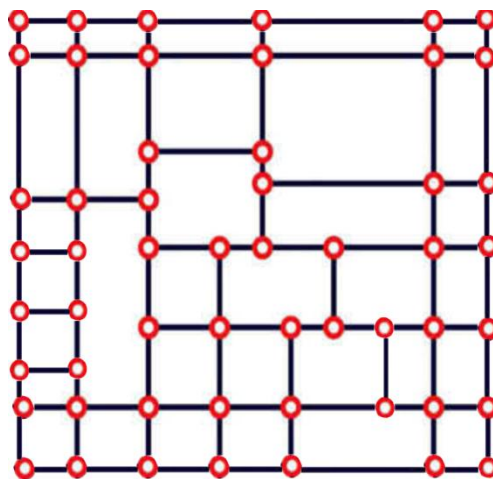


Fig. 3. T-malla

En análisis isogeométrico existe un mapeo biyectivo entre el espacio paramétrico de representación y el espacio físico, esto significa que los puntos del espacio paramétrico tienen una correspondencia uno-a-uno con los puntos del espacio físico.

Sin embargo, a diferencia de otros métodos numéricos como elementos finitos (FEA), el mapeo en IGA es local a un conjunto de elementos, o macroelemento, llamado parche o patch. Cada patch está compuesto de varios elementos y tiene el aspecto, en dos dimensiones, de un rectángulo formado por celdas cuadrangulares.

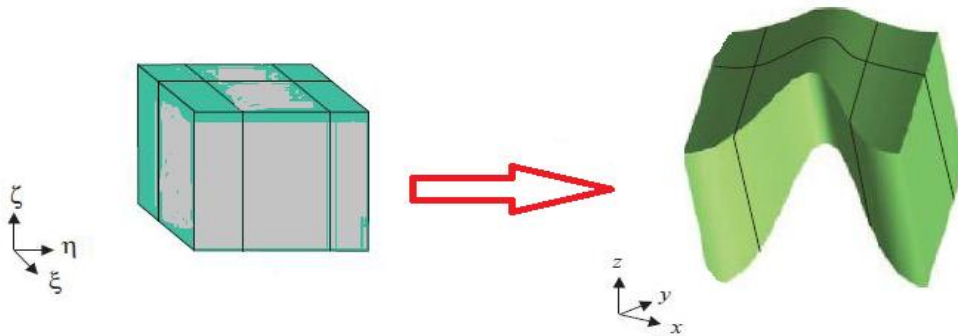


Fig. 4. Mapeo biyectivo entre patch en espacio paramétrico y real.

Cuando se pretende reproducir geometrías de configuraciones complejas, se recurre a la unión de varios Patches manteniendo al menos una continuidad  $C^0$  como mínimo en las líneas de unión. Los patches o sus uniones son representados en este caso por T-mallas con funciones base T-splines; y en concreto se usa un tipo de T-malla construido en base a la partición de cada celda en cuatro partes iguales hasta alcanzar el nivel de refinamiento deseado; recibiendo el nombre de Quadtree.

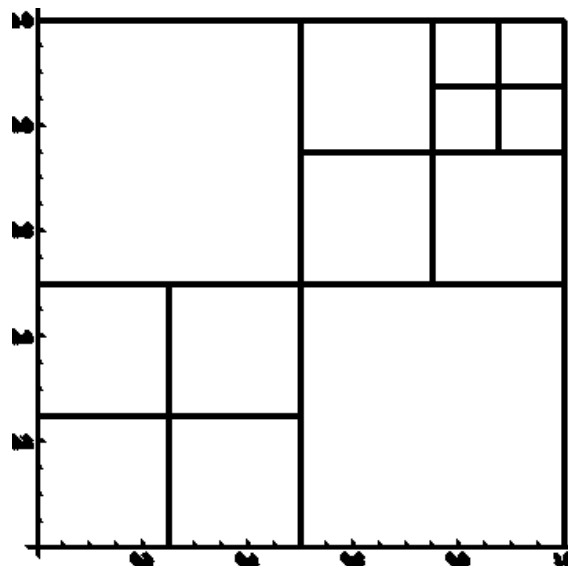


Fig.5. T-malla Quadtree

Si bien el Quadtree del espacio paramétrico mantiene una forma ideal, en el espacio físico pueden producirse enredos y dar lugar a elementos degenerados con

determinantes jacobianos negativos en las transformaciones entre el espacio físico y el paramétrico. Esto invalidaría completamente los resultados, tanto para el cálculo de los puntos de control, como para las soluciones del análisis.

Es por ello que es necesario disponer de un algoritmo de desenredo y suavizado diseñado para adaptarse a las características específicas de las T-mallas, que difiere en muchos aspectos de aquellos implementados con elementos triangulares o cuadrangulares para elementos finitos.

**Por lo tanto, el objetivo del trabajo consiste en la recolocación de los puntos internos de la malla física dada una frontera arbitraria, de forma que los elementos en el espacio físico adquieran una forma lo más parecida posible a la de sus correspondientes en el espacio paramétrico.** Esto se realiza para que la transformación obtenida a partir de la interpolación de dichos puntos sea buena, es decir, que produzca jacobianos lo más constantes posible y positivos. Una buena transformación es imprescindible para que IGA pueda operar correctamente y arroje resultados válidos.

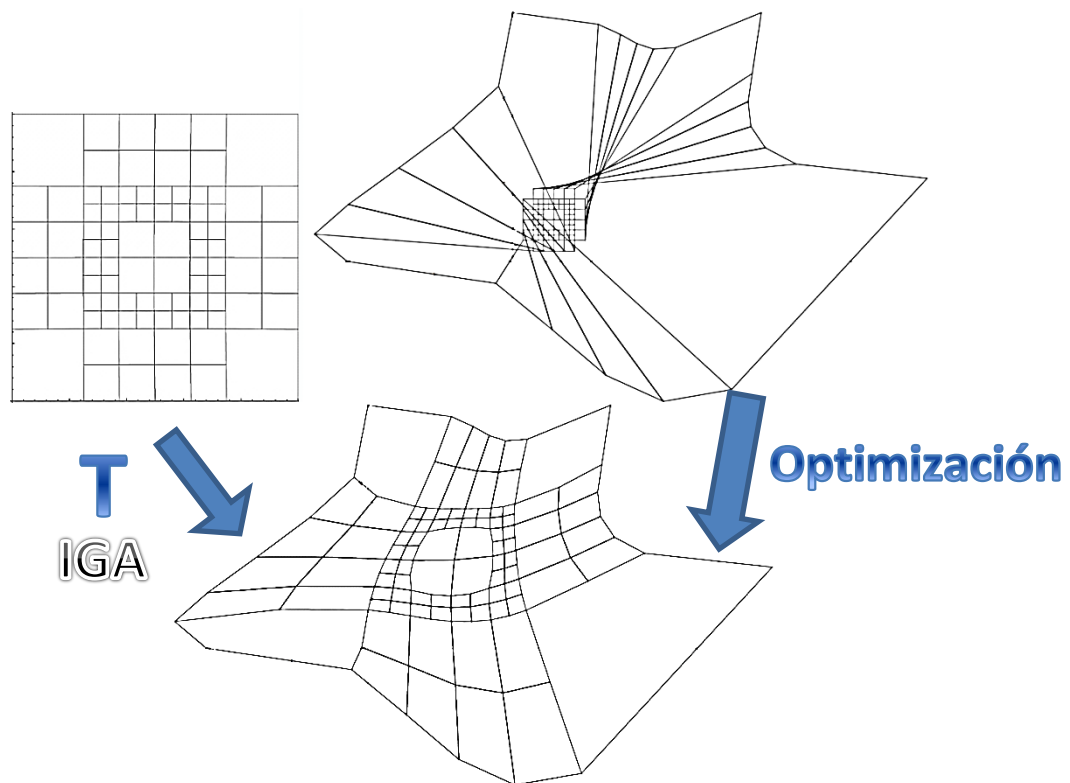


Fig. 6. Proceso de optimización de la malla física

Con el fin de lograr generar este algoritmo se ha recurrido, tal y como se detallará más adelante, al uso del concepto de medida algebraica de calidad para el cuadrilátero, desarrollado por Knupp; concretamente se intenta minimizar una función objetivo definida en términos de una medida algebraica de calidad modificada. Este proceso provoca la recolocación iterativa de los distintos vértices que conforman la T-malla en el espacio físico sin alterar las conectividades. Finalmente la T-malla del espacio físico optimizada tenderá a reproducir la

configuración geométrica de la T-malla del espacio paramétrico, lo cual generará relaciones entre los elementos de ambos espacios con calidades cercanas a la unidad. **Con esto conseguimos generar T-mallas para dominios planos arbitrarios**, aunque existen limitaciones.

El trabajo comenzará haciendo un breve repaso a los conceptos teóricos más relevantes para la comprensión de los desarrollos ulteriores. Se expondrá sintéticamente el concepto del análisis isogeométrico con sus principales elementos. Se proseguirá con la definición de las funciones de base T-splines y sus antecedentes las NURBS y las B-splines.

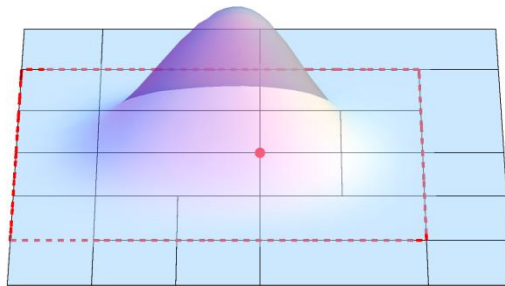


Fig. T-spline en su soporte local

A continuación se introducirán las técnicas empleadas para el desenredo y el suavizado de mallas de elementos cuadriláteros y su extensión a las T-mallas, dando como resultado el algoritmo del cual es objeto el presente trabajo.

Después se expondrán los resultados obtenidos en la aplicación del código a algunos ejemplos de mallas fuertemente enredadas y con fronteras de variadas formas y complejidades.

Por último se apuntarán las conclusiones del trabajo y se resaltarán las futuras líneas de investigación que se abren a la luz de los resultados conseguidos.

Como resultado principal del trabajo se ha desarrollado un código escrito con el lenguaje de alto nivel Mathematica.



## 2. Conceptos preliminares

Se considera necesario para abordar con rigor la solución al problema de la optimización de T-mallas, exponer de forma clara y sintética los conceptos que sirven de base al posterior razonamiento. Es por ello que este apartado se dedica a la clarificación del concepto de análisis isogeométrico, y también a la definición de las funciones geométricas de las que emana su utilidad e importancia.

### 2.1 Definición de análisis isogeométrico

La novedad que conlleva el análisis isogeométrico con respecto al método de los elementos finitos se resume en la idea de que las funciones geométricas que sirven de base al CAD se imponen como espacio de soluciones para el análisis, estas funciones son las NURBS o en nuestro caso las T-splines. Contrariamente, en el método de los elementos finitos, eran las funciones polinómicas a trozos que servían de base para el cálculo de la solución, las que eran usadas para aproximar la geometría. Este cambio de enfoque entraña algunas diferencias conceptuales y operativas con respecto a FEA, si bien el esquema general continúa siendo el mismo.

En IGA se definen tres espacios de representación geométrica, el espacio físico, el espacio paramétrico y el espacio índice. Nos concentraremos en los dos primeros ya que son en términos operativos los más relevantes. A su vez el espacio físico se encuentra conformado por dos tipos de mallado: la malla de control, y la malla física. La malla de control interpola a los denominados puntos de control. Las variables de control están asociadas a los puntos de control. La malla de control no representa la geometría real; ésta viene conformada por la malla física. Los conceptos principales de la malla física son los parches o patches y los knot spans. Tal y como se ha explicado en la introducción, un patch es un macroelemento o subdominio rectangular que tiene su imagen biyectiva en el espacio paramétrico, y un knot span es el elemento básico que forma los patches, y representa la figura análoga a los elementos del FEM. En el caso bidimensional los knots tendrán una topología de línea en el espacio paramétrico y de curva en el físico y los knots spans serán superficies curvas delimitadas por cuatro curvas (knots). Entre knots las funciones base tendrán una continuidad  $C^{p-m}$ , donde  $p$  es el grado del polinomio, y  $m$  la multiplicidad del knot.

En IGA, cuando la transformación geométrica entre espacios se obtiene a través de la interpolación de puntos del dominio, como será en nuestro caso, es necesario resolver dos sistemas de ecuaciones, uno para hallar la transformación en la geometría, y otro para calcular la solución asociada a los puntos de control que emanan de dicha transformación geométrica. El cálculo de las soluciones se realiza en el espacio paramétrico, por tanto es imprescindible conocer la transformación entre ambos espacios.

La transformación geométrica entre el espacio físico y el paramétrico puede definirse de la siguiente manera para el caso bidimensional con funciones base NURBS o T-spline:

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(\xi, \eta) = \sum_{\alpha \in A} P_{\alpha} B_{\alpha}(\xi, \eta), P_{\alpha} \in \mathbb{R}^2$$

siendo  $B_{\alpha}$  la función blending:

$$B_{\alpha}(\xi, \eta) = \frac{N_{\alpha}(\xi, \eta)}{\sum_{\beta \in A} N_{\beta}(\xi, \eta)}, w_{\alpha} = 1$$

y siendo  $N_{\alpha}$  la función base spline bivariable:

$$N_{\alpha}(\xi, \eta) = N_{\alpha}^1(\xi) N_{\alpha}^2(\eta)$$

Para hallar los puntos de control  $P_{\alpha}$  tomaremos puntos de interpolación en el espacio paramétrico ( $t_{\beta}$ ) y en el espacio físico ( $S(t_{\beta})$ ), de forma que:

$$T(t_{\beta}) = \sum_{\alpha \in A} P_{\alpha} B_{\alpha}(t_{\beta}) = S(t_{\beta}) \quad \forall t_{\beta}, \beta \in A$$

Generalmente se eligen tantos puntos de interpolación como funciones base, y los puntos de interpolación se toman en el centro de las splines (anclas). En el espacio físico se tomarán como puntos interpoladores a los vértices de la malla cuando esta está bien conformada, es decir, cuando el determinante jacobiano de la transformación entre los elementos de ambos espacios es positivo y casi constante.

A través de la transformación T obtendremos los valores de los puntos de control P; los valores de las variables de control asociadas a estos puntos nos permitirán el cálculo de las soluciones.

A continuación podemos utilizar esta parametrización del dominio para resolver cualquier ecuación en derivadas parciales definida en dicho dominio y con valores en la frontera, para ello recordamos el planteamiento clásico para ecuaciones elípticas tal que:

Si tenemos una forma bilineal, continua y elíptica

$$a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

y a su vez una forma lineal continua

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}$$

Planteamos el problema:

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

estando la existencia asegurada a través del teorema de Lax-Milgram. Es conveniente resaltar que u y v son las funciones de prueba y de peso respectivamente. Esta es la forma abreviada de indicar que se trata de la formulación variacional del problema fuerte en derivadas parciales, encomendado a debilitar dicha formulación para poder hallar la solución u.

En el caso de valores en la frontera debemos incorporar la condición tipo Dirichlet en la definición de la función de prueba y una condición homogénea en la función de peso. De manera que:

$$u|_{\Gamma_D} = g \text{ y } v|_{\Gamma_D} = 0$$

Por la naturaleza integro-diferencial de dicha formulación es imprescindible recurrir a funciones de cuadrado integrable( $L^2$ ) tal que:

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega < +\infty ; \text{ siendo } u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Pero también necesitamos que las derivadas de las soluciones sean integrables:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u d\Omega < +\infty$$

Entonces recurrimos a definir  $V$  como un espacio de Sobolev:

$$H^1(\Omega) = \{u | D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

Este problema no es resoluble en su planteamiento actual por encontrarse definido en un espacio de dimensión infinita, sin embargo podemos utilizar un subespacio aproximado de  $Dim < \infty$ , y redefinir el problema como:

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad v_h \in V_h$$

Este método es ampliamente utilizado en elementos finitos y recibe el nombre de método de Galerkin o Bubnov-Galerkin aunque existen otros como mínimos cuadrados, colocación o métodos sin malla (meshless). Hemos tomado  $u$  y  $v$  del mismo espacio  $V$  pero se podrían haber tomado de espacios distintos.

Ahora la solución aproximada  $u_h$  se toma como combinación lineal de la base de  $V_h$ , para ello tomamos como funciones de base, tanto para las funciones de prueba como para las de peso, las mismas funciones que tomamos en la transformación paramétrica del dominio, es decir las T-splines.

$$\hat{u}_h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N a_i B_i(\xi, \eta), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Estando  $u_h$  definida en el dominio paramétrico y con  $a_i$  como variables de control asociadas a las puntos de control.

La transformación al dominio físico se haría aplicando  $T$ .

$$u_h(x, y) = \hat{u}_h(T^{-1}(x, y)) = \hat{u}_h(\xi, \eta).$$

Debemos tener en cuenta que muchas funciones base se anulan en el contorno y por tanto separaremos la ecuación en:

$$\hat{u}_h = \sum_{i=1}^A a_i B_i + \sum_{i=A+1}^N a_i B_i,$$

Siendo  $i= 1..A$  las funciones que se anulan en el contorno.

Las  $a_i$  del segundo sumatorio pueden calcularse a partir de la condición Dirichlet:

$$u|_{\partial\Omega} = b(x, y)$$

Planteando el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=A+1}^N a_i B_i(\xi_j, \eta_j) = b(T(\xi_j, \eta_j)), \quad j = 1..N - A,$$

$P_j$  son los puntos de interpolación en el contorno. Haciendo:

$$g(\xi, \eta) = \sum_{i=A+1}^N a_i B_i(\xi, \eta).$$

Nos queda:

$$\hat{u}_h = \sum_{i=1}^A a_i B_i + g.$$

Finalmente sustituimos  $\hat{u}_h$  en la integral por partes de la forma débil y formamos las matrices del sistema .

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f) B_i d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, A.$$

$$\sum_{j=1}^A a_j \left( \int_{\Omega} (\nabla B_j \cdot \nabla B_i d\Omega) \right) = \int_{\Omega} f B_i d\Omega - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla B_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, A.$$

$$K \bar{a} = \bar{f}$$

Siendo:

$$K_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla B_j \cdot \nabla B_i d\Omega,$$

$$f_i = \int_{\Omega} f B_i d\Omega - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla B_i d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, A.$$

Las integrales se evalúan en el espacio físico, sin embargo sólo pueden ser resueltas en el espacio paramétrico, por tanto se aplicará la transformación T.

$$d\Omega = dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta = |\mathbf{J}| d\hat{\Omega}.$$

$$\nabla_{xy} B_i(T(\xi, \eta)) = \nabla_{\xi\eta} B_i(\xi, \eta) \mathbf{J}^{-1}$$

Planteando para cada elemento discretizado:

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \nabla B_j \cdot \nabla B_i \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}_e} \nabla_{\xi\eta} B_j(\xi, \eta) \mathbf{J}^{-1} \cdot \nabla_{\xi\eta} B_i(\xi, \eta) \mathbf{J}^{-1} |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega}, \\ f_i^e &= \int_{\Omega_e} f(x, y) B_i \, d\Omega - \int_{\Omega_e} \nabla g \cdot \nabla B_i \, d\Omega = \\ &= \int_{\hat{\Omega}_e} \hat{f}(\xi, \eta) B_i |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}_e} \nabla_{\xi\eta} g \mathbf{J}^{-1} \cdot \nabla_{\xi\eta} B_i \mathbf{J}^{-1} |\mathbf{J}| \, d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

Finalmente las integrales se evalúan numéricamente con cuadratura de Gauss, es por tanto importante que el jacobiano de la transformación sea positivo y para ello el elemento en el espacio físico debe tener una forma apropiada.

## 2.2 Definición de B-spline

Las funciones NURBS son una generalización de las funciones B-splines. Estas funciones son polinómicas a trozos y son adaptables a geometrías complejas de forma suave. La particularidad introducida por las B-splines es que el espacio paramétrico es local a los patches y no a los elementos. Los elementos clave en la formación de una B-spline son los knots y las funciones base.

### 2.2.1 Knots

Los vectores knots son una secuencia no decreciente de coordenadas en el espacio paramétrico. Se representan como  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , con  $\xi_i \in \mathbb{R}$ ; p el grado del polinomio y n el número de funciones base. Varios knots pueden ocupar el mismo lugar en el espacio paramétrico, y se dice que un vector knot es abierto cuando su primer y último knot tienen multiplicidad p+1. Las funciones base están definidas sobre los vectores knot.

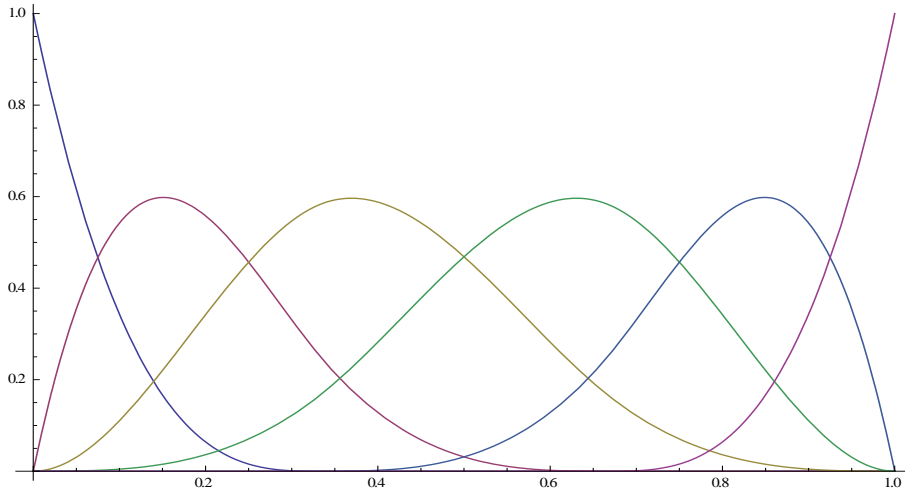


Fig. 8. Funciones B-spline cúbicas del knot vector: {0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1}

### 2.2.2 Funciones base

Una función de base univariante  $N_{i,p}$  se define sobre  $\Xi$  empezando por el grado  $p=0$  como:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Cuando aumentamos el grado del polinomio  $p=1,2,3,..$  empleamos la fórmula de recursión de Cox-de-Boor:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

Las propiedades de las B-splines son:

- 1) Partición de la unidad:  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ .
- 2) No negatividad:  $N_{i,p}(\xi) \geq 0, i = 1,2, \dots, n$ .
- 3) Independencia lineal:  $\sum_{i=1}^n \alpha_i N_{i,p}(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = 0, k = 1,2, \dots, n$ .
- 4) Soporte compacto:  $\{\xi | N_{i,p}(\xi) > 0\} \subset [\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ .
- 5) Continuidad controlada: Un knot con multiplicidad  $K$  implica una continuidad de su base de  $C^{p-k}$ . Si  $k=p$  la continuidad será  $C^0$ .

Estas propiedades aseguran matrices mejor condicionadas y sparse, así como una gran flexibilidad para determinar la suavidad de las bases.

Como hemos visto, existen  $n$  bases mientras que  $n+p+1$  knots, si el vector es abierto. Las bases están asociadas a los vectores en determinados lugares del espacio paramétrico llamados anclas.

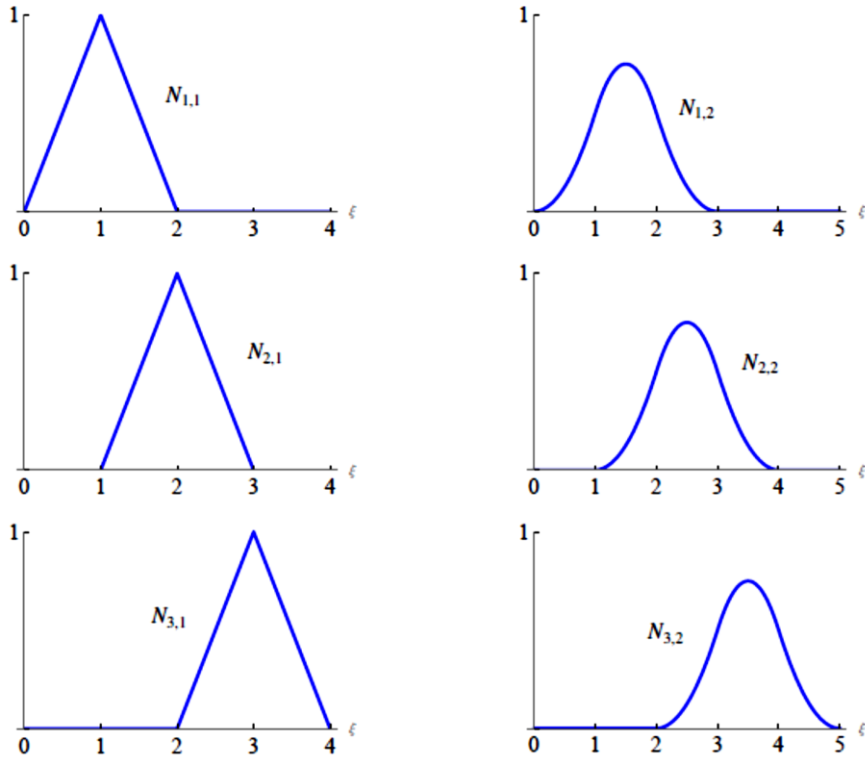


Fig. 9. B-spines de grado 1 y grado 2 respectivamente para los knot vectors  $\{1,2,3,4\}$  y  $\{1,2,3,4,5\}$ .

