ESTUDIO DE LAS SINGULARIDADES EN LA ECUACION DE VAN DER POL

Víctor Hernández Suárez
(Universidad de Las Palmas de G.C.)

RESUMEN

La ecuación de Van der Pol, desde el punto de vista físico, corresponde a un oscilador autoexcitado, que posee cierto número de ciclos límites y cuya evolución depende de los parámetros internos, más bien que de las condiciones iniciales. Sirva como justificación del tema elegido el interés actual en simular con modelos matemáticos el comportamiento de sistemas vivos, como el latido del corazón, en donde se intenta representar oscilaciones autoexcitadas no lineales. La ecuación de Van der Pol ha sido la primera ecuación no lineal de verdadera importancia física en la que fue encontrada una solución periódica. Aquí estudiaremos especialmente los puntos singulares de dicha ecuación haciendo la representación gráfica en todos los casos posibles.

ABSTRACT

In this paper we analyse the singularities of a differential equation, studying especially the Van der Pol's equation that has an important role in the sciences. The Van der Pol's equation was the first non-linear equation really important in Physics which had a periodic solution.

1. Preámbulo

En este trabajo se recuerdan algunas nociones generales sobre singularidades de ecuaciones diferenciales ordinarias, que luego se aplican a la ecuación de Van der Pol.

2. Estudio de singularidades

Dada la ecuación de Van der Pol:

$$x'' - \varepsilon(1 - x^2)x' + ax = 0 \qquad (a, \varepsilon \in A^1), \qquad (2.1)$$

si se hace el cambio:

$$x' = y \qquad (2.2)$$

la (2.1) se transforma en el siguiente sistema de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(1 - x^2) - ax}{y} \qquad (2.3)$$

cuyo único punto singular es el (0, 0), única solución del sistema:

$$\varepsilon(1 - x^2) - ax = 0 \qquad (2.4)$$

$$y = 0 \qquad (2.5)$$

Se trata pues, de una singularidad aislada.

Como es sabido, el estudio de las singularidades de una ecuación diferencial, proporciona una serie de datos sobre el comportamiento de las soluciones de aquella, en un entorno de dichos puntos.

El sistema (2.3) se puede poner de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ax = \varepsilon y + P_2(x,y)}{y + Q_2(x,y)} \qquad (2.6)$$

siendo:

$$P_2(x,y) = -\varepsilon x^2 y \qquad (2.7)$$

$$Q_2(x,y) = 0 \qquad (2.8)$$

H. Poincaré demostró que dada una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + P_2(x,y)}{cx + dy + Q_2(x,y)} \qquad (2.9)$$

en la cual las constantes a, b, c, d son tales que el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \qquad (2.10)$$

y en la que $P_2(x,y)$ y $1_2(x,y)$ cumplen:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{P_2(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \qquad (2.11)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{Q_2(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \tag{2.12}$$

las singularidades en el origen de dicha ecuación (2.9), son las mismas que las de esta otra ecuación más simple:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{CX + dy} \tag{2.13}$$

Para el caso de la ecuación de Van der Pol, el determinante (2.10) se convierte en:

$$\begin{vmatrix} -a & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a \neq 0 \tag{2.14}$$

siendo además:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{-\varepsilon x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \tag{2.15}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \tag{2.16}$$

Por consiguiente, las singularidades de la ecuación de Van der Pol (2.6) serán las mismas que las del sistema lineal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ax + \varepsilon y}{y} \tag{2.17}$$

Además, el comportamiento de las curvas integrales del sistema (2.17) en un entorno del origen, será el mismo que el comportamiento de las curvas integrales de la ecuación de Van der Pol, en un entorno de dicho punto. Por lo tanto, bastará estudiar las singularidades del sistema (2.17), sistema que puede escribirse en la forma:

$$y' = -ax + \varepsilon y \tag{2.18}$$

$$x' = y$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

La ecuación característica de dicho sistema es:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - \lambda & -a \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \varepsilon \lambda + a = 0 \qquad (2.20)$$

que admite como soluciones:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4a}}{2} \qquad (2.21)$$