### 2.2.3 Curvas B-spline

Una curva B-spline se define como combinación lineal de varias B-spline univariantes:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,p}(\xi)$$

Siendo  $P_i \in \mathbb{R}^d$ , ( $d$  = dimensión del espacio), los puntos de control. La interpolación lineal de los  $P_i$  forma el polígono de control, sin embargo la B-spline no es interpolante respecto de sus puntos de control, excepto el primero y el último, y en el caso de knots repetidos. El polígono de control tiene interesantes propiedades; como la obtención de un transformación afín a la B-spline cuando se aplica a sus puntos de control, la inclusión de la B-spline en la envolvente convexa de sus

puntos de control, o la disminución de la variación con respecto a la dimensión del polígono de control. Además conserva las propiedades de continuidad de las bases.

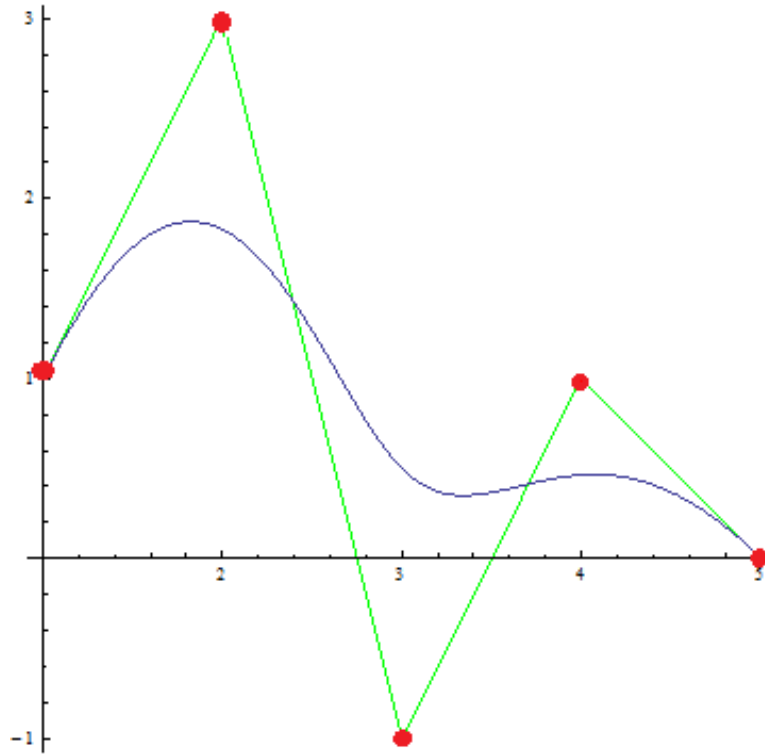


Fig. 10. Curva B-spline y su polígono de control.

### 2.2.4 Superficie B-spline

Una B-spline bidimensional o bivalente se obtiene como producto tensorial de dos B-splines univariantes.

$$N_{i,p}(\xi, \eta) = N^1_{i_1,p_1}(\xi) \cdot N^2_{i_2,p_2}(\eta)$$

Una superficie B-spline, por lo tanto, será una combinación lineal de varias B-splines bivalentes.

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,p}(\xi, \eta), \quad P_i \in \mathbb{R}^3$$

La superficie estará asociada a dos vectores knots  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ ,  $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+p+1}\}$ . Y los puntos de control  $P_i$  constituirán la malla de control. En el caso bidimensional ambos vectores knot constituirán un knot span, el elemento mínimo; y cada knot span estará inmerso en un patch. Cada patch tiene su propio espacio paramétrico, y cuando una superficie es muy compleja se recurre a la unión de varios patches. Los puntos de control deben ser idénticos en la línea, punto o superficie de unión, por tanto solo habrá continuidad  $C^0$  de las bases en las intersecciones de patches.



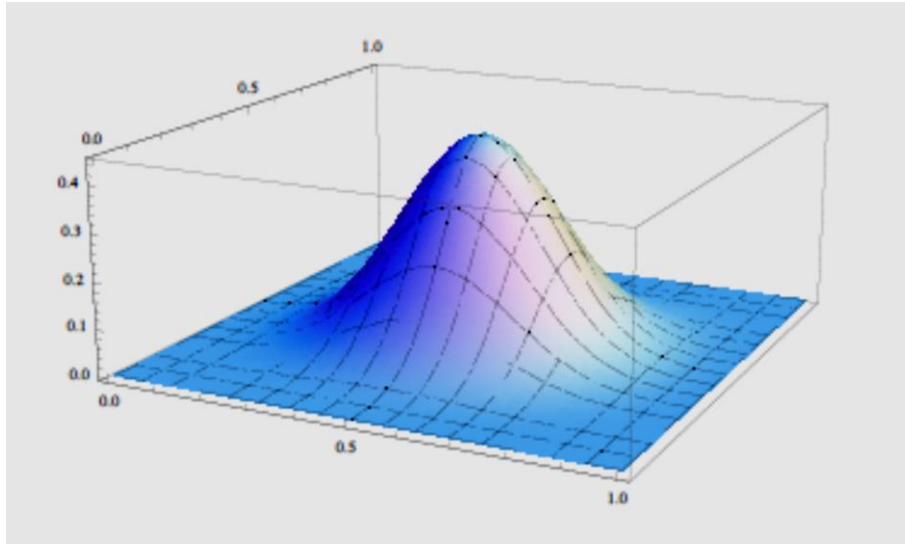


Fig. 11. Representación de B-spline bivalente

### 2.3 Definición de NURBS

Las NURBS (Non Uniform Rational B-splines) son entidades geométricas extraídas directamente de las B-splines. Su importancia reside en la capacidad de modelar secciones cónicas (tales como círculos, elipses, etc) que son difíciles de obtener a través de funciones polinómicas a trozos como las B-splines.

La curva NURBS se define como:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i B_{i,p}(\xi)$$

Siendo  $B_{i,p}$  :

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(\xi)}$$

Con  $N_{i,p}(\xi)$  como base univariante.

En el caso de NURBS multivariantes, como sería el de una superficie bidimensional caracterizado por una NURBS bivalente la función tomaría:

$$B_{i,p}(\xi, \eta) = \frac{w_i N_{i,p}(\xi, \eta)}{\sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(\xi, \eta)}$$

Donde  $w_i$  recibe el nombre de peso.

Con  $N_{i,p}(\xi, \eta)$  como base bivalente:  $N_{i,p}(\xi, \eta) = N_{i_1, p_1}(\xi) \cdot N_{i_2, p_2}(\eta)$

Generalmente cuando se habla de B-splines racionales se quiere significar NURBS, siendo las B-splines funciones polinómicas. El hecho de que sean no uniformes implica que sus knots no tienen que estar espaciados a distancias iguales.

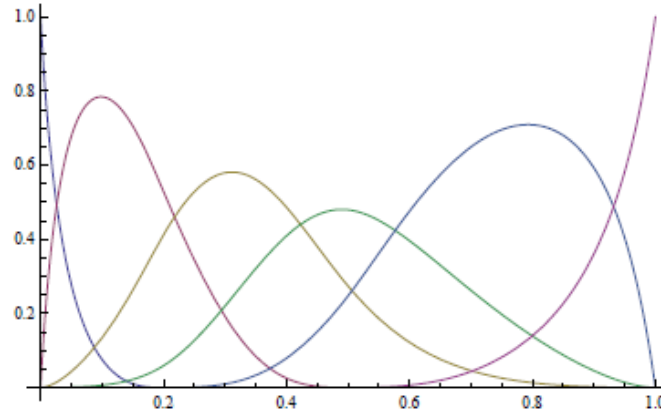


Fig. 12. Función NURBS de grado 3 a partir de knot vector no-uniforme:  $\{0,0,0,0,0.2,0.5,1,1,1\}$  y peso  $w:\{1,2,1,1,2,1\}$ .

### 2.4 Definición de T-spline

Tal y como mencionamos en la introducción, el principal inconveniente de las NURBS, a pesar de su gran flexibilidad y precisión en la representación cónica, es el carácter global que posee su refinamiento. Esto quiere decir que cualquier refinamiento en un punto concreto de la malla se propaga en toda la dirección del vector knot, dando lugar a mallas homogéneas.

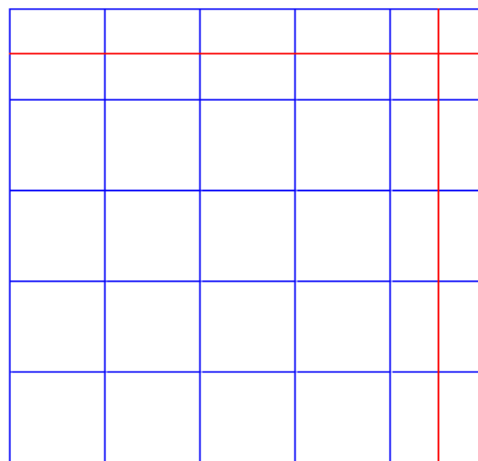


Fig. 13. propagación de refinamiento

Con el fin de superar este obstáculo han surgido las PB-splines y las T-splines. Ambas tienen capacidad de refinamiento aislado en una región porque están soportadas en knots locales. la principal diferencia entre ambas reside en que la

PB-spline no necesita una malla regular como soporte, estando sus puntos de control repartidos en una nube sin organización ni topología concreta; mientras que la T-spline está caracterizada por una malla regular con determinadas especificidades, lo cual permite añadir a las ventajas propias de la NURBS su propiedad de refinamiento local.

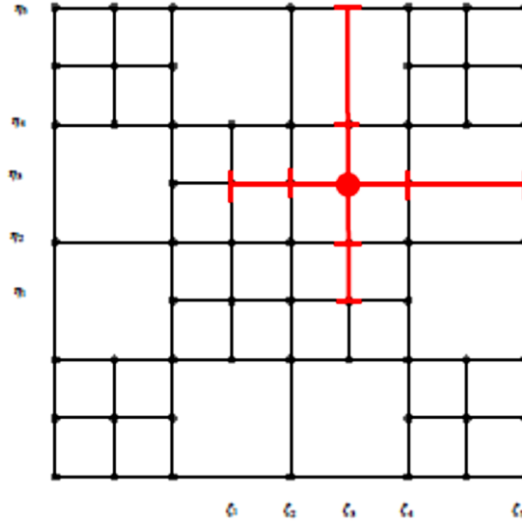


Fig. 14 .T-spline con vectores knot en su soporte en T-malla

Para una T-spline, cada función posee su propio vector local, y todos los vectores locales con sus funciones están unidos en una estructura común llamada T-malla. Esta es una malla no uniforme con la característica de admitir la unión de tres aristas en sus vértices, llamada unión-T (T-junction). Las uniones de aristas, o vértices, son asociadas al valor de un knot.

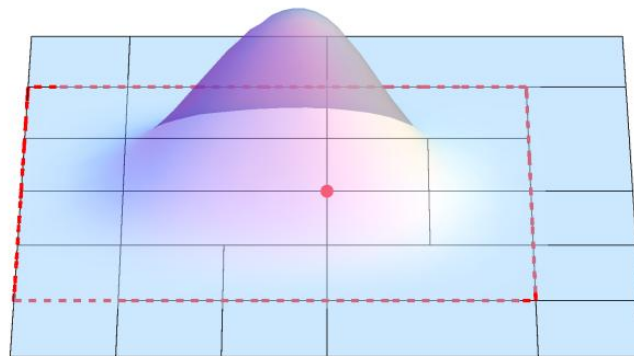


Fig.15 . T-spline en soporte local

Una T-spline se construye en primer lugar asociando a cada vector knot local  $\Xi_\alpha = \{\xi_i\}_{i=1}^{m_\alpha}$  una función  $N_\alpha(\xi)$ , en el caso bidimensional se tendría:

$$N_{i,p}(\xi, \eta) = N_{i_1,p_1}(\xi) \cdot N_{i_2,p_2}(\eta)$$

Entonces en el espacio paramétrico bidimensional, por cada ancla  $S_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , y  $A \subset \mathbb{Z}^2$  se tienen dos vectores knot locales asociados  $\Xi_1, \Xi_2$ . Cada punto de control  $P_\alpha \in \mathbb{R}^2$  (dimensión en el espacio físico) está asociado a  $\alpha$ . De forma general decimos que cada punto de control tiene un peso asociado  $w_\alpha$ . Por tanto la función blending T-spline será:

$$B_{i,p}(\xi, \eta) = \frac{w_i N_{i,p}(\xi, \eta)}{\sum_{j=1}^n w_j N_{j,p}(\xi, \eta)}$$

Finalmente la T-spline en el espacio paramétrico quedará:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n P_i B_{i,p}(\xi, \eta)$$

### 2.5 T-splines en la T-malla

Cuando la T-malla, formada por intersecciones de aristas horizontales y verticales que admiten uniones en T y con presencia de nodos colgantes (hanging nodes), sirve de soporte a las T-splines, su configuración depende de la localización de los vértices y de los vectores knot locales. En este caso en el que las T-splines se superponen a la T-malla, todas las líneas de la T-malla corresponden a valores de knots; y cada vector knot posee un número de knots dictado por el grado p de la T-spline.

Recordemos que la T-spine es una función de base, y la T-malla es la estructura sobre la que se define la T-spline.

Para construir la T-malla con T-splines como bases, se proyectan líneas desde las vértices y se definen los knots a través de su intersección con las aristas ortogonales tanto verticales como horizontales ( $(p+1)/2$  intersecciones con aristas en cada dirección); tomando dos vectores knots por vértice. Si no se encontraran suficientes aristas ortogonales en una dirección para rellenar el vector knot, se repite el último knot en dicha dirección hasta rellenar el vector.

Toda vez localizados por este procedimiento los vectores knots, se pueden generar las funciones blending. En el caso de funciones de grado p impar las anclas coincidirán con un vértice, cuyo valor será incluido en la posición central del vector knot. En caso de grado par las anclas estarán situadas en el centro de la celda y su valor no será incluido en el vector knot. En el espacio paramétrico los valores de los knots estarán comprendidos entre 0 y 1.

La continuidad de las T-splines en el espacio físico depende de la continuidad de las funciones blending en el espacio paramétrico. Adicionalmente cada vector knot local define la continuidad de su función blending. Una función de grado p será  $C^{p-k}$  a través del valor de un knot, siendo k la multiplicidad del knot en el vector local. De esto se deduce que la continuidad es también local al soporte de cada función, y que las T-splines pueden tener distinto grado de suavidad en una misma T-malla.

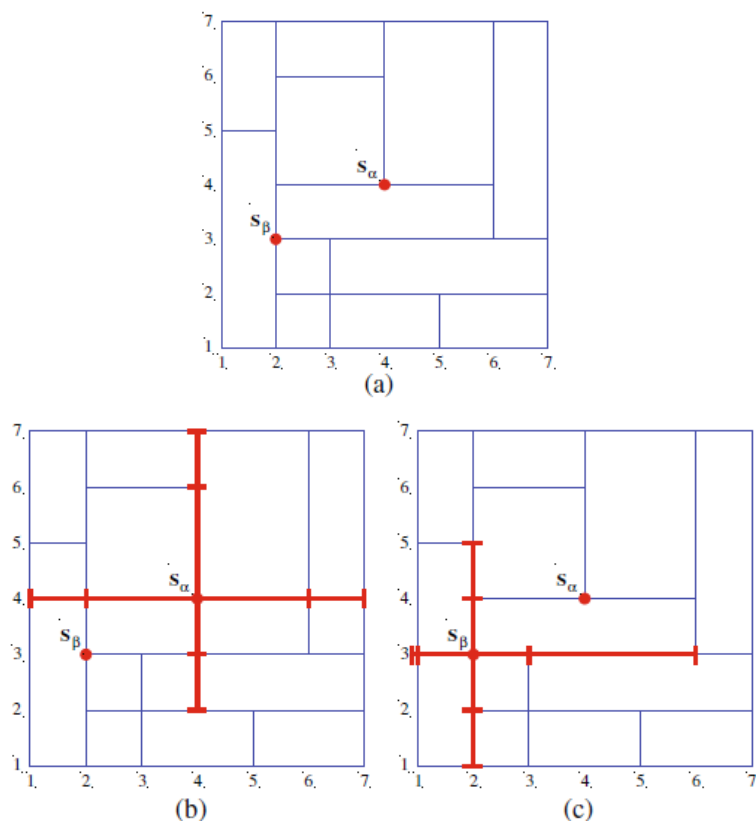


Fig. 16. T-malla con T-spline de grado  $p$  impar

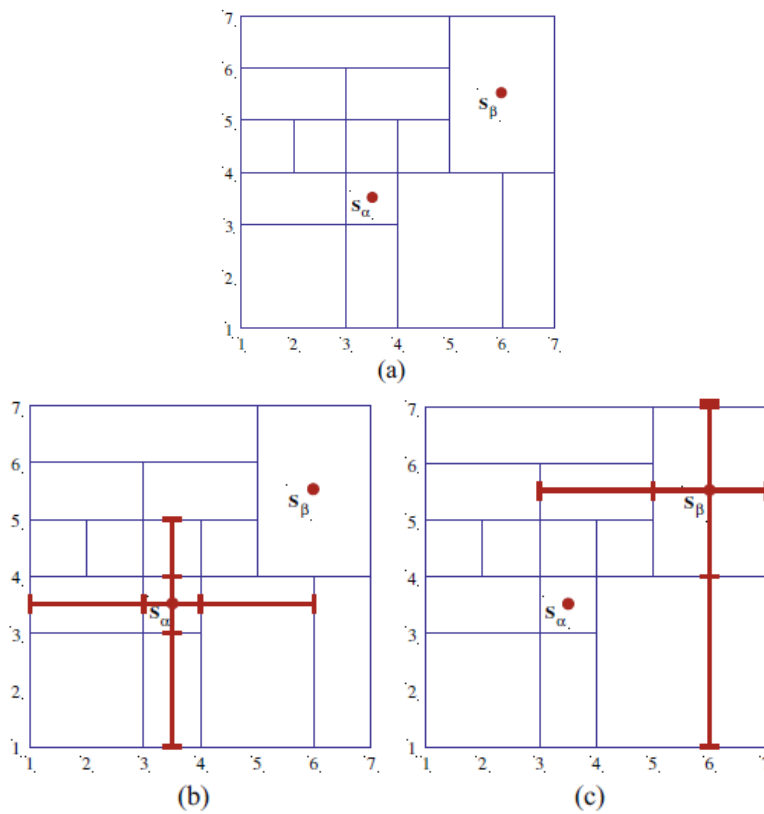


Fig. 17. T-malla con T-spline de grado  $p$  par

### 3. Desenredo y suavizado de T-mallas

Tal y como se explicó en la introducción, el objetivo del trabajo consiste en la recolocación de los puntos internos de la malla física dada una frontera arbitraria, de forma que los elementos en el espacio físico adquieran una forma lo más parecida posible a la de sus correspondientes en el espacio paramétrico. De esta forma logramos generar automáticamente una T-malla en el espacio físico para dominios planos arbitrarios.

Estas T-mallas estarán bien conformadas de forma que los jacobianos que se produzcan en la transformación calculada a partir de la interpolación de los vértices de la malla entre los espacios físico y paramétrico sean casi constantes y positivos.

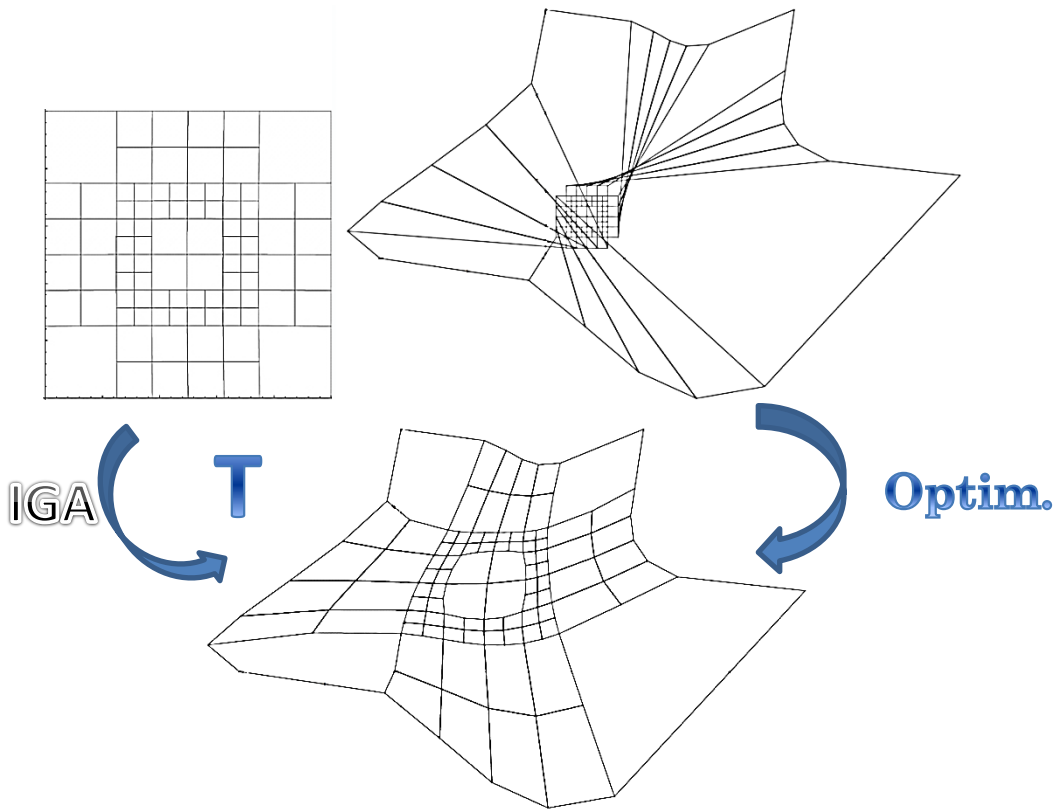


Fig. 18. Proceso de optimización

#### 3.1 El concepto de jacobiano de la transformación

Tanto en el análisis por elementos finitos como en el análisis isogeométrico es importante el concepto de transformación entre espacios de representación debido a que las integrales numéricas que se plantean en el espacio físico para el cálculo de la solución deben ser transformadas al espacio paramétrico, donde la geometría

está bien definida, ya que las splines en IGA están definidas en el espacio paramétrico.

Sea una transformación desde el espacio paramétrico al espacio físico:

$$T: x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta)$$

El paso del físico al paramétrico será la inversa de la transformación T:

$$T^{-1}: \xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y)$$

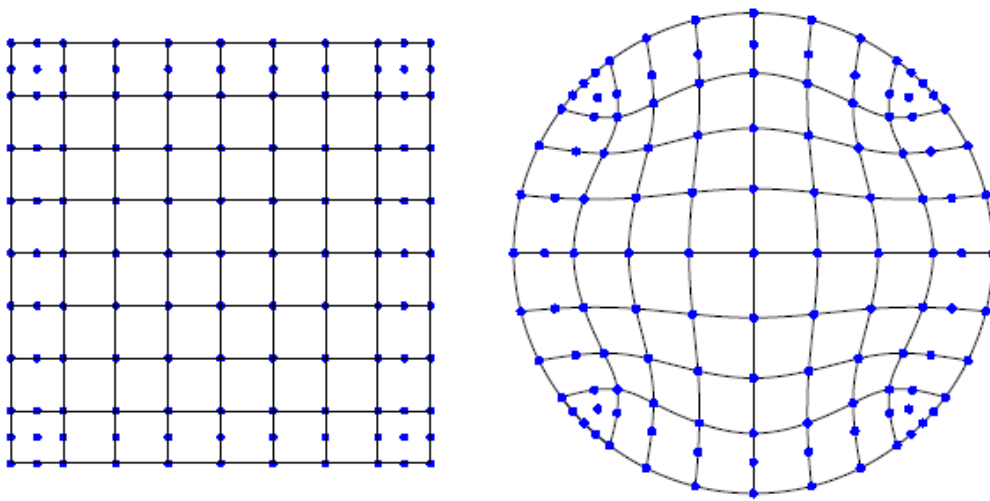


Fig.19. Malla paramétrica y malla física con sus anclas (vértices más puntos de interpolación adicionales).

Por tanto para realizar una integral del espacio físico en el espacio paramétrico es necesario aplicar la transformación  $T^{-1}$  y modificar el diferencial del área por el nuevo diferencial que sería:

$$ds = dx dy = \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right) d\xi d\eta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta$$

Se denomina jacobiano o determinante jacobiano a la relación:

$$\mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{dx dy}{d\xi d\eta} = \frac{ds}{ds'}$$

o también sabiendo que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Tomando el vector de posición:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$ds = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \vec{k} \right) d\xi d\eta = \mathbf{J} d\xi d\eta$$

Se demuestra que el jacobiano es el producto vectorial de los dos vectores de la derivada del vector posición en x,y respecto de  $\xi, \eta$ , también denominados vectores velocidad.

Por tanto, la interpretación física del jacobiano se traduce en una relación de áreas entre los dos espacios, de ahí que sea imprescindible que el jacobiano sea positivo y lo más constante posible en el dominio, ya que esto indicaría una transformación uno-a-uno entre ambos espacios; por el contrario un jacobiano negativo indicaría una relación negativa entre las áreas de los espacios y por lo tanto una transformación disconforme, indicaría que el elemento en el espacio físico está enredado o es plano, y la integral sería irrealizable.

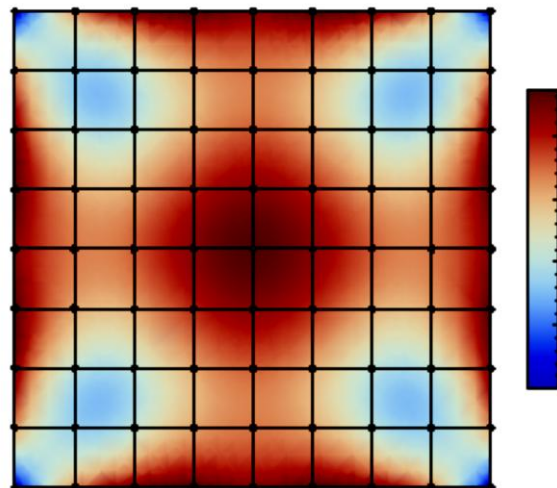


Fig.20. Jacobiano de la transformación de las mallas de la figura 19.



### 3.2 Medidas algebraicas de calidad para triángulos y cuadriláteros

La técnica de optimización de mallas usada en este trabajo tiene gran parte de su fundamento en el uso del concepto de medida algebraica de calidad para cuadriláteros. Éste fue en primer lugar propuesto por Patrick M. Knupp como desviación de la forma de un símplice respecto de una medida ideal que representa la forma que se desea alcanzar.

En primer lugar atacaremos la formulación algebraica para elementos triangulares, extendiéndola posteriormente al cuadrado.

Si denotamos como  $t$  un triángulo en el espacio físico, y como  $t_I$  el triángulo ideal; para medir la desviación del triángulo físico del ideal necesitamos determinar el siguiente mapeo de afinidad:

$$f_s: t_I \rightarrow t$$

$$\tilde{x} \mapsto x = \mathbf{S}\tilde{x} + v$$

$\tilde{x}$  son las coordenadas del elemento ideal.

Con el objetivo de lograr esta relación, consideramos un triángulo de referencia  $t_R$  que se encuentra delimitado por los vértices  $u_0 = (0,0)$ ,  $u_1 = (1,0)$ ,  $u_2 = (0,1)$  en el espacio paramétrico. Si el elemento ideal,  $t_I$ , está delimitado por los vértices  $\tilde{x}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ ,  $\tilde{x}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ ,  $\tilde{x}_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ , el mapeo del elemento de referencia al ideal será:

$$f_w: t_R \rightarrow t_I$$

$$\mathbf{u} \mapsto \tilde{x} = \mathbf{W}\mathbf{u} + \tilde{x}_0$$

Y además:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0 & \tilde{x}_2 - \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0 & \tilde{y}_2 - \tilde{y}_0 \end{pmatrix}$$

Si ahora tomamos el triángulo físico definido por:  $x_0 = (x_0, y_0)$ ,  $x_1 = (x_1, y_1)$ ,  $x_2 = (x_2, y_2)$ , el mapeo del elemento de referencia  $t_R$  al triángulo físico  $t$  será:

$$f_A: t_R \rightarrow t$$

$$\mathbf{u} \mapsto x = \mathbf{A}\mathbf{u} + x_0$$

Con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

Ahora el mapeo entre el elemento ideal y el triángulo físico puede ser expresado de la siguiente manera:

$$f_s = f_A \circ f_w^{-1}: t_I \mapsto t_R \mapsto t$$

$$\tilde{x} \mapsto \mathbf{u} = f_w^{-1}(\tilde{x}) \mapsto \mathbf{x} = f_A(\mathbf{u})$$

Y de ahí se sigue que:

$$\mathbf{x} = f_s(\tilde{x}) = f_A(f_w^{-1}(\tilde{x})) = \mathbf{A}f_w^{-1}(\tilde{x}) + \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{W}^{-1}\tilde{x} + \tilde{\mathbf{v}}) + \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\tilde{x} + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{x}_0$$

Siendo  $\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{W}^{-1}\tilde{x}_0$

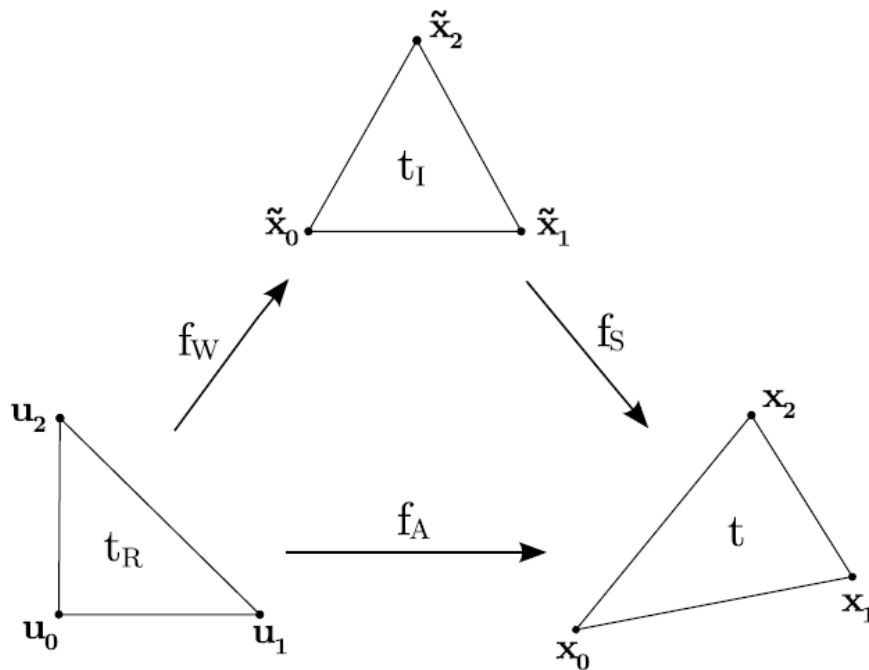


Fig.21. Mapeo entre elementos físico, ideal y de referencia para el triángulo.

si comparamos esta expresión con el primer mapeo tenemos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{x}_0$$

La matriz jacobiana del primer mapeo se denomina matriz jacobiana ponderada (**S**). Esta matriz contiene la información acerca de cuál es el grado de deformación del elemento físico con respecto al ideal, basándose en esto Knupp introdujo la medida de distorsión de la forma:

$$\eta(\mathbf{S}) = \frac{|\mathbf{S}|^2}{n\sigma(\mathbf{S})^{2/n}}$$

donde  $\sigma(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S})$ ,  $|\mathbf{S}| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{S}^T\mathbf{S})}$  es la norma Frobenius, y  $n$  es la dimensión (2 para triángulos). El resultado sería 1 cuando el elemento es ideal, e infinito en caso de degeneración.

La medida de calidad de la forma finalmente será la inversa de la distorsión:

$$q(\mathbf{S}) = \frac{1}{\eta(\mathbf{S})} = \frac{n\sigma(\mathbf{S})}{|\mathbf{S}|^2}$$

Por tanto, el elemento ideal tendrá calidad 1 y el invertido será de calidad 0.

La medida de calidad para cuadriláteros se consigue tomando como base la del triángulo. Se obtiene a partir de la descomposición del cuadrilátero en cuatro triángulos de forma que denotando la medida de distorsión del triángulo  $i$  como  $\eta(\mathbf{S}_i)$ , la medida de distorsión del cuadrilátero será:

$$\eta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta(\mathbf{S}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{S}_i|^2}{n\sigma(\mathbf{S}_i)}$$

donde  $N$  es el número de nodos del elemento cuadrilátero.

Generalmente se toma como elemento ideal cuadrilátero al cuadrado, así, si se divide en cuatro triángulos tendríamos para este caso como el triángulo ideal es rectángulo e isósceles. Por lo tanto, para cada cuadrilátero, el mapeo entre el subtriángulo de referencia y el ideal es:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La medida de calidad del elemento cuadrilátero quedará como:

$$q = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta(\mathbf{S}_i)} = N \sum_{i=1}^N \frac{n\sigma(\mathbf{S}_i)}{|\mathbf{S}_i|^2}$$

### 3.3 Optimización de mallas de elementos cuadriláteros

Dada una malla cuadrilátera  $\mathcal{M}$ , si hacemos  $\mathcal{V}$  el conjunto de nodos internos y  $\nu$  un nodo perteneciente a los puntos internos,  $\nu \in \mathcal{V}$ ; definimos la submalla local asociada a  $\nu$ ,  $\mathcal{M}_\nu$ , como el conjunto de elementos que contienen al nodo  $\nu$ . El algoritmo de desenredo y suavizado de mallas para cuadriláteros se basa en la optimización de una función que ha sido definida a partir de la medida de distorsión algebraica de los elementos de la submalla local. A través del algoritmo se puede desenredar y suavizar la malla simultáneamente, e incluso mejorar la medida de calidad de los elementos cuando se introduce una modificación a la función objetivo, tal y como se explicará.

El principio consiste en la recolocación iterativa de cada nodo  $\nu$  dentro de los límites de su submalla local promoviendo una minimización de la medida de distorsión de cada elemento que forma la submalla. Se van recolocando todos los nodos internos de la malla uno a uno, manteniendo fijos en cada iteración todos los demás nodos, hasta que se localizan sus posiciones óptimas, que minimizan la función objetivo.

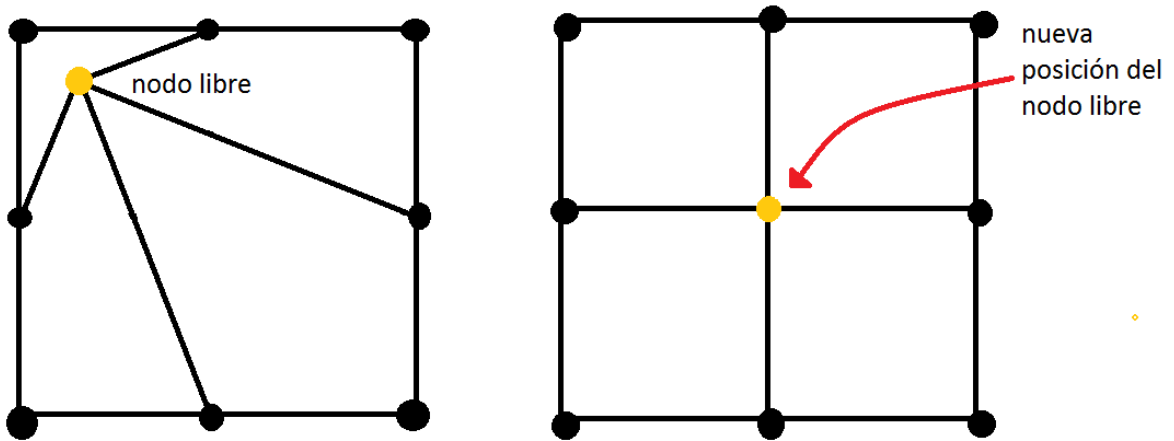


Fig. 22. Optimización de cuadriláteros.

Llamamos  $x$  a las coordenadas del nodo  $\nu$ ; si la malla local  $\mathcal{M}_\nu$  está compuesta por  $M$  elementos cuadriláteros, y  $\mathbf{S}_i$  es la matriz jacobiana ponderada del triángulo  $i$ . La función objetivo a minimizar en el elemento  $k$  será la medida de distorsión:

$$\eta_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta(\mathbf{S}_i(x)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{S}_i(x)|^2}{n\sigma(\mathbf{S}_i(x))}$$

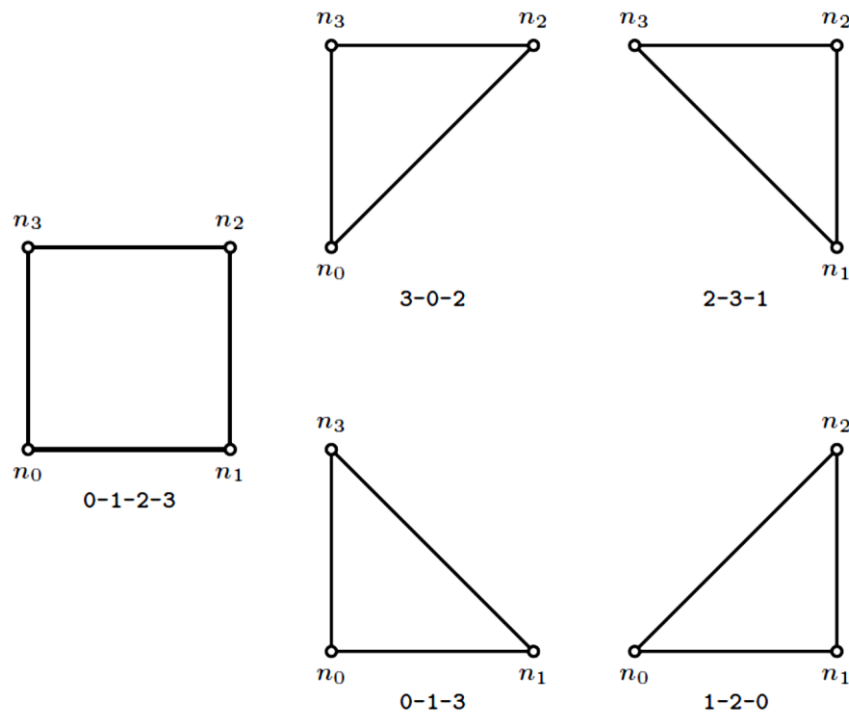


Fig.23. Descomposición del elemento cuadrilátero en sus cuatro sub-triángulos

Siendo  $N$  el número de nodos de cada elemento cuadrilátero.

Siguiendo con el razonamiento, la función objetivo asociada al nodo  $\nu$ , es la norma- $p$  de todos los cuadriláteros de la submalla local, es decir:

$$K_{\eta}(x) = \left( \sum_{k=1}^M \eta_k^p(x) \right)^{1/p}$$

Siendo  $p$  típicamente 1 ó 2.

La llamada región factible es aquella en la que puede situarse el nodo libre  $\nu$  de forma que se pueda obtener una malla válida. Esta región está formada por el conjunto poligonal  $\mathcal{H} = \bigcap_{k=1}^{k=M} \mathcal{H}_k$ , donde  $\mathcal{H}_k$  son los semiplanos definidos por  $\sigma_k(x) \geq 0$ . Un elemento está enredado si  $\sigma(x) < 0$  y degenerado si  $\sigma(x) = 0$ .

Sin embargo se ha observado la existencia de asíntotas que ejercen de barreras en el contorno de la región factible, cuando  $\sigma(x) = 0$ . Adicionalmente pueden existir mínimos locales de la función objetivo fuera de la región factible. Esto puede provocar una minimización de la función que dé como resultado la localización de soluciones fuera de la región en zonas no óptimas, incluso en configuraciones enredadas.

Para superar este problema Escobar *et al.* propuso un cambio en la función objetivo que elimina las barreras y que sitúa el mínimo global cerca de la posición óptima de la función inicial. En concreto se trata de cambiar  $\sigma$  por:

$$h(\sigma) = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\delta^2})$$

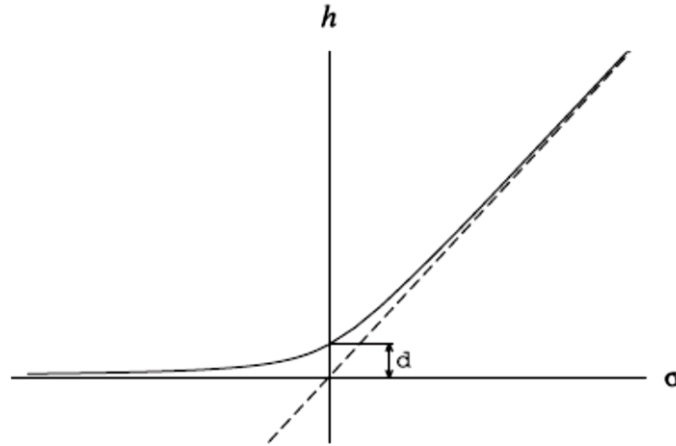


Fig. 24. Descripción de la función  $h(\sigma)$ .

donde  $\delta$  es un parámetro adicional de valor muy pequeño tal que  $\delta = h(0)$ . Su función es modular la proximidad entre  $h(\sigma)$  y  $\sigma$ . Siendo su comportamiento tal que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} h(\sigma) = 0, \forall \sigma \leq 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} h(\sigma) = \sigma, \forall \sigma \geq 0$$

Entonces las posiciones de  $\sigma$  que minimizan la función original y la modificada son prácticamente idénticas cuando  $\delta$  está próximo a cero.

Teniendo en cuenta estas modificaciones la función objetivo quedará:

$$K_{\eta}^*(\mathbf{x}) = \left( \sum_1^M \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{S}_i(\mathbf{x})|^2}{nh(\sigma_i)} \right)^p (\mathbf{x}) \right)^{1/p}$$

### 3.4 Optimización de la T-malla

El algoritmo de desenredo y suavizado de T-mallas toma como base la optimización de mallas de elementos cuadriláteros. Una T-malla puede ser contemplada como una malla de elementos cuadriláteros en la que se admite la presencia de uniones en T (hanging nodes), y por lo tanto la existencia de elementos cuadriláteros no homogéneos en cuanto a sus dimensiones. Se aplican por tanto las medidas de calidad y distorsión desarrolladas para el elemento cuadrilátero, que a su vez están fundadas en las medidas correspondientes al triángulo.

Para la aplicación desarrollada se han tomado T-splines bivariantes de grado tres ( $p=3$ ) con vectores de cinco knots. Recordemos que en el análisis isogeométrico son necesarios dos espacios de representación, el físico y el paramétrico. El físico es el espacio real que puede estar deformado y enredado, mientras que el espacio paramétrico está formado por el patch de referencia que mantiene siempre una forma ideal. La optimización consistirá en reproducir en el espacio físico la misma configuración de referencia que existe en el espacio paramétrico.

El primer requisito que debe reunir la malla paramétrica es que sea un quadtree balanceado, eso quiere decir que no pueden existir más de una unión-T o hanging node por arista, o expresado de otra forma; cada hanging node debe estar conectado con dos uniones ordinarias, es decir, de cuatro aristas, o en la frontera.

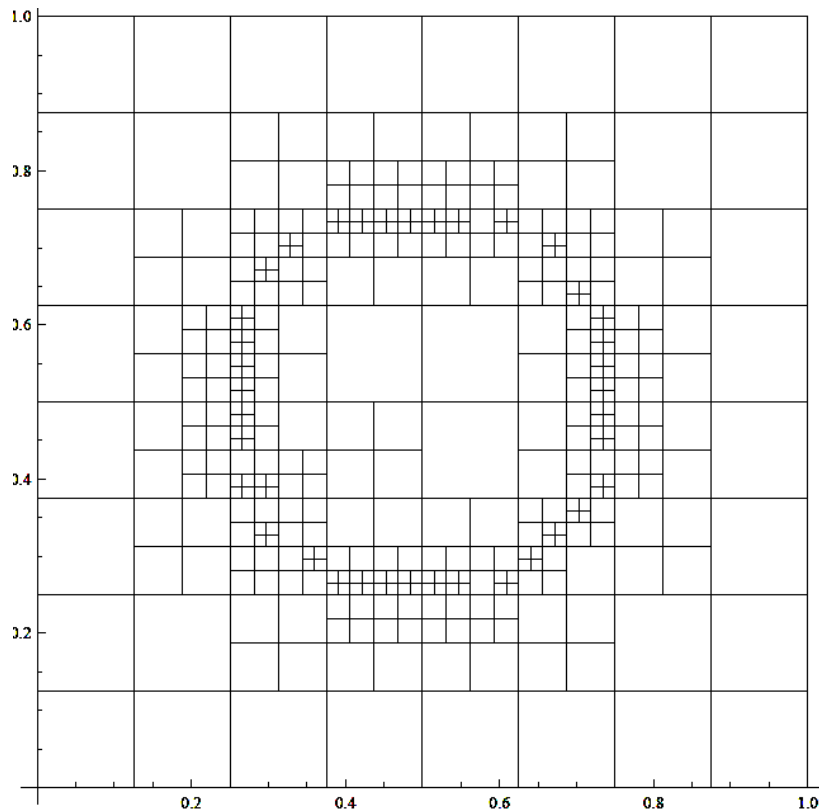


Fig.25. Quadtree balanceado.

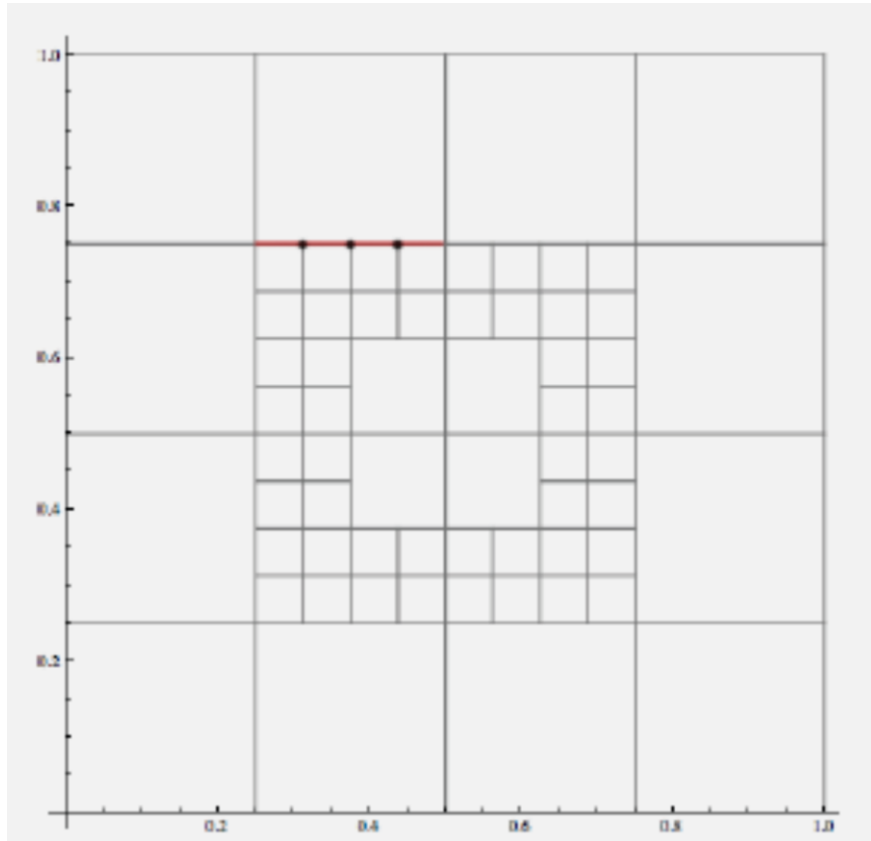


Fig.26. Quadtree no-balanceado.

Como se ha explicado, en el análisis isogeométrico las mallas física y paramétrica, a excepción de la malla de control, están formadas por sus vértices conectados; siendo los vértices en el caso de T-splines de grado impar, los knots que ocupan la posición central en los vectores. Por tanto el algoritmo se propone recolocar los vértices de la malla física imitando las posiciones de los vértices en la malla paramétrica.

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) ; \text{P.e. } (0,0,0.25,0.75,1)$$

Fig. 27. Los vértices son los knots centrales si la T-spline es de grado impar.

Para ello debe existir una correlación entre los vértices (y los knots en general) de ambos espacios, es decir, cada vértice en el espacio físico tendrá su homólogo en el paramétrico. Sin embargo el patch en el espacio paramétrico tendrá siempre una forma rectangular, mientras que el espacio físico puede adaptarse a cualquier forma convexa que se desee.

El objetivo por tanto es lograr una configuración suave y sin enredos de las celdas cuadriláteras del espacio físico, adoptando la forma más parecida posible a la que poseen en el espacio paramétrico, pero adaptadas a las fronteras del espacio físico.

Los vértices del espacio paramétrico se forman de las posiciones centrales de los dos vectores knots que definen cada T-spline bivalente, cada uno de los knots centrales de cada vector ( $\xi$  y  $\eta$ ), indicará el lugar en su respectiva dirección entre cero y uno (0-1). El último paso para formar las T-splines sobre la T-malla es la



conexión mediante aristas de cada vértice, con los vértices vecinos en las dos direcciones del espacio ( $\xi$  y  $\eta$ ), perpendiculares entre sí.

Al igual que en la optimización de cuadriláteros, cada vértice interno es considerado iterativamente como vértice libre  $\nu$ , y será recolocado dentro de una submalla local  $\mathcal{M}_\nu$  siguiendo la minimización de la función objetivo formada por la medida de distorsión del elemento cuadrilátero. Sin embargo  $\mathcal{M}_\nu$  recibe aquí la denominación de 1-anillo y es la macrocelda que se forma a partir de los cuatro knots vecinos de cada ancla. Está compuesto por cuatro celdas o subcuadriláteros; y su forma geométrica será rectangular y cuadrilátera pero no tiene que ser obligatoriamente un cuadrado.

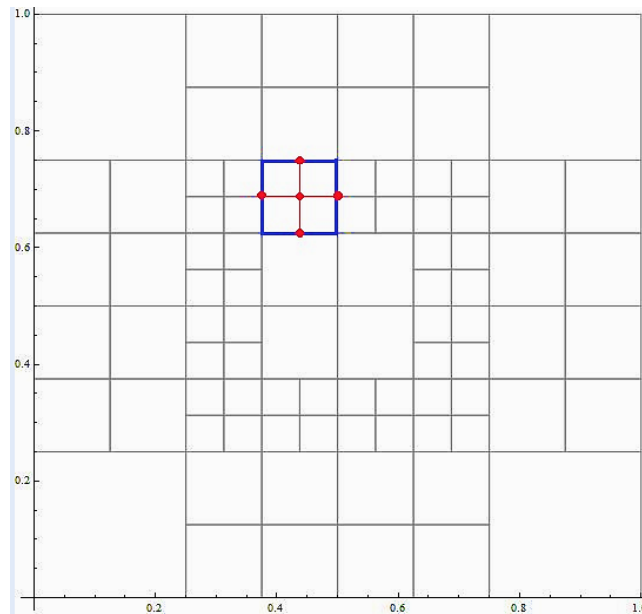


Fig.28.T-malla con 1-anillo representado.

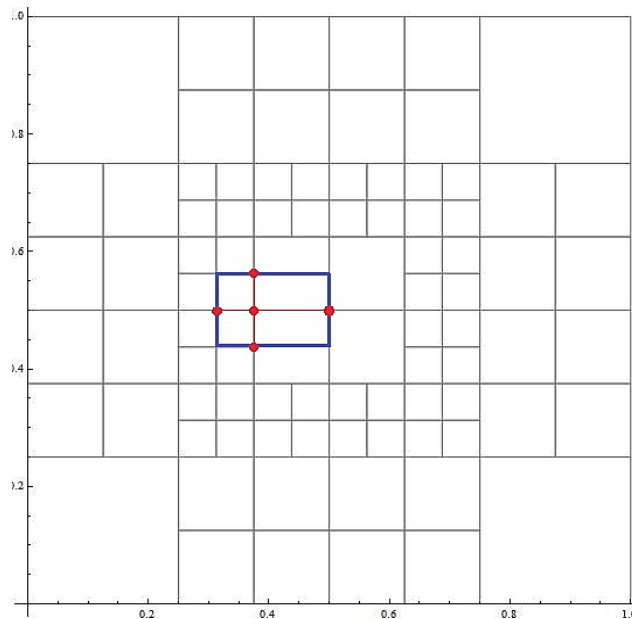


Fig.29. T-malla con 1-anillo con sub-cuadrados no homogéneos.

En el caso de que alguno de los knots vecinos no coincida con un vértice (knot no-nodo), se tomará como emplazamiento imaginario el punto medio de la arista sobre la que se sitúe el knot.

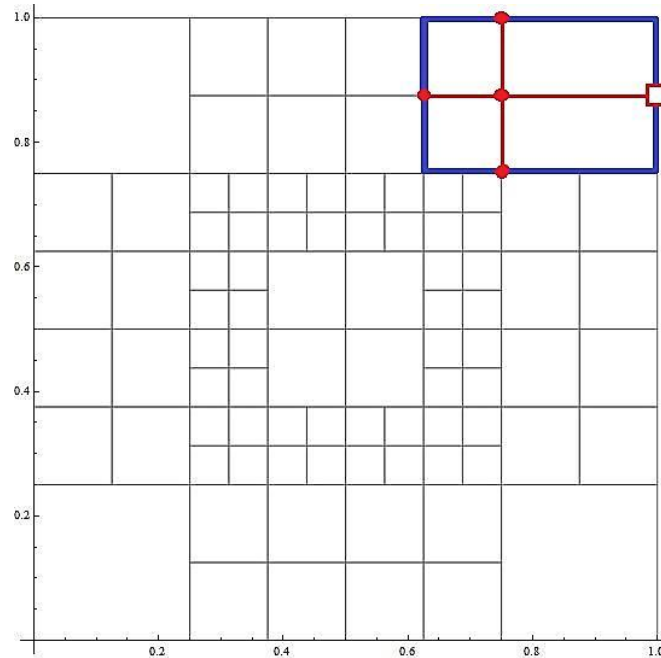


Fig.30. T-malla y 1-anillo con knot no-nodo en mitad de arista.

Cada 1-anillo se obtiene en el espacio paramétrico y se reproduce tomando los knots homólogos en el espacio físico, de manera que no importa si estos están totalmente enredados ya que su localización es inmediata por poseer una correlación uno-a-uno entre ambos espacios.

Una vez bien definido el 1-anillo, el algoritmo procede dividiéndolo en cuatro celdas. Cada celda contiene: El vértice libre  $\nu$ , dos de los cuatro knots vecinos (ya sea vértice o knot no-nodo) en ambas direcciones y un tercer nodo ficticio, que puede o no coincidir con la posición de un vértice, y que se forma a partir de las coordenadas  $x$  (o  $\xi$  en el espacio paramétrico) de uno de los dos otros nodos, y la coordenada  $y$  (o  $\eta$  en el espacio paramétrico) del otro nodo. Por tanto si unimos todas las celdas, en total el 1-anillo posee 9 nodos: El vértice libre, los cuatro knots vecinos y otros cuatro knots ficticios.

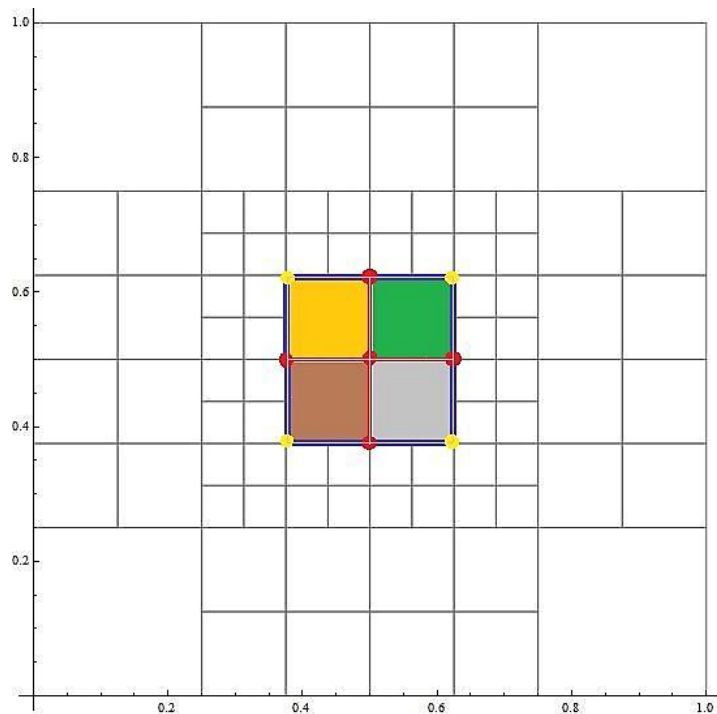


Fig.31. División del 1-anillo en cuadrantes y sus 9 nodos.

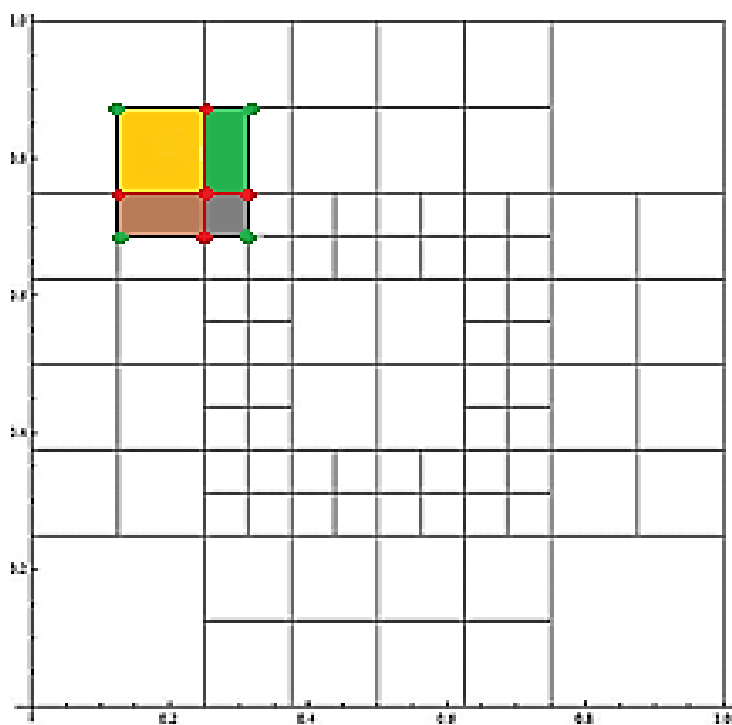


Fig.32 . División de 1-anillo y sus 9 nodos.

Cada una de las celdas del 1-anillo es un elemento cuadrilátero, por lo que se puede por tanto, aplicar a la malla física la rutina optimizadora para elementos cuadriláteros con normalidad.

En este caso el **elemento triangular ideal** en el que se basa la rutina **no está prefijado** al ser la malla heterogénea, y se calcula para cada celda del 1-anillo tomando como referencia el tipo de triángulo presente en el homólogo del espacio paramétrico.

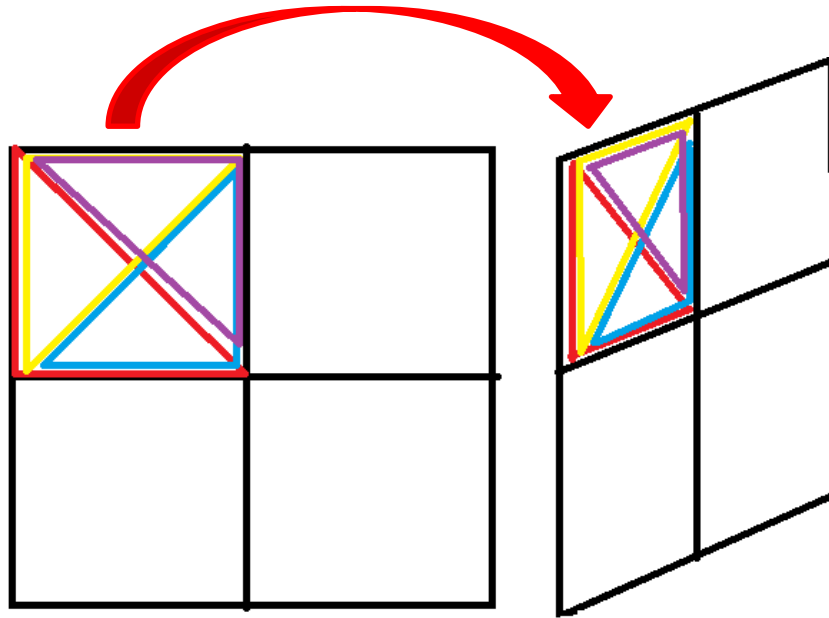


Fig. 33. 1-anillo y triángulos de referencia en malla paramétrica y triángulos homólogos a optimizar en malla física

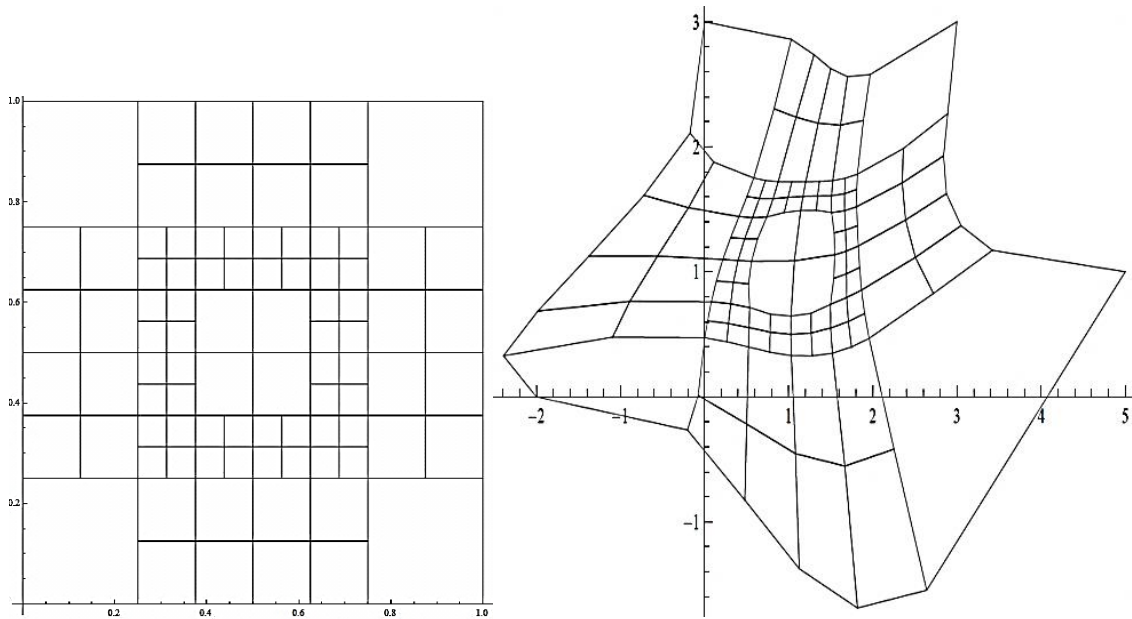


Fig. 34. T-Malla optimizada y su patrón paramétrico.

La recolocación de los vértices libres en la malla física se irá ejecutando iterativamente, desplazándose el 1-anillo por todos los vértices internos de la malla que asumen la función de vértice libre.

Generalmente será necesario repetir la operación en todos los vértices de la malla varias veces, dependiendo de la complejidad de la misma. Al final se espera una malla desenredada y suave, con jacobianos en cada una de los elementos lo más constantes posible y positivos.

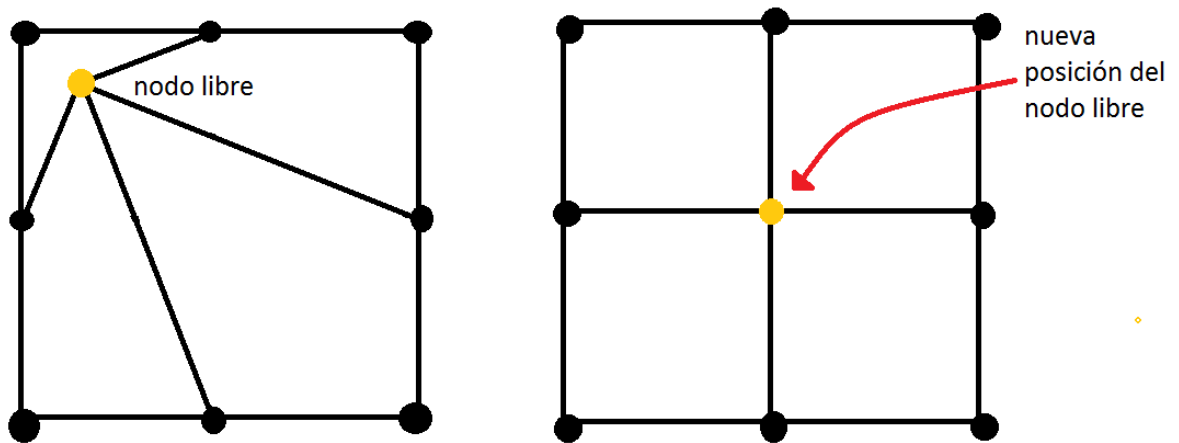
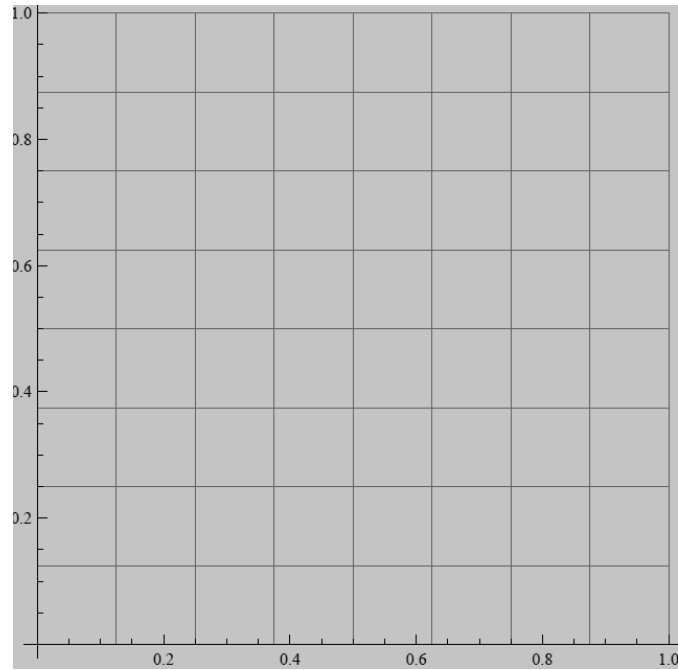


Fig. 35. Recolocación del vértice libre en el 1-anillo.

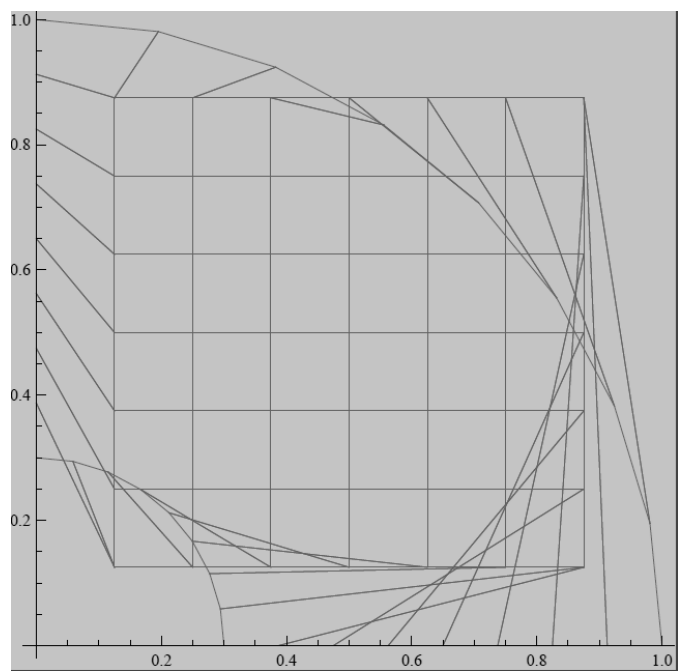
## 4. Resultados

### 4.1 Caso 1: Transformación en cuarto de anillo con mallas cuadriláteras regulares

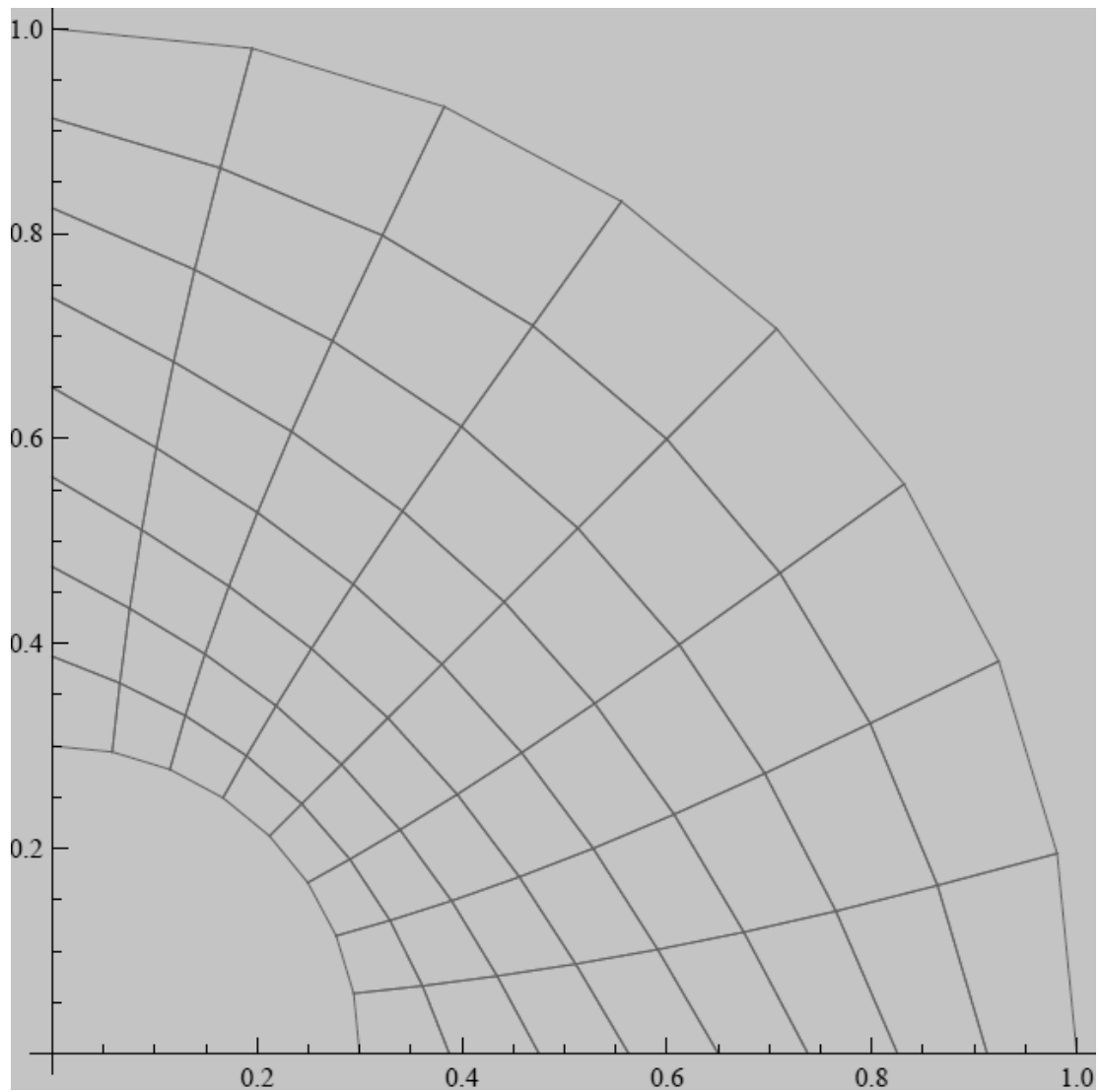
Malla paramétrica:



Malla enredada:

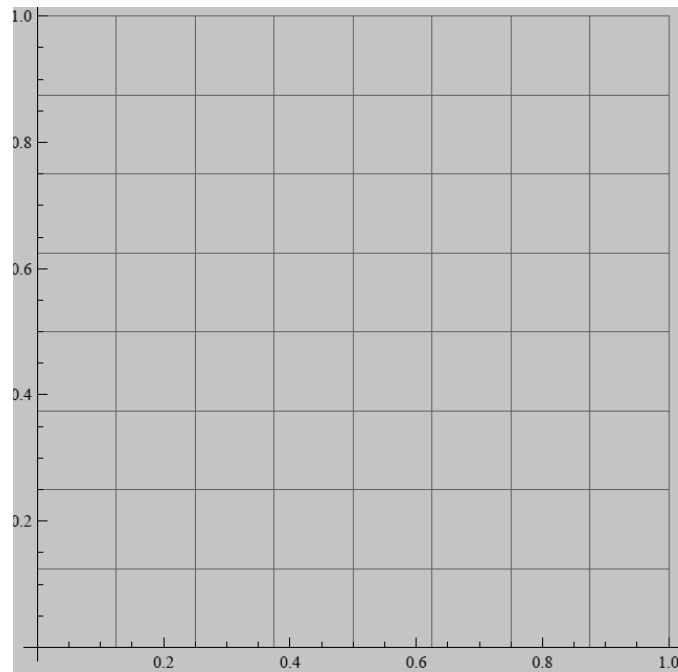


Malla optimizada:

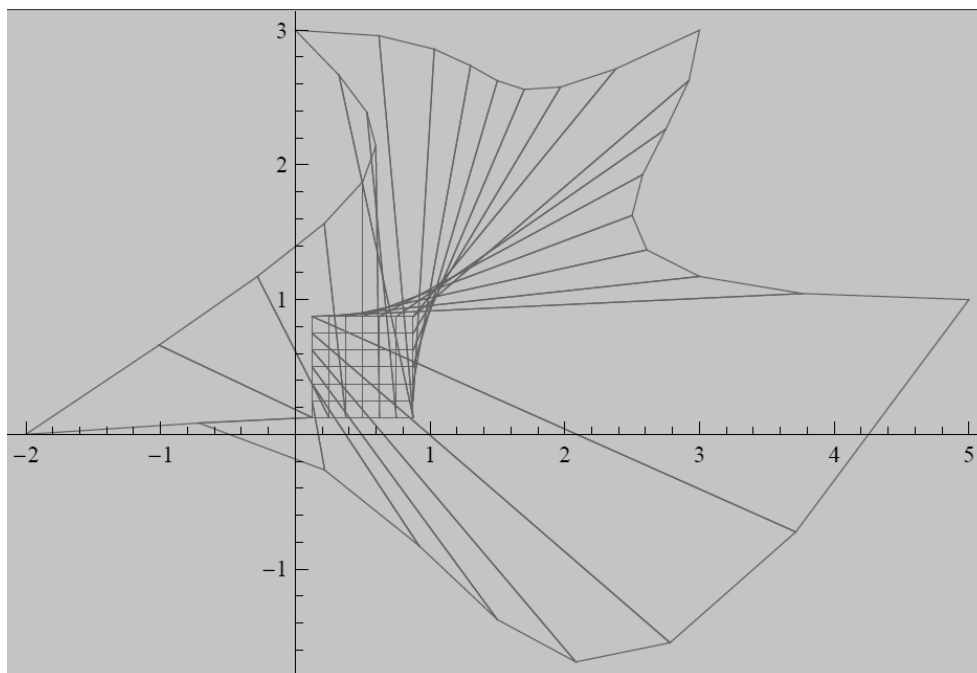


## 4.2 Caso 2: Transformación en contorno irregular con mallas cuadriláteras regulares

Malla paramétrica:

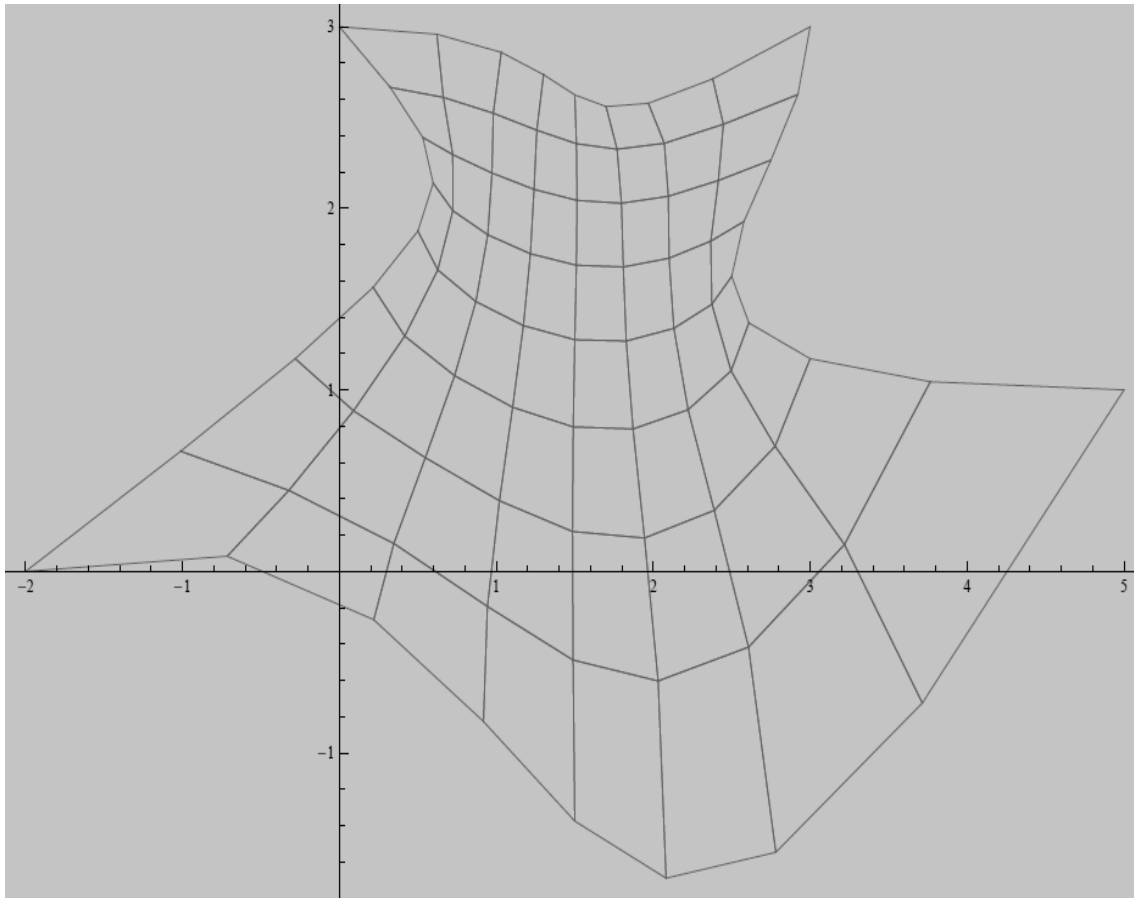


Malla enredada:



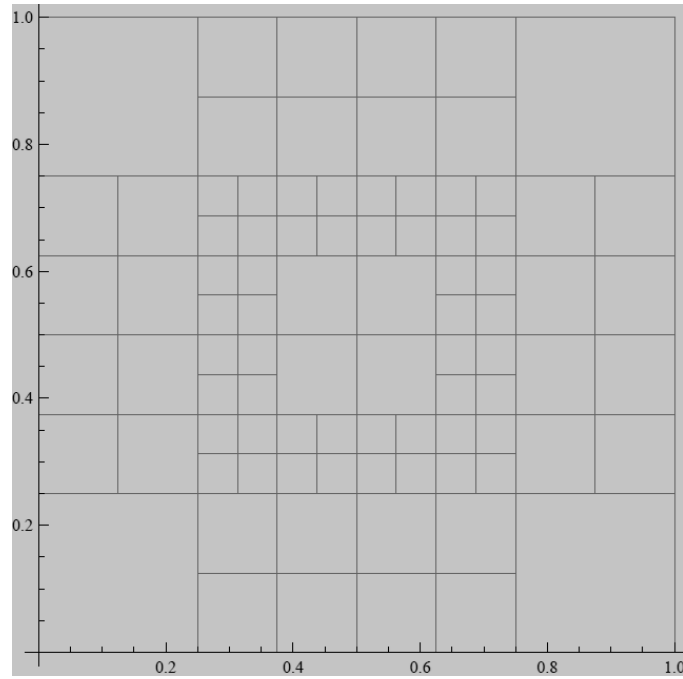


Malla optimizada:

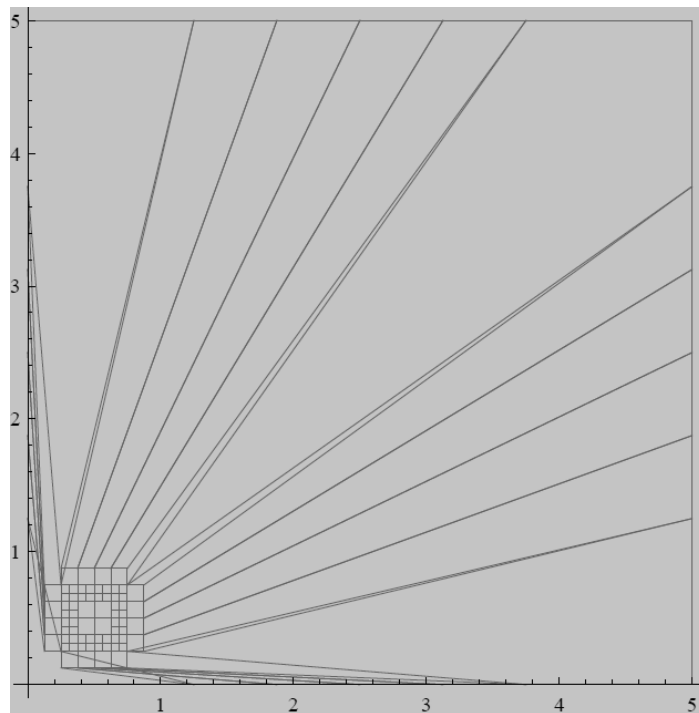


### 4.3 Caso 3: Ampliación de escala

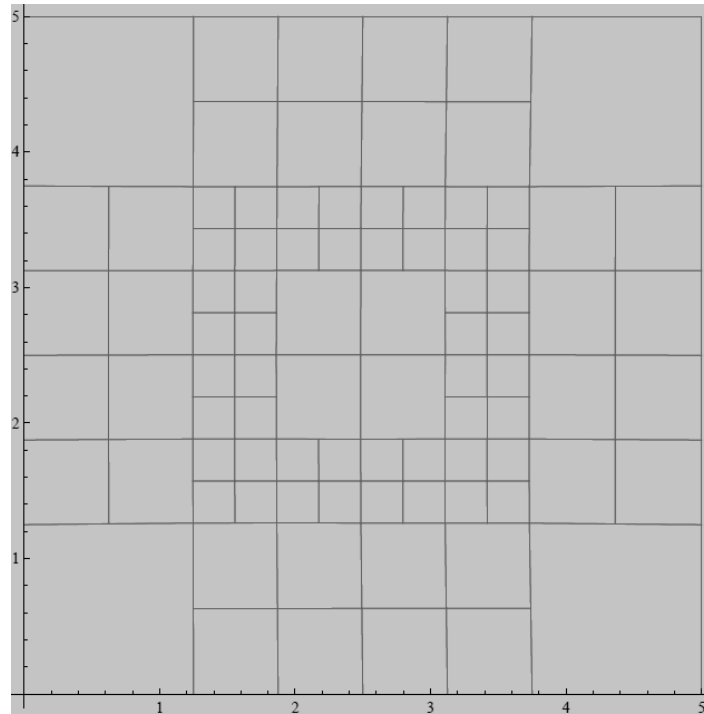
Malla paramétrica:



Malla enredada:

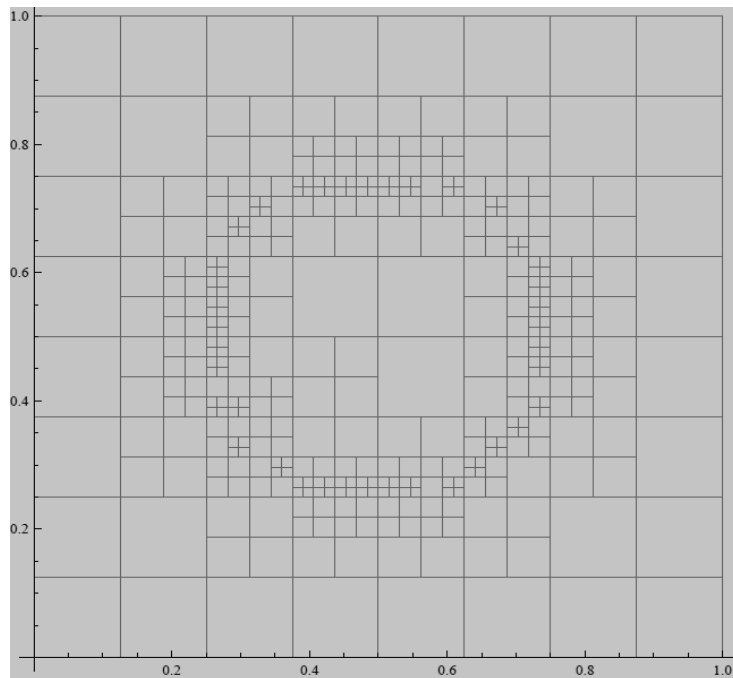


Malla optimizada:

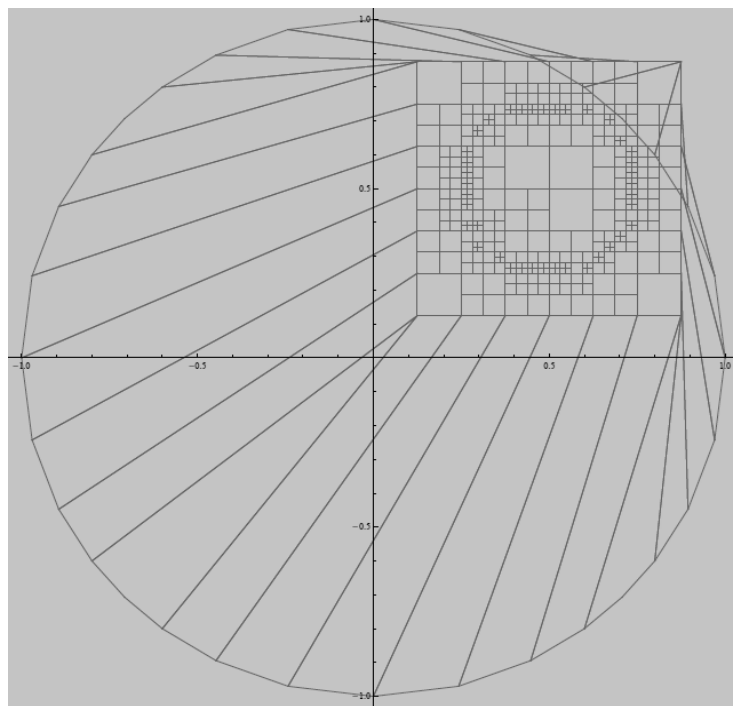


#### 4.4 Caso 4 : Transformación circular

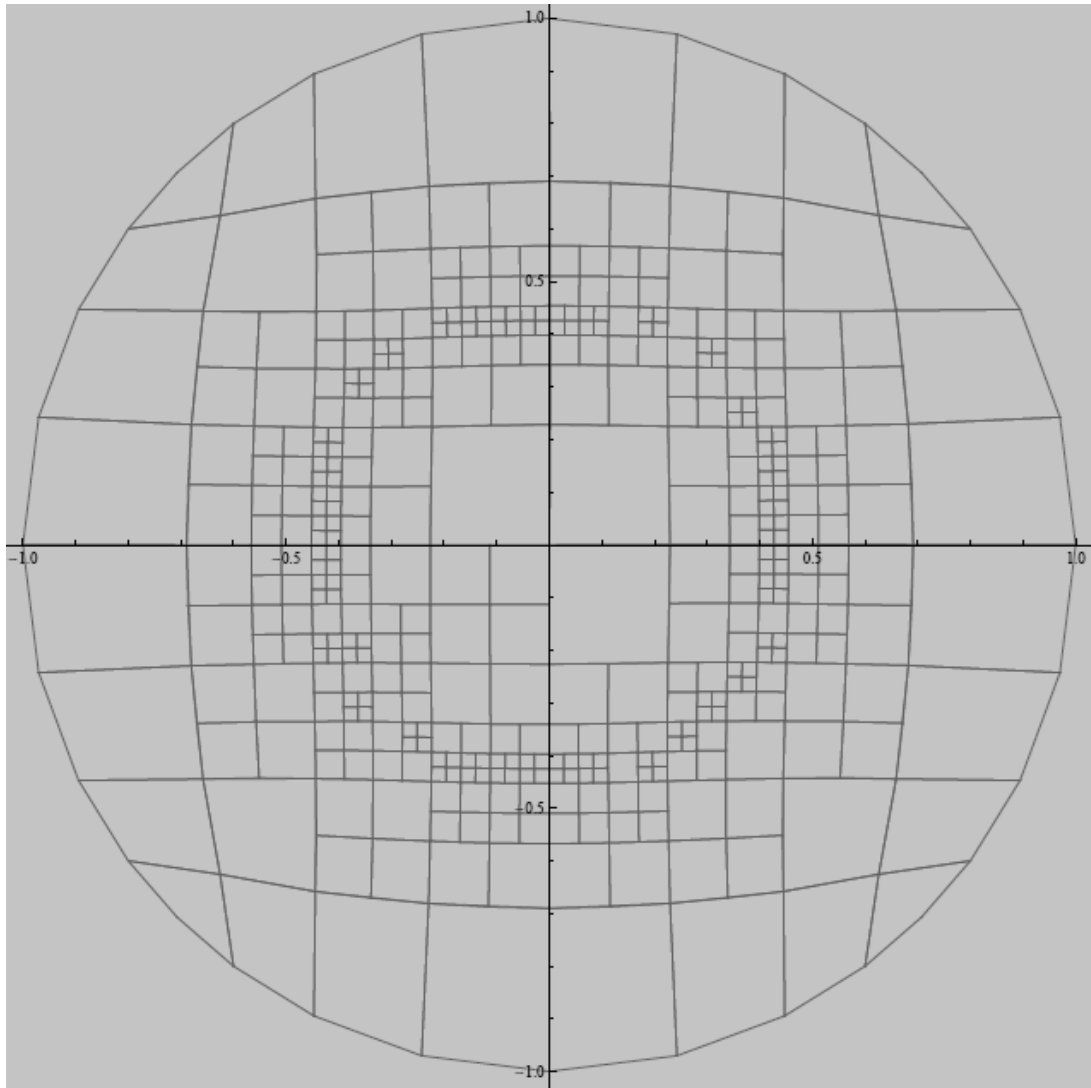
Malla paramétrica:



Malla enredada:

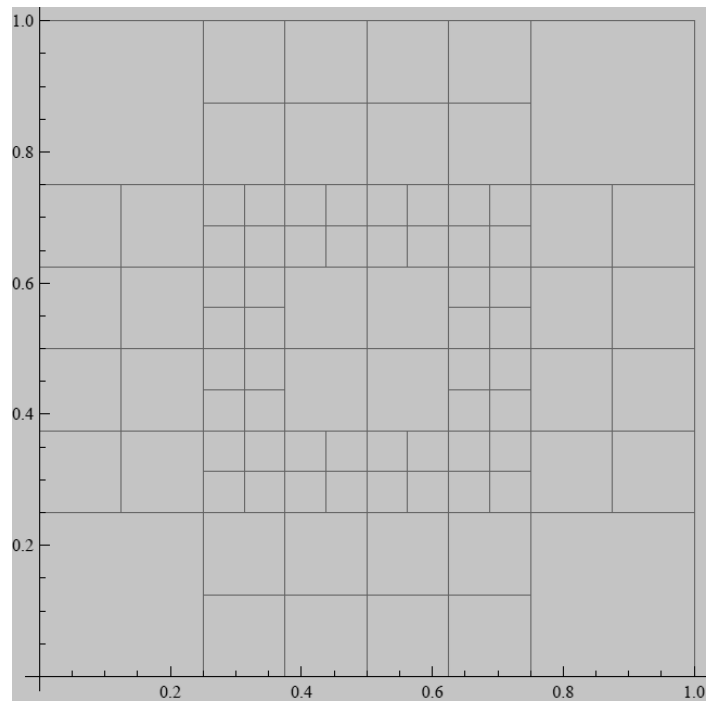


Malla optimizada:

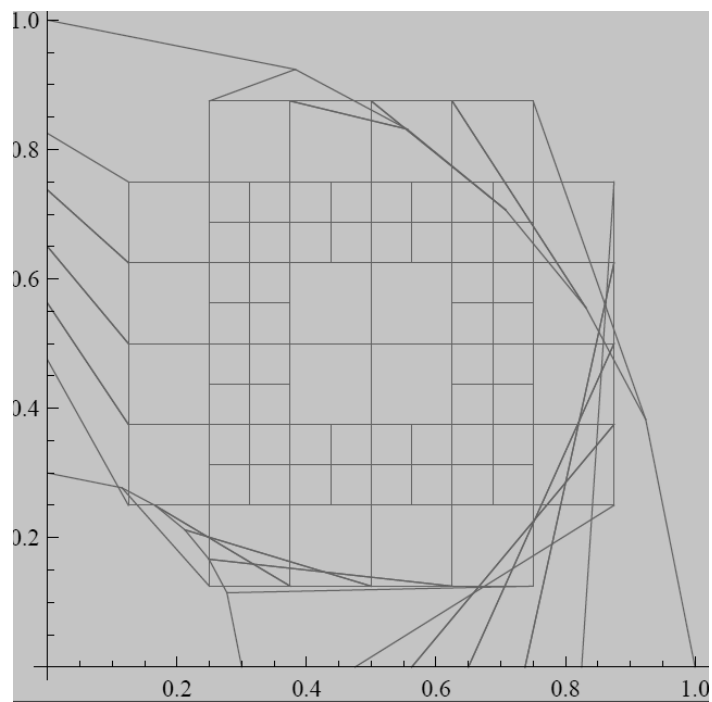


### 4.5 Caso 5: Transformación a un cuarto de corono circular

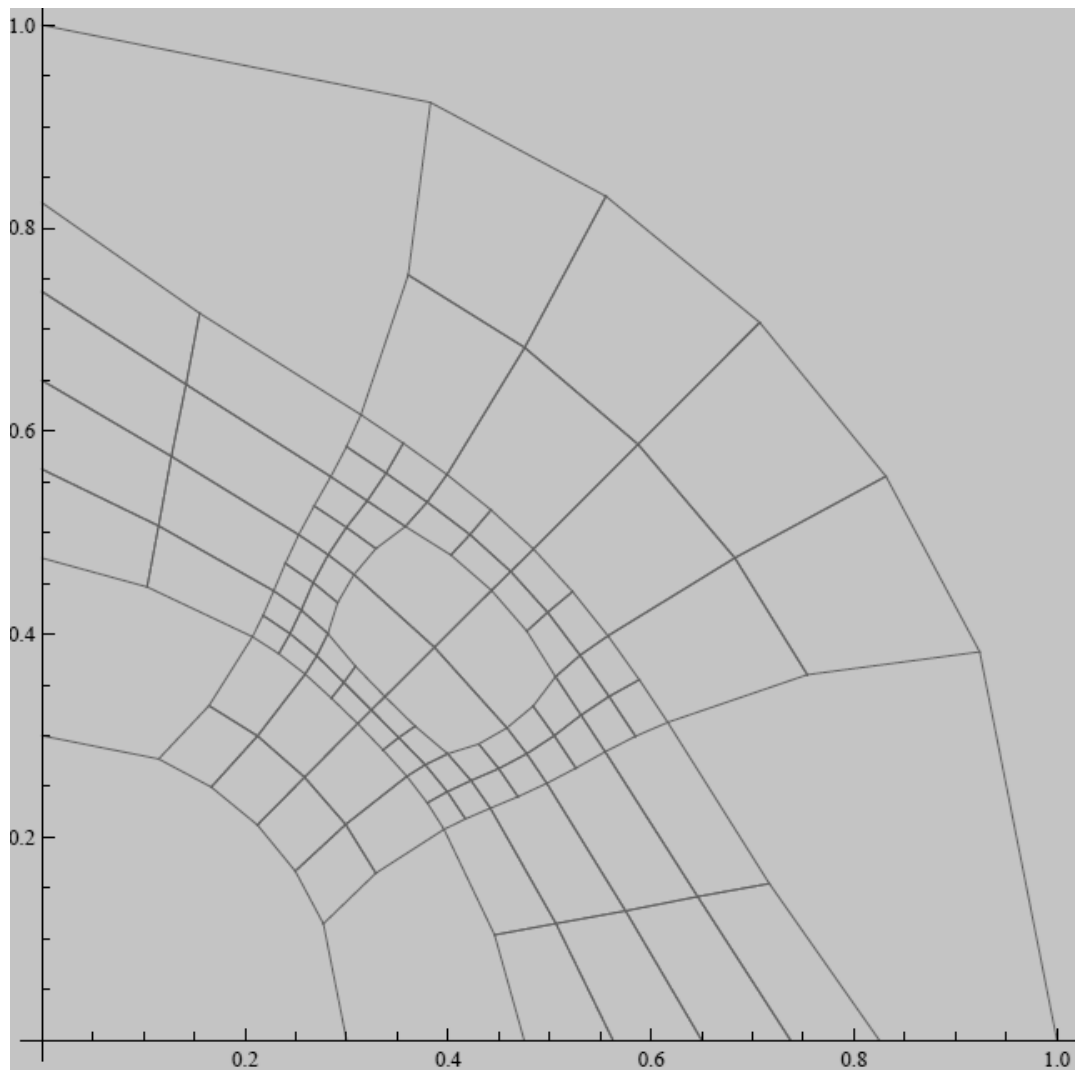
Malla paramétrica:



Malla enredada:

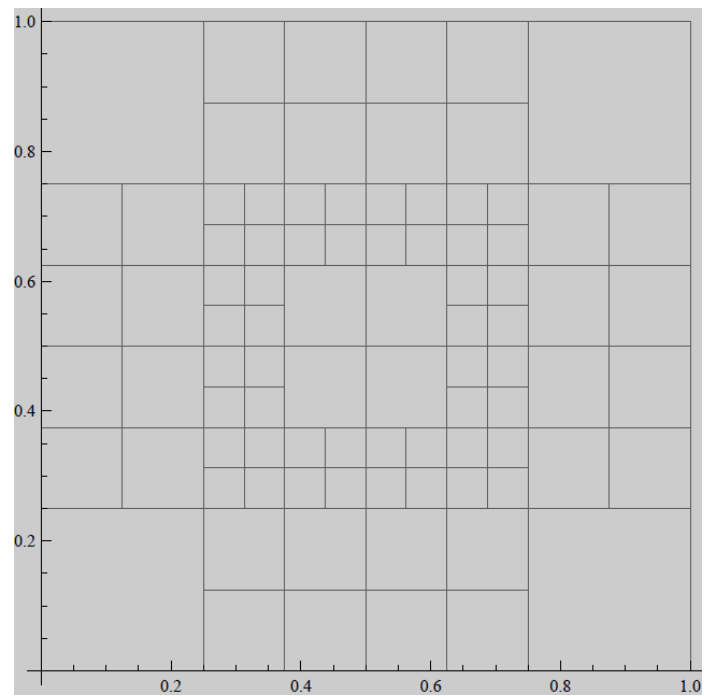


Malla optimizada:

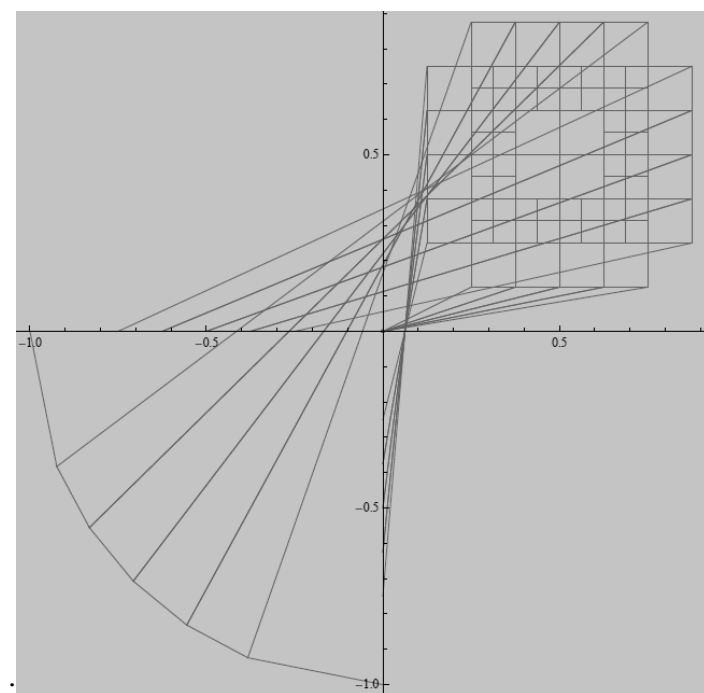


## 4.6 Caso 6: Transformación a un cuarto de círculo

Malla paramétrica:

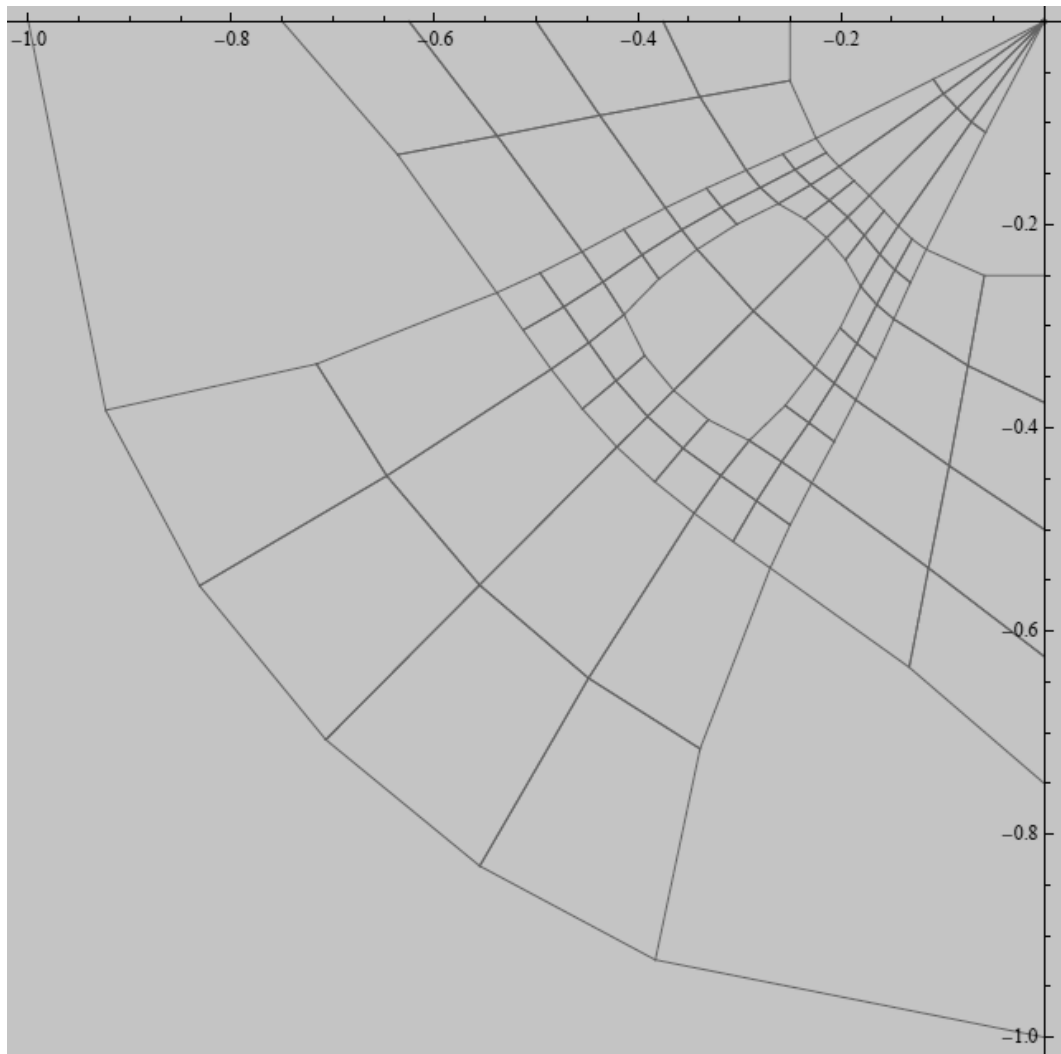


Malla enredada:



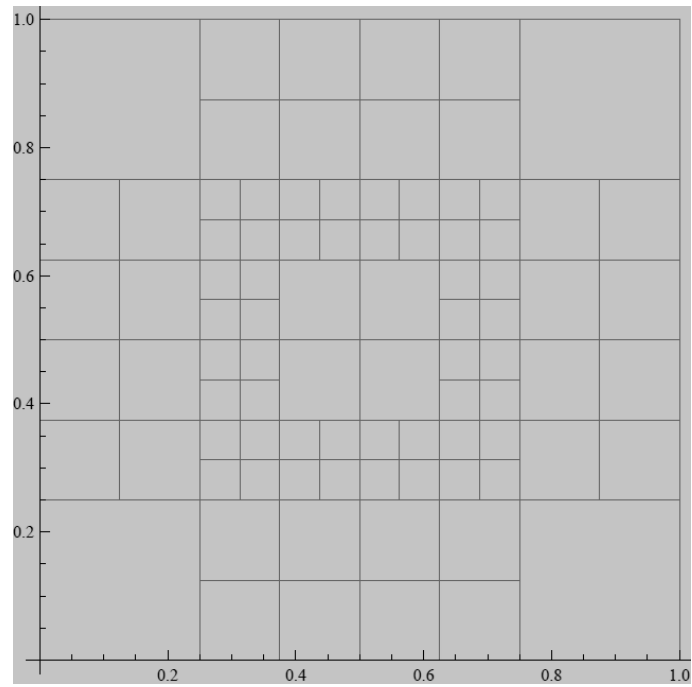


Malla optimizada:

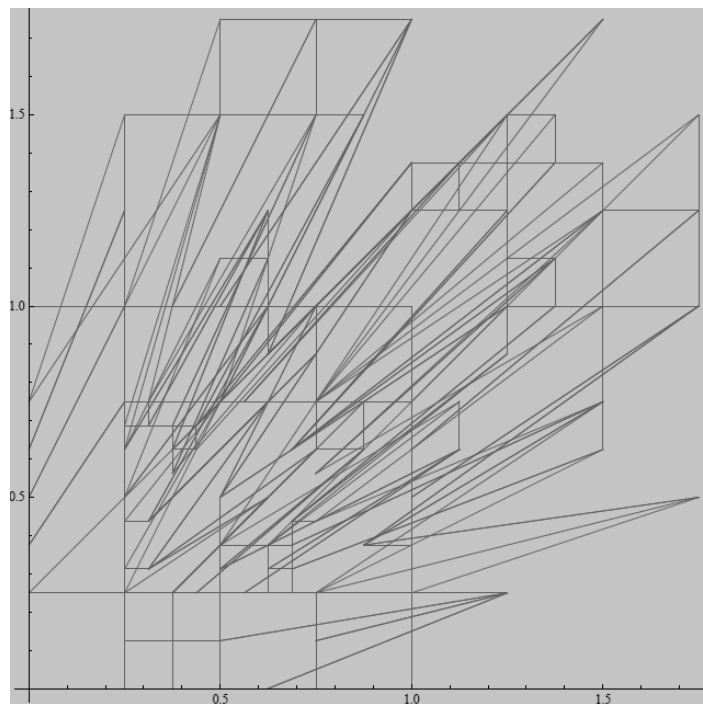


### 4.7 Caso 7: Desenredo de puntos internos

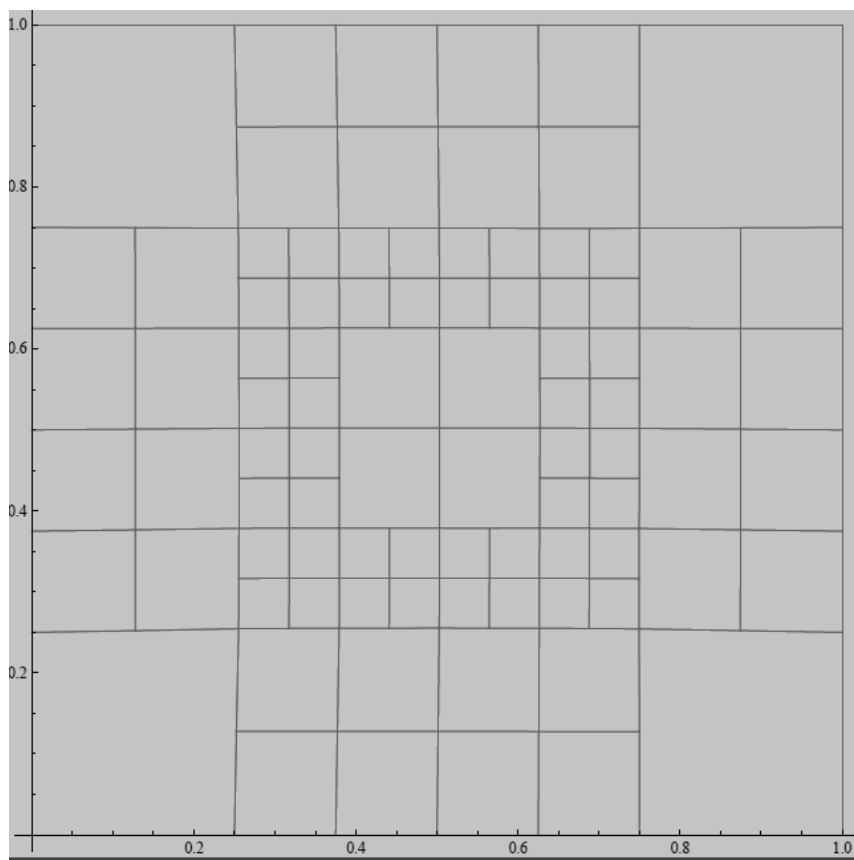
Malla paramétrica:



Malla enredada:

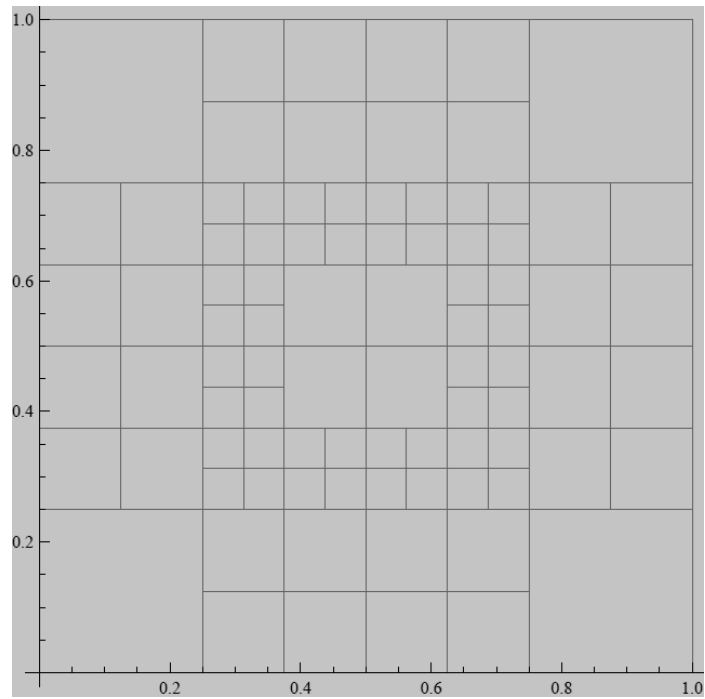


Malla optimizada:

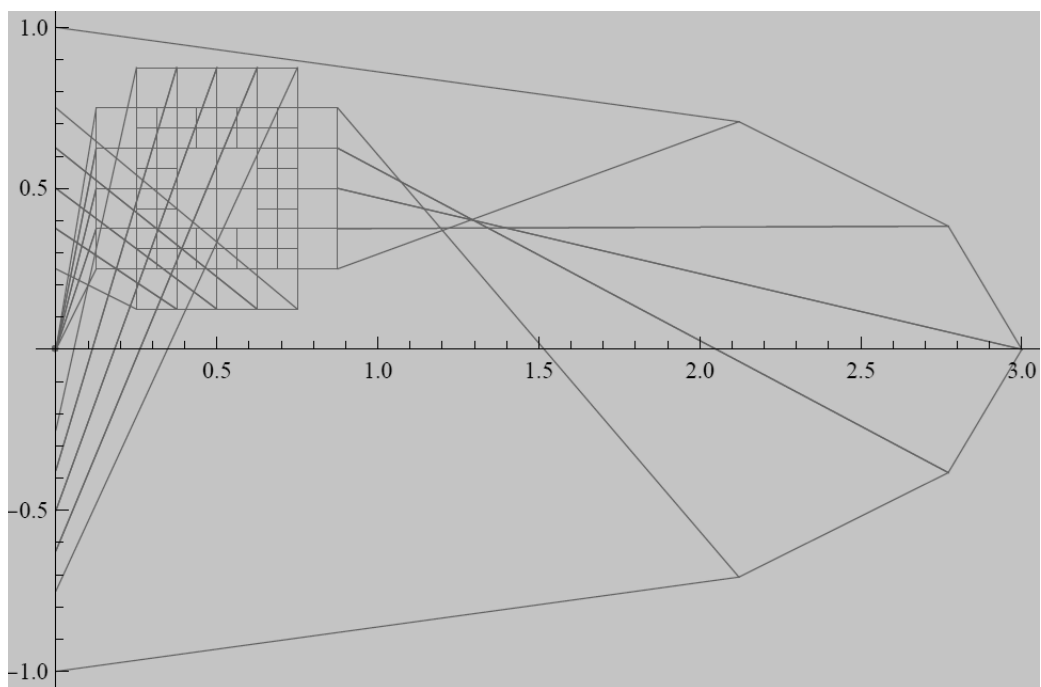


### 4.8 Caso 8: Transformación en semi-elipse

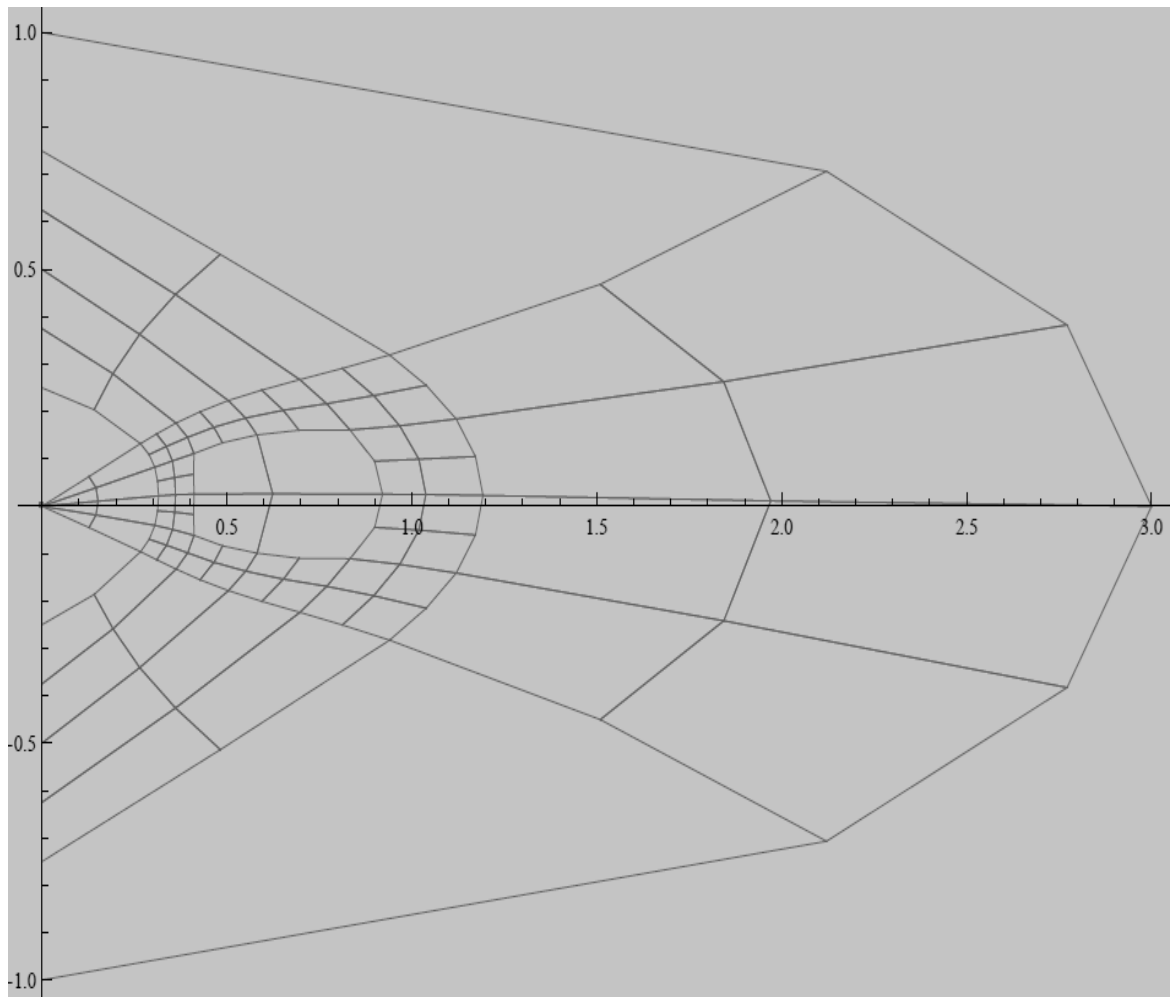
Malla paramétrica:



Malla enredada:

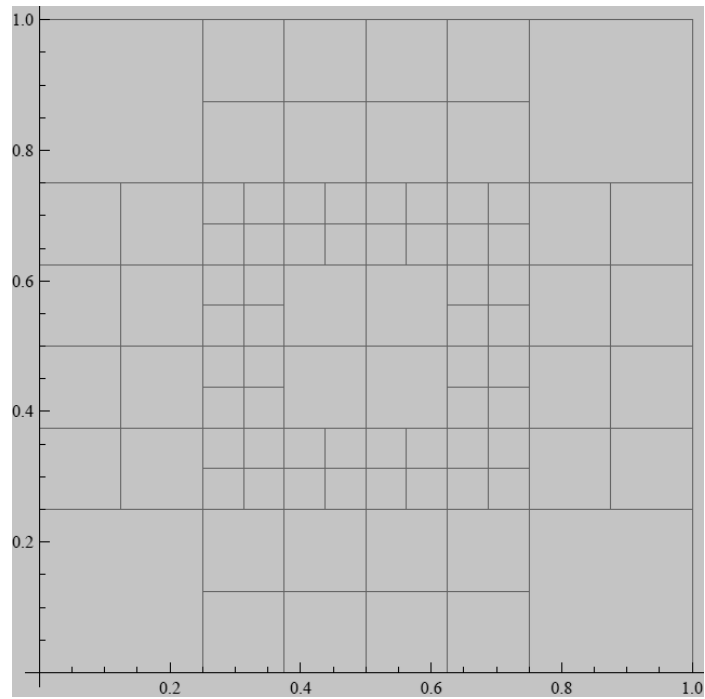


Malla optimizada:

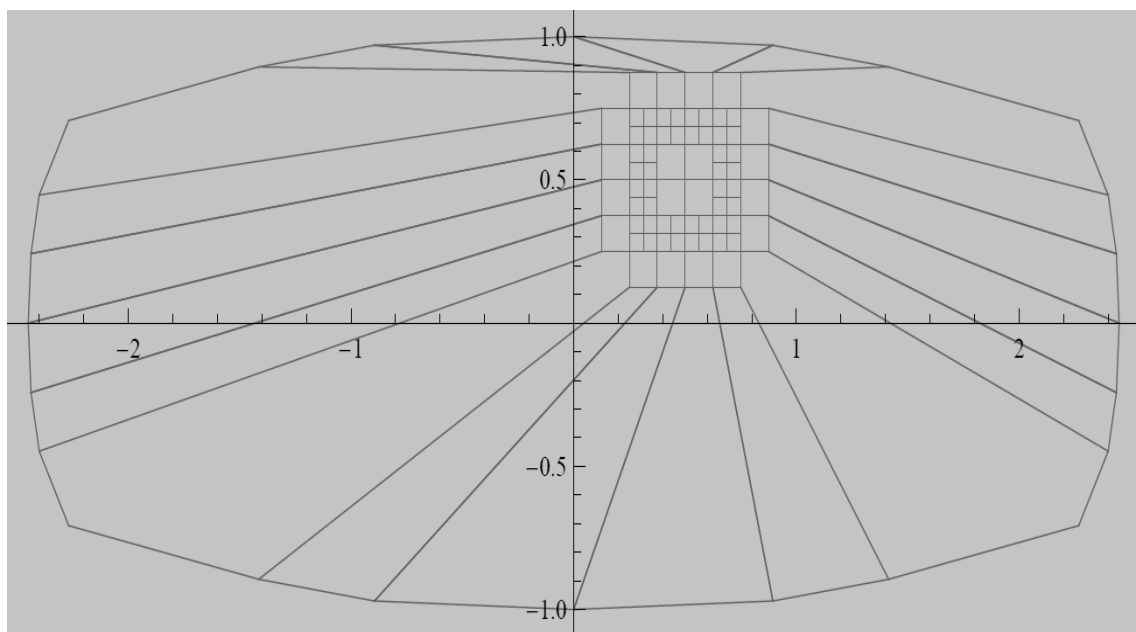


## 4.9 Caso 9: Transformación en elipse

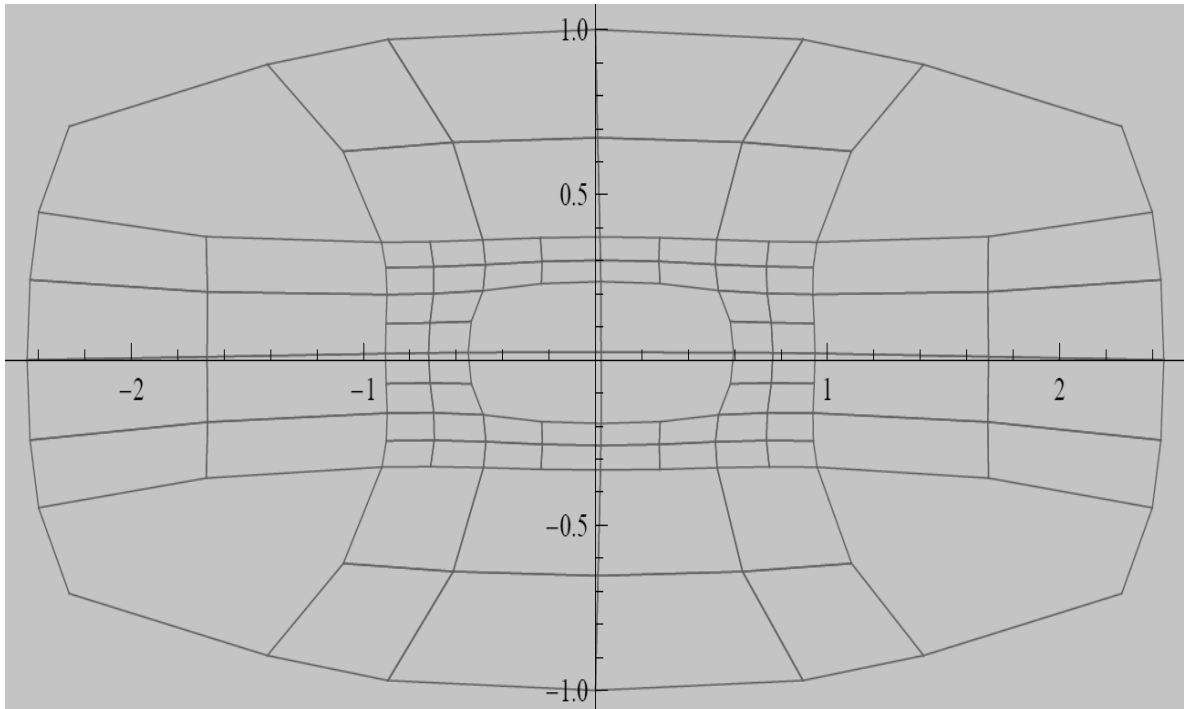
Malla paramétrica:



Malla enredada:

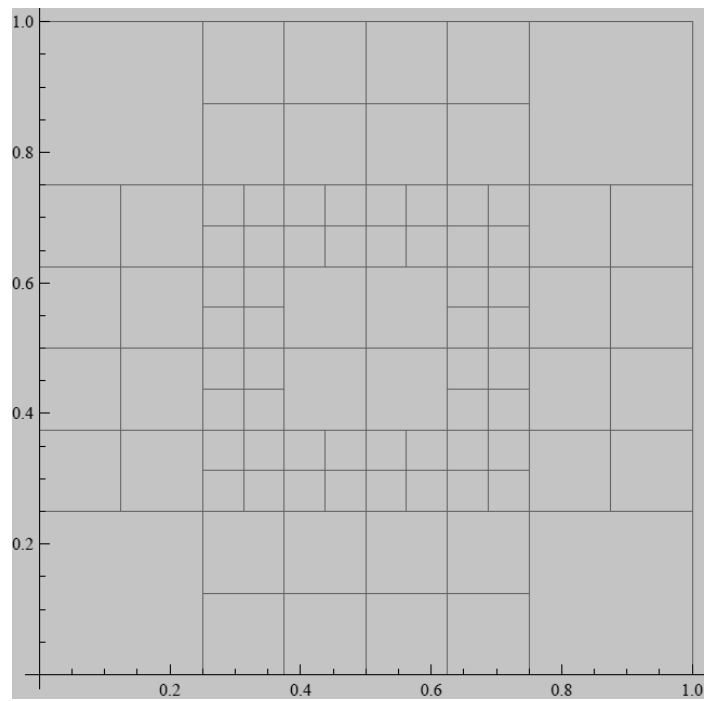


Malla optimizada:

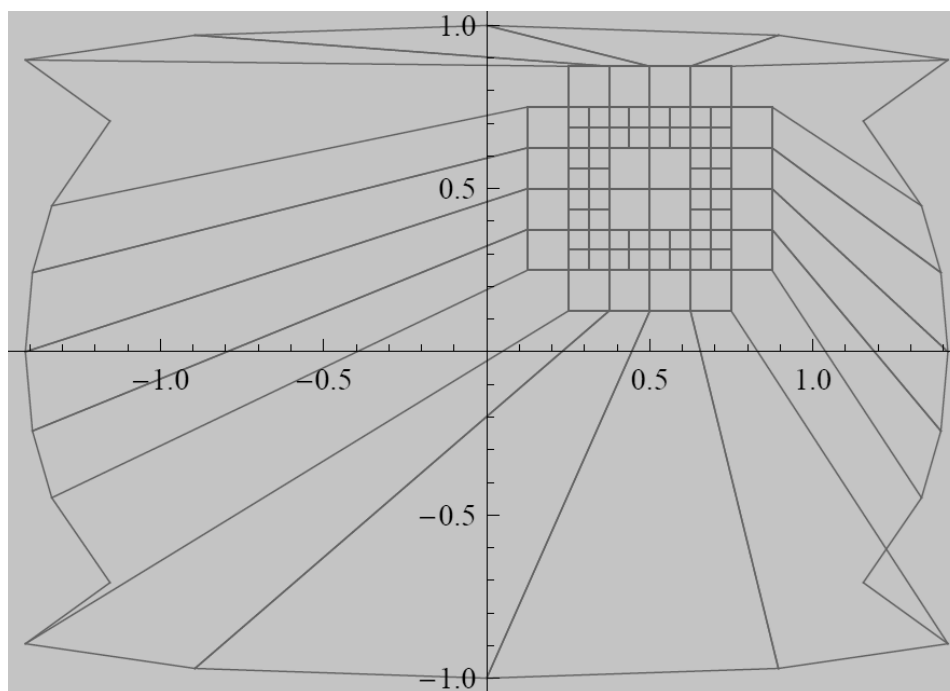


#### 4.10 Caso 10: Transformación en contorno irregular (I)

Malla paramétrica:

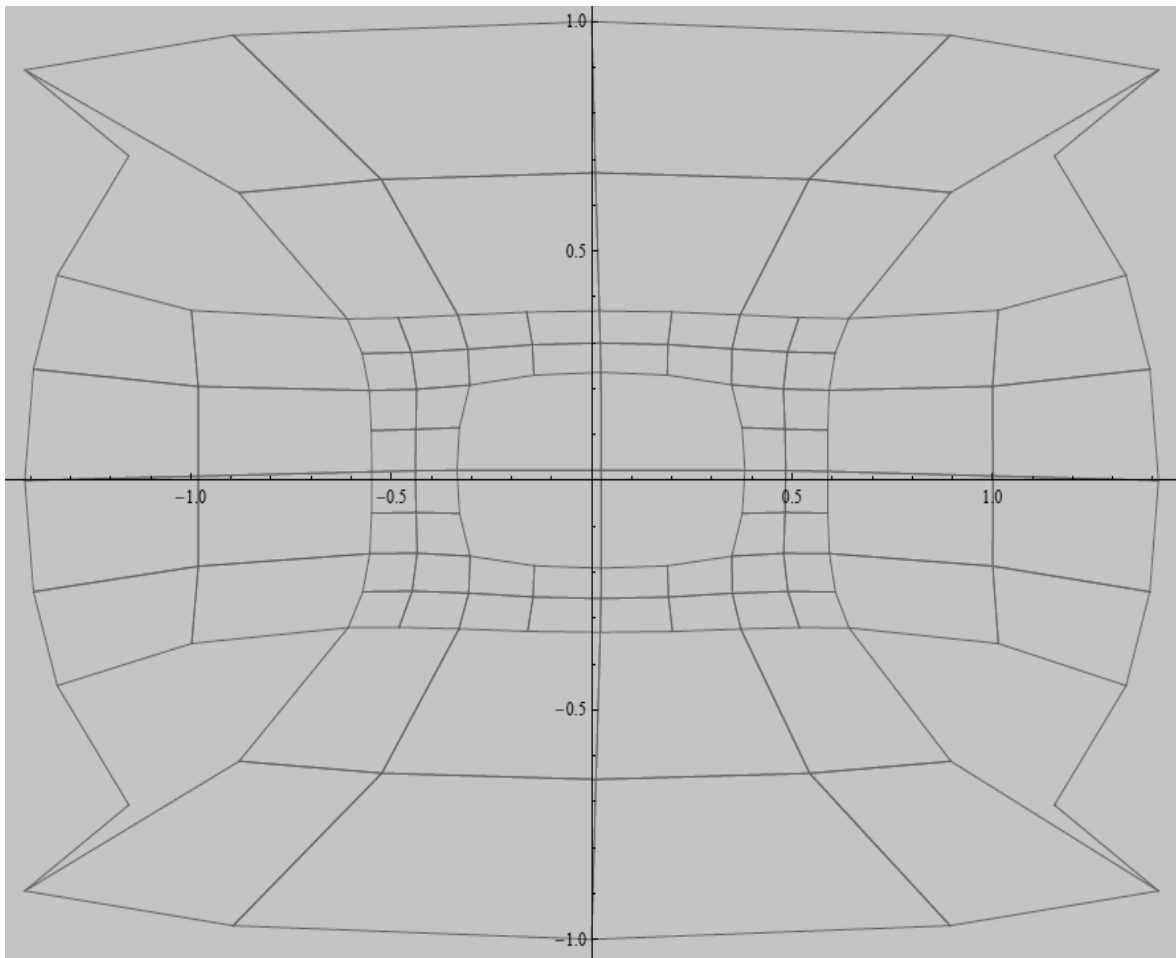


Malla enredada:



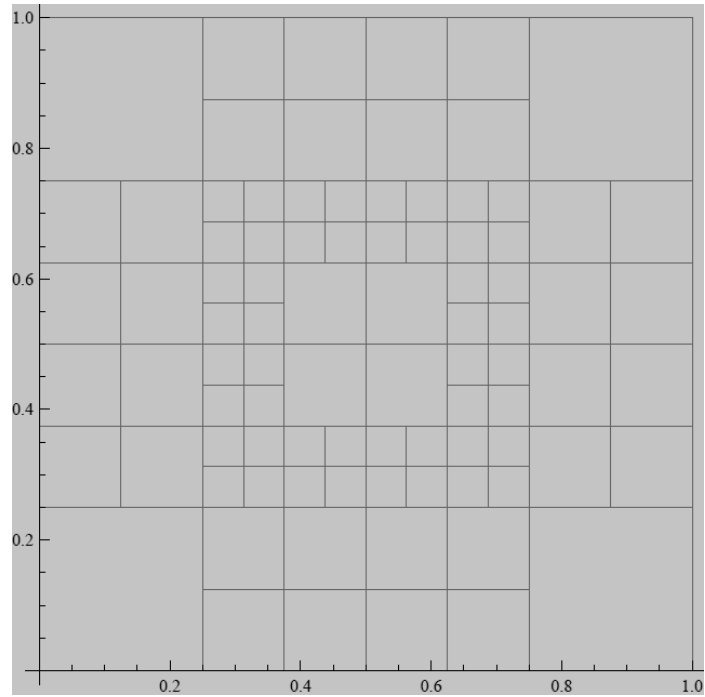


Malla optimizada:

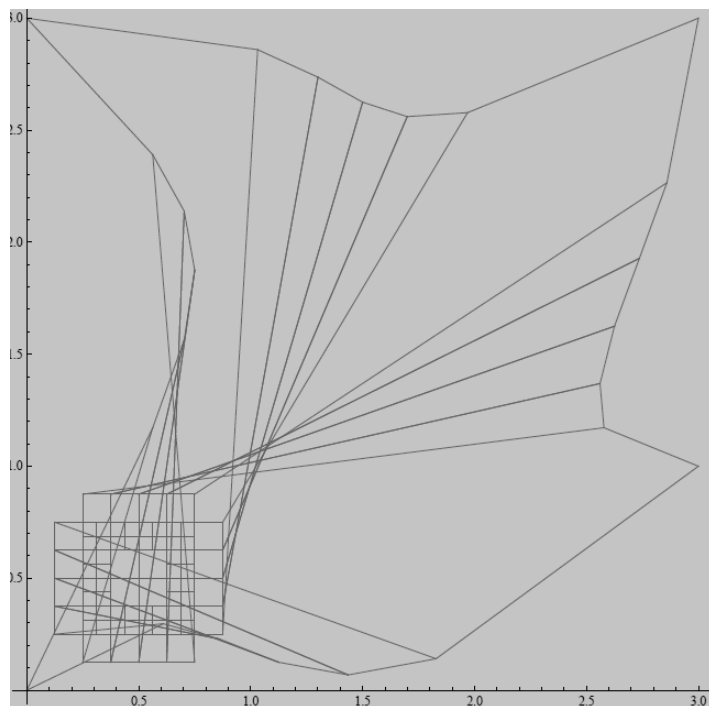


### 4.11 Caso 11: Transformación en contorno irregular (II)

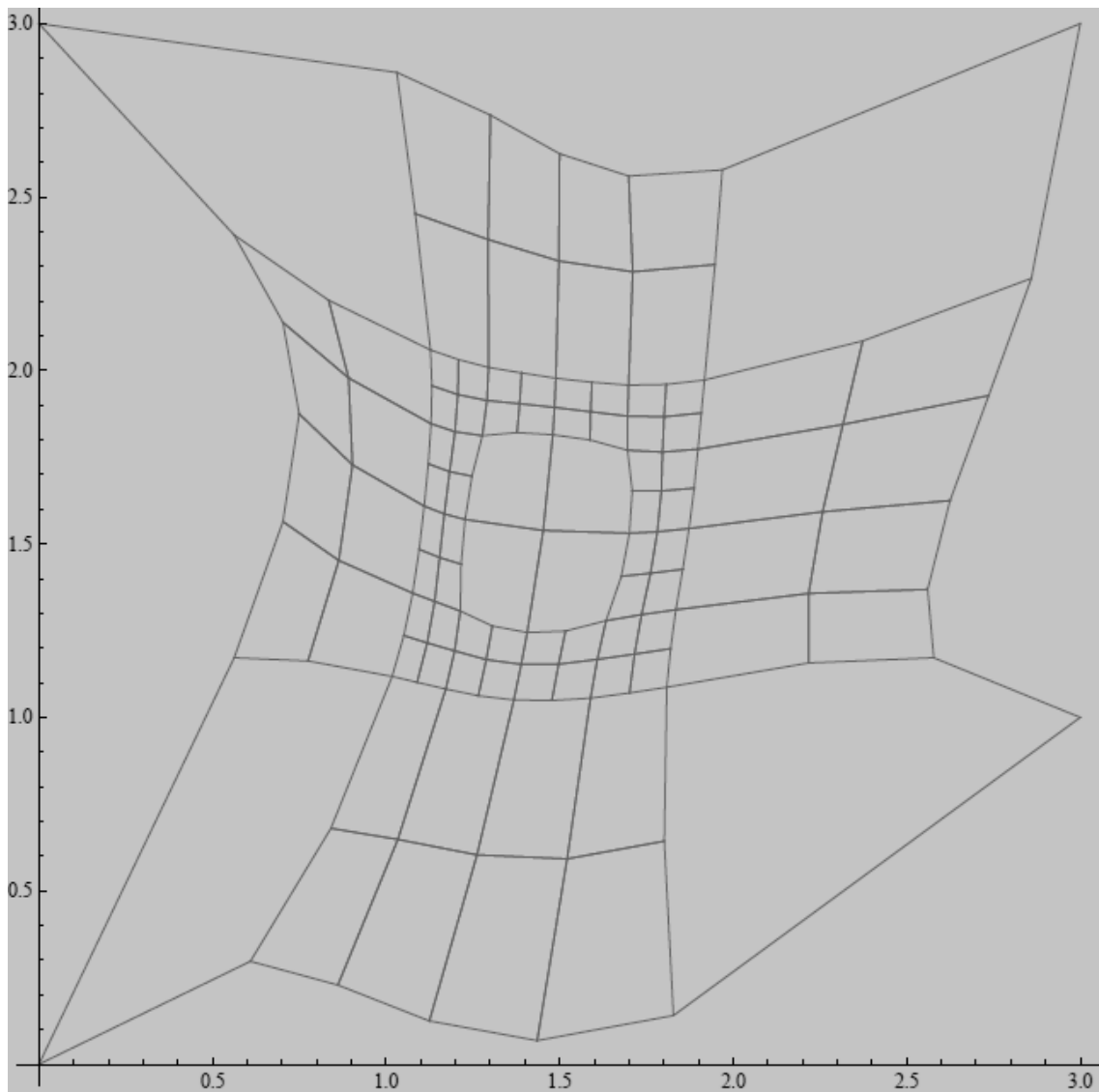
Malla paramétrica:



Malla enredada:

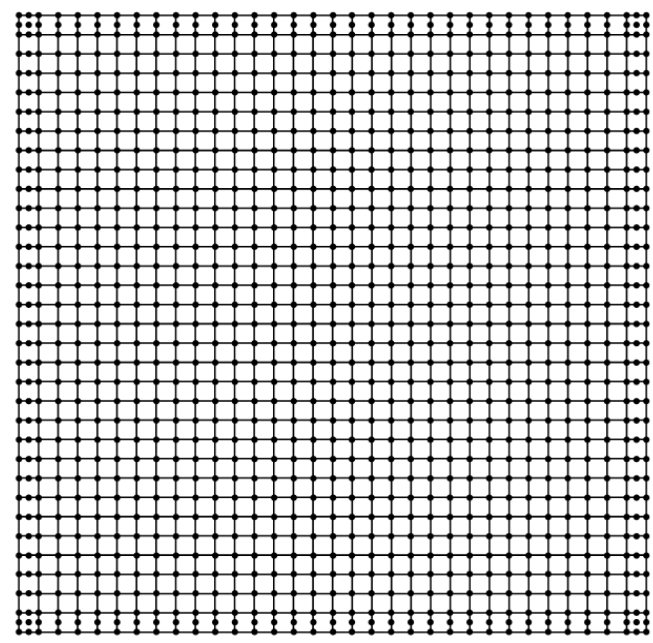


Malla optimizada:

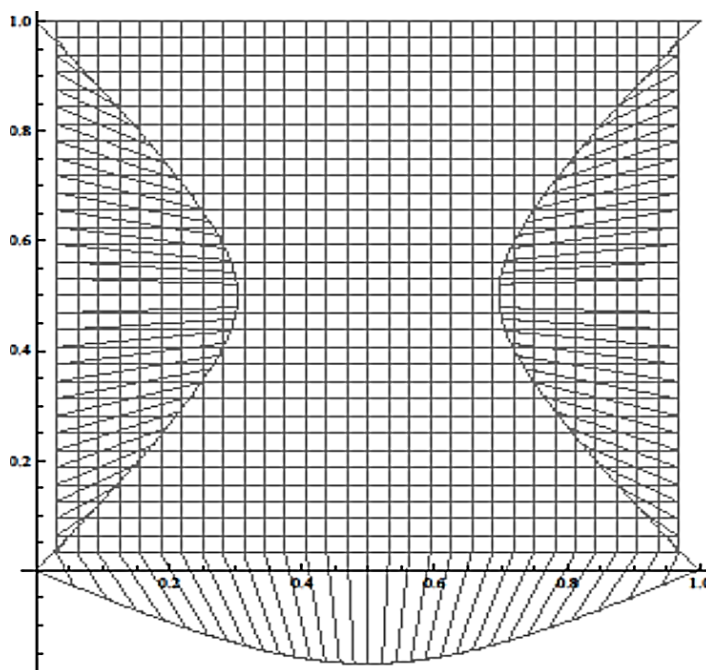


#### 4.12 Caso 12: Transformación en figura irregular con 32x32 celdas.

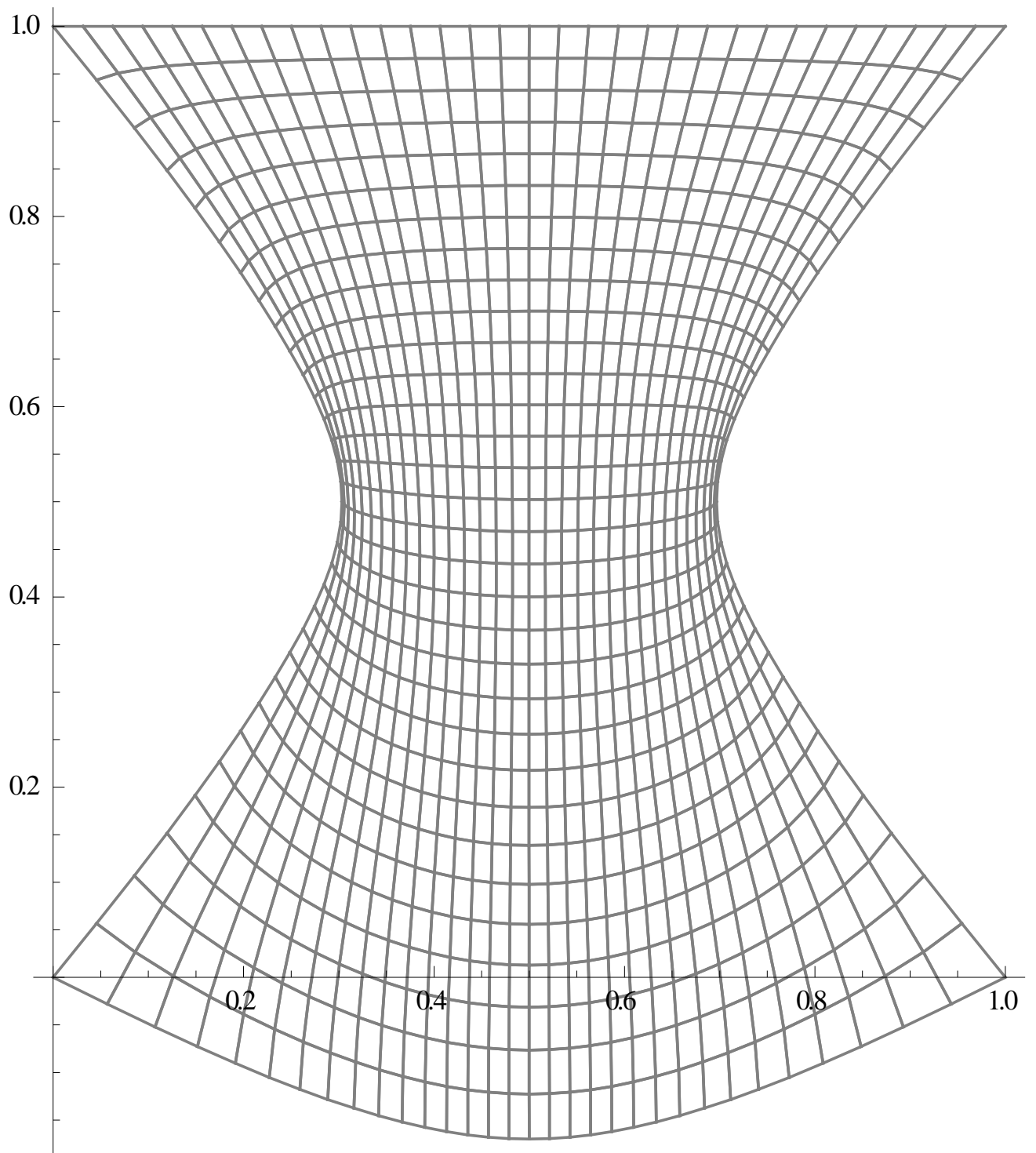
Malla paramétrica:



Malla enredada:

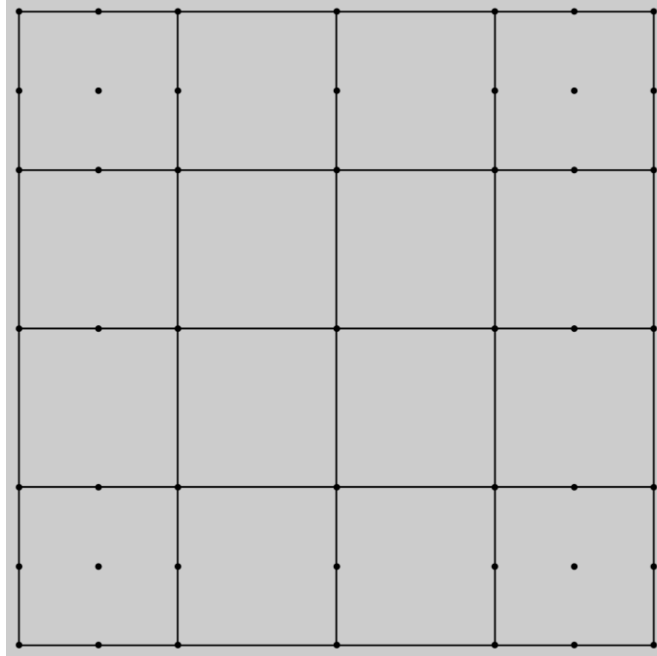


Malla optimizada:

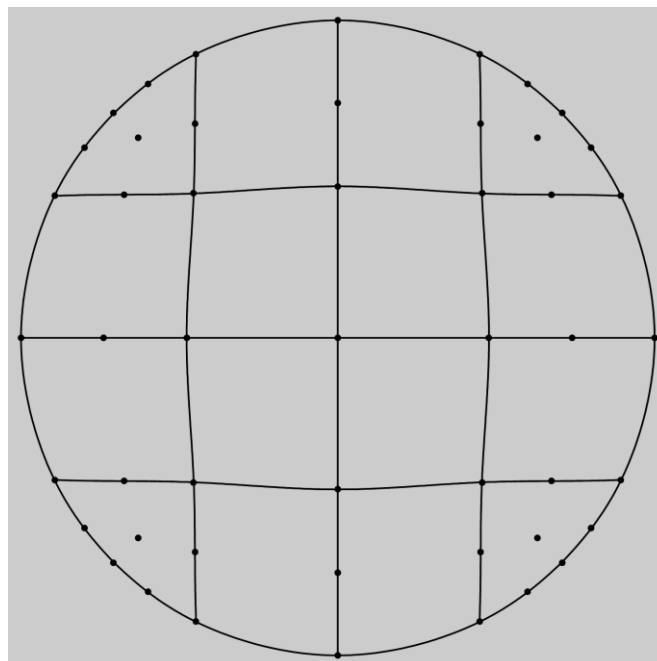


### 4.13 Caso 13: Transformación a círculo con malla de 4x4 celdas.

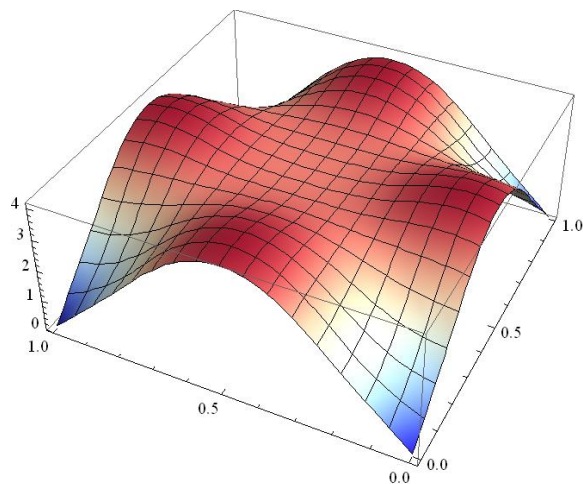
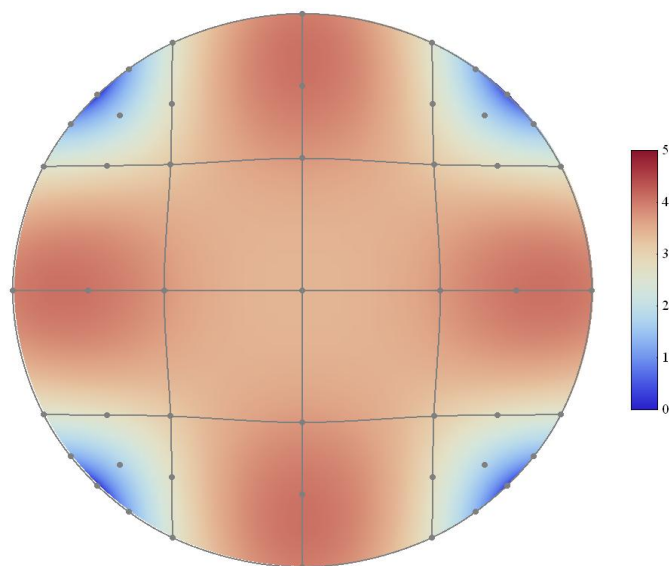
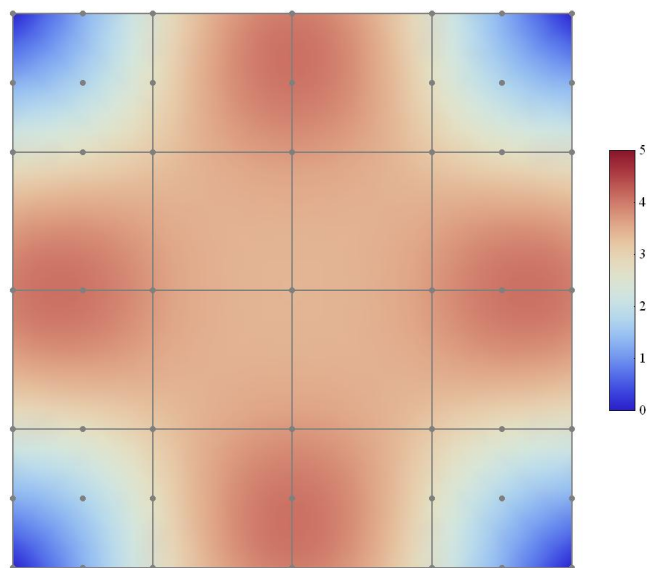
Malla paramétrica:



Malla optimizada:

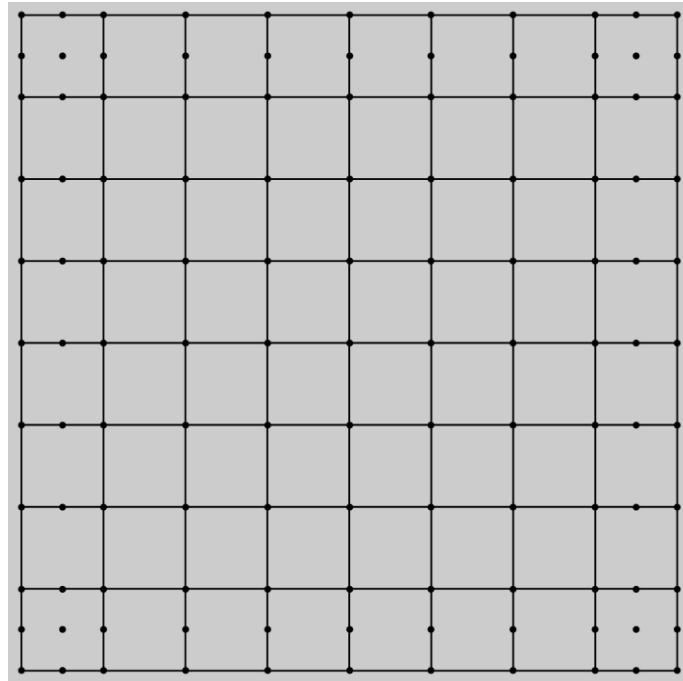


Representación de los jacobianos:

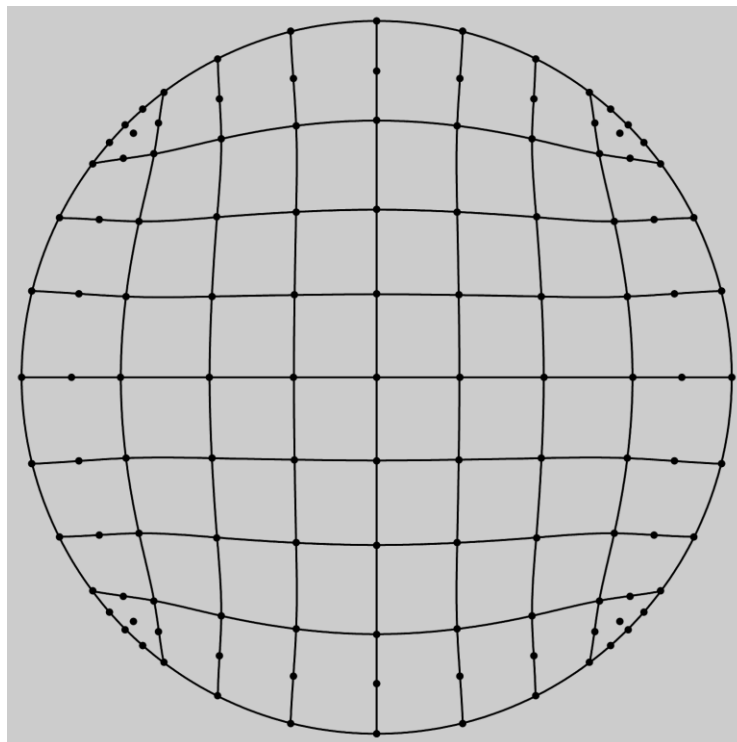


#### 4.14 Caso 14: Transformación a círculo con malla de 8x8 celdas.

Malla paramétrica:

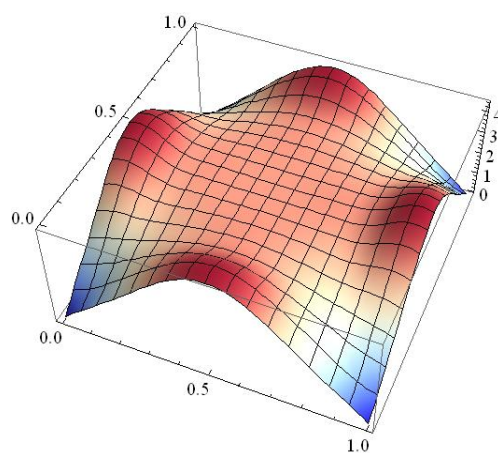
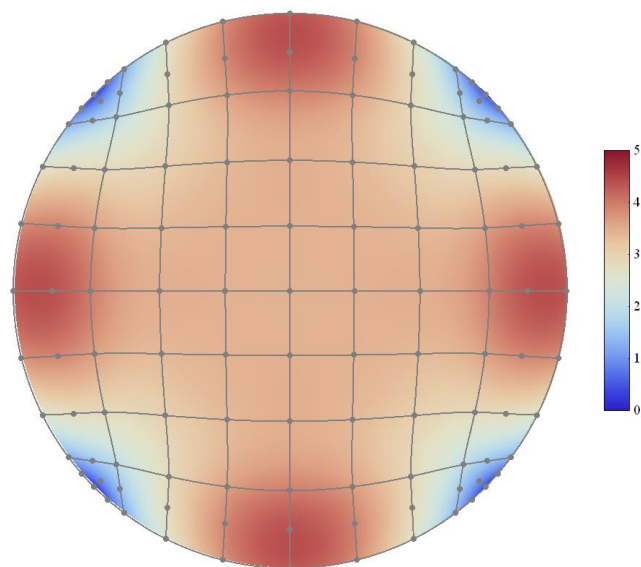
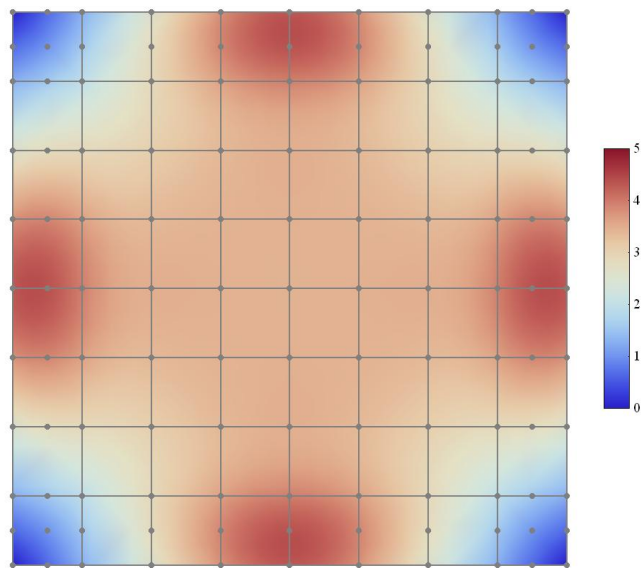


Malla optimizada:



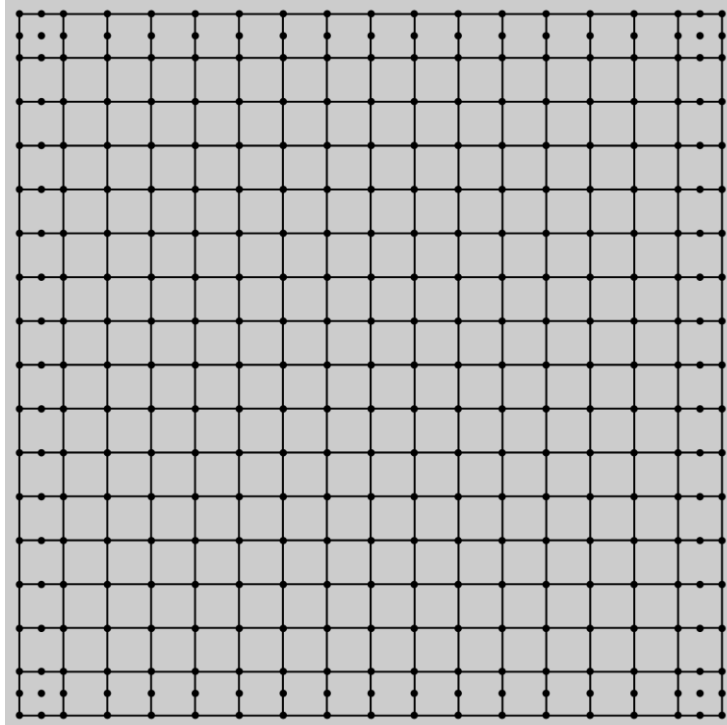


Representación de los jacobianos:

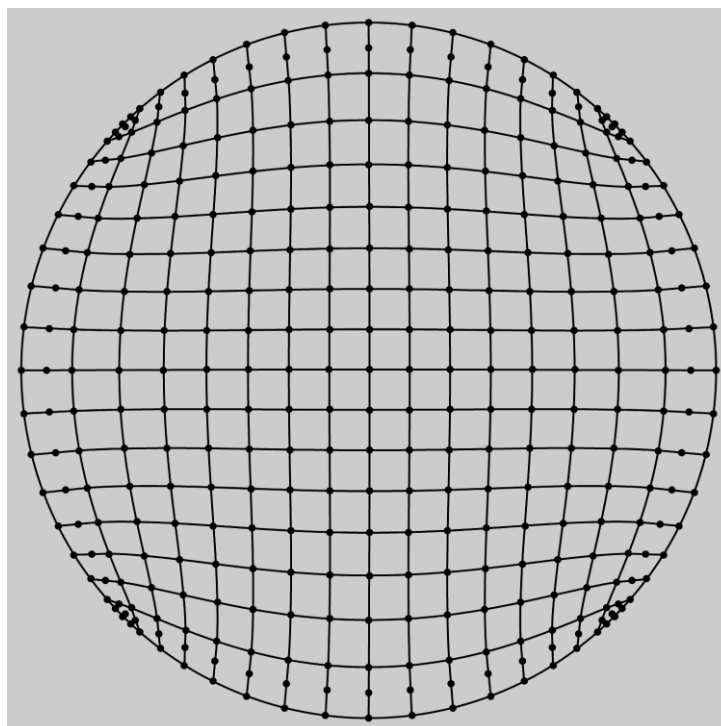


#### 4.15 Caso 15: Transformación a círculo con malla de 16x16 celdas.

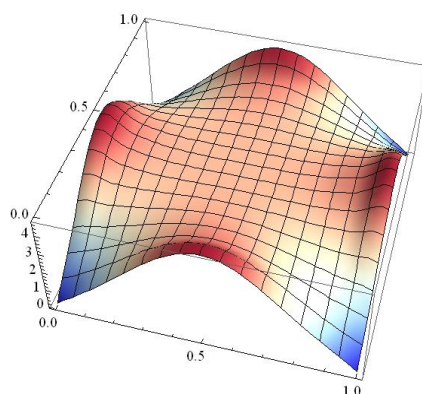
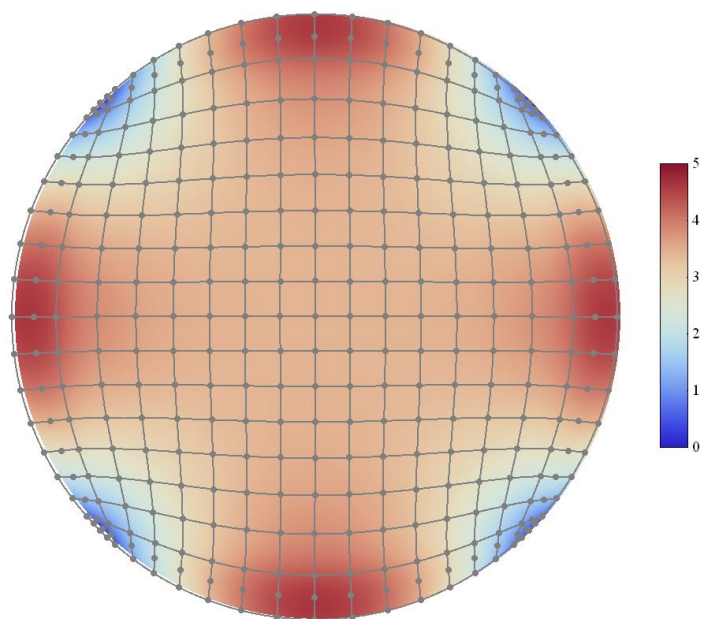
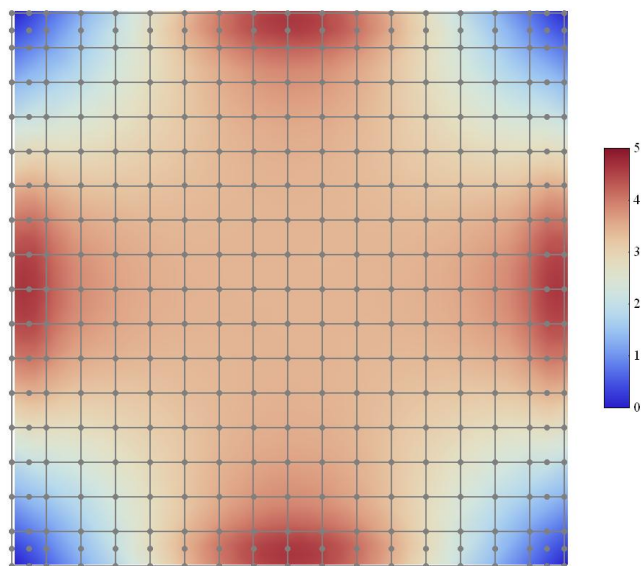
Malla paramétrica:



Malla optimizada:

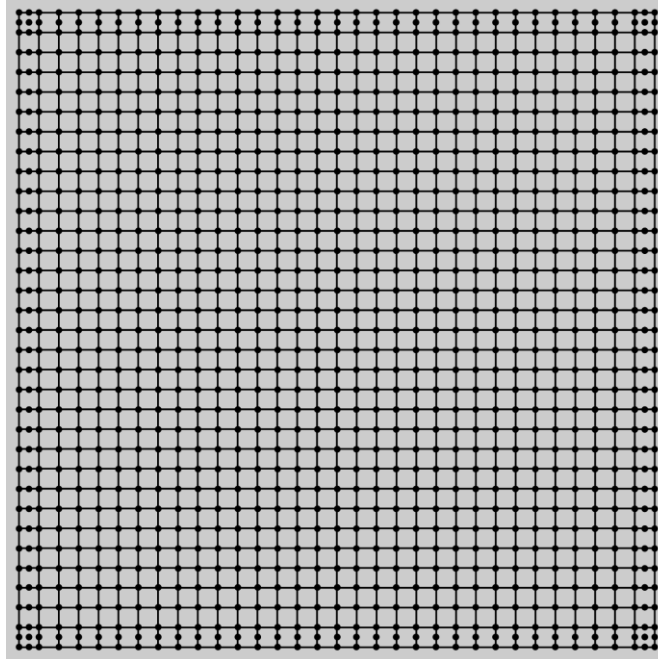


Representación de los jacobianos:

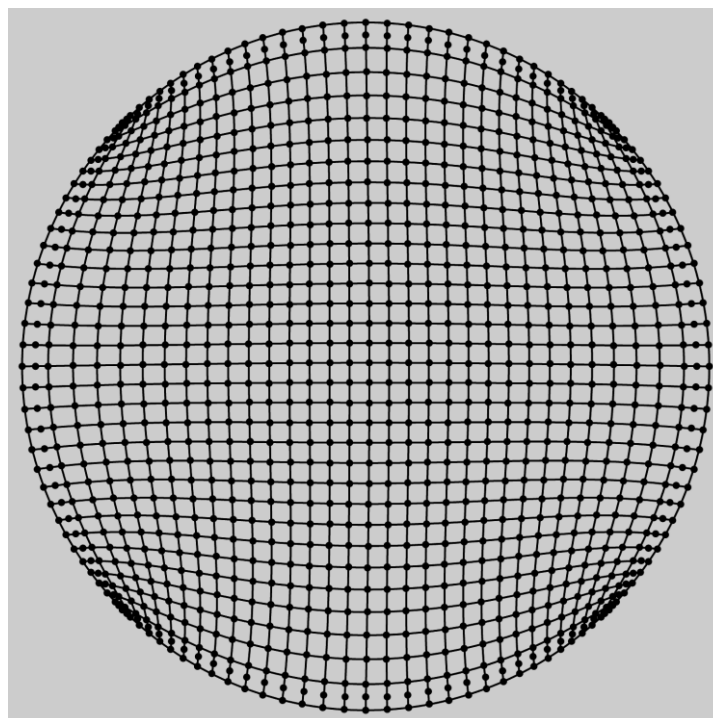


#### 4.16 Caso 16: Transformación a círculo con malla de 32x32 celdas.

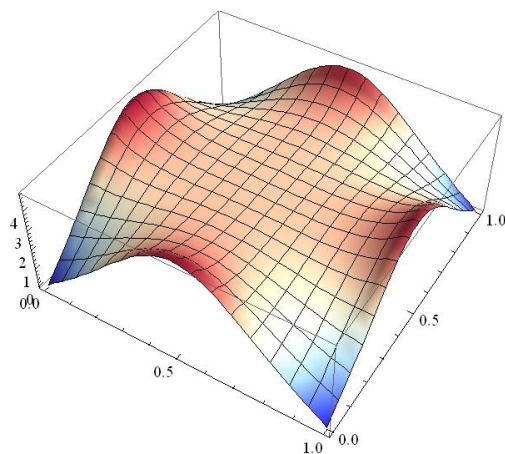
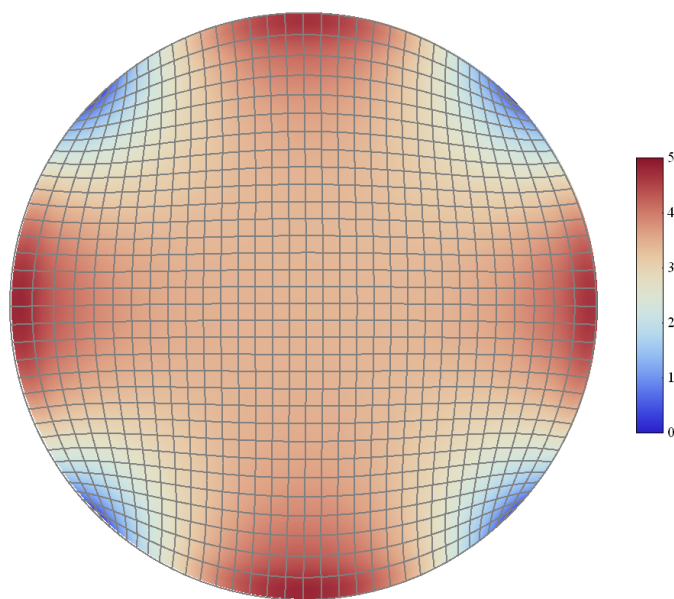
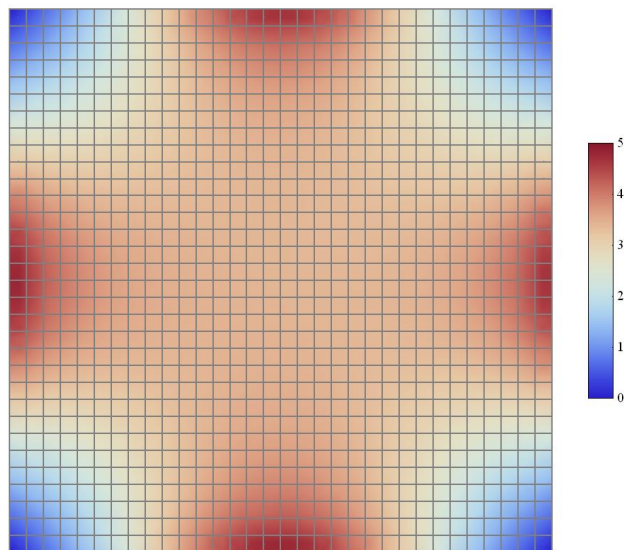
Malla paramétrica:



Malla optimizada:

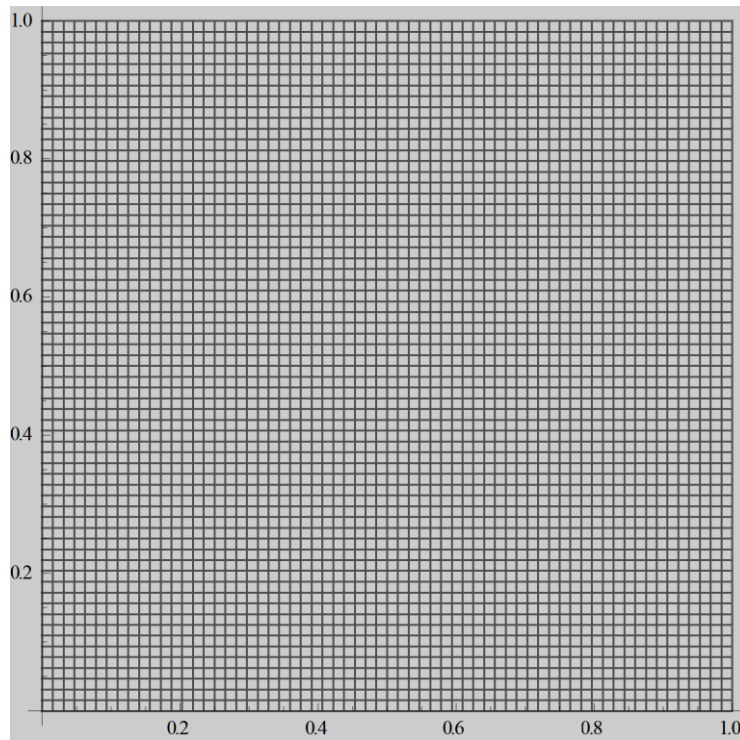


Representación de los jacobianos:

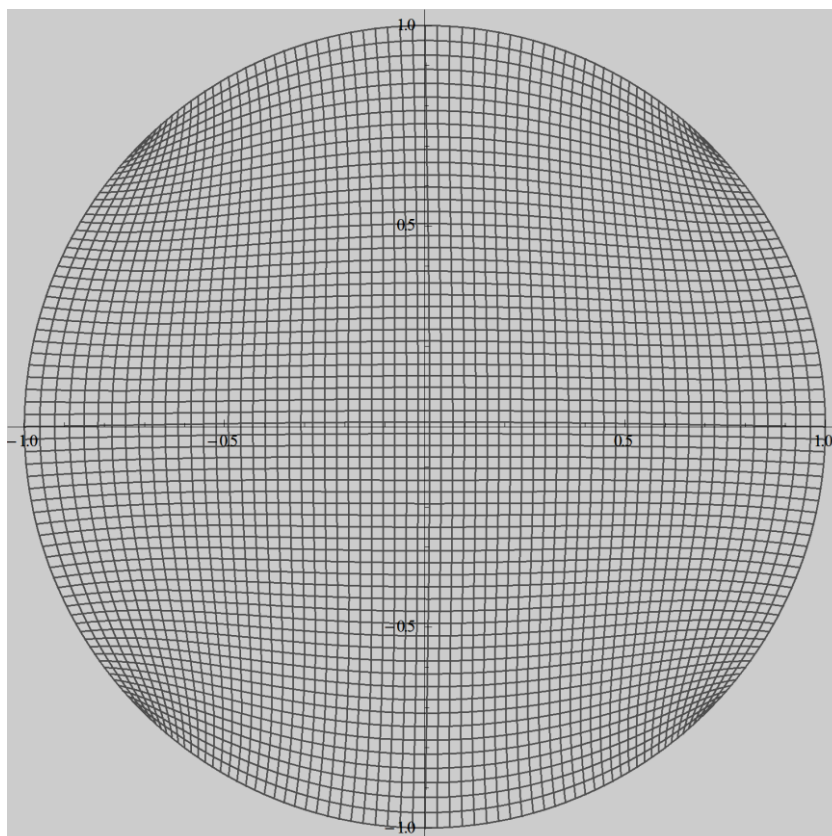


#### 4.17 Caso 17: Transformación a círculo con malla de 64x64 celdas.

Malla paramétrica:



Malla optimizada:



## 5. Conclusiones y Líneas Futuras

Es posible la construcción de T-mallas con buena calidad en dominios planos arbitrarios, si bien existen limitaciones.

Se ha demostrado que es posible la aplicación de técnicas de desenredo y suavizado basadas en optimización de funciones de calidad algebraicas en T-mallas.

El código implementado ha revelado ser altamente versátil, con capacidad de optimización de numerosos tipos de mallas y adaptándose a contornos altamente irregulares.

En el futuro se trabajará en el desarrollo de un código transcrito a un lenguaje de menor nivel como C o C++, así como se desarrollará otro código para T-mallas tridimensionales. También se prevén mejoras en la eficiencia del código con el fin de aumentar su velocidad y disminuir la memoria necesaria.

## 6. Bibliografía

- [1] J. Austin Cottrell, Thomas J.R. Hughes, and Yuri Bazilevs. *Isogeometric Analysis*. WILEY, 2009.
- [2] Y. Bazilevs, V.M. Calo, T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, S. Lipton, M.A. Scott, and T.W. Sederberg. *Isogeometric analysis using T-splines*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:229–263, 2010.
- [3] Becker E.B and Carey G.F. *Finite elements. An introduction*. Prentice-Hall, 1982.
- [4] Brovka M. Trabajo Fin de Master. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. 2012.
- [5] Escobar, J. M., E. Rodríguez, R. Montenegro, G. Montero, and J. M. González-Yuste (2003). Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes. *Computer. Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (25), 2775-2787.
- [6] Escobar, J. M., Cascón J.M., E. Rodríguez, R. Montenegro (2011). A new approach to solid modeling with trivariate T-splines based on mesh optimization. *Computer Methods Applied to Mechanical Engineering*. 200 3210–3222
- [7] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall Inc.1987.
- [8] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, and Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:4135–4195, 2005.
- [9] Knupp, P. (2001). *Algebraic Mesh Quality Metrics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol 23, No 1, 193-218.
- [10] Knupp, P. (2000). *Hexahedral Mesh Untangling & Algebraic Mesh Quality Metrics*. *Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable*, 173-183.
- [11] Knupp, P (2003). A method for hexahedral mesh shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58(2), 319-332.
- [12] Sederberg T., Jianmin Zheng, Bakenov A., Nasri Ahmad. *T-splines and T-NURCCs*. *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*.477-484.
- [13] T.J Wilson. *Simultaneous Untangling and Smoothing of Hexahedral Meshes*. Master Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya. 2011.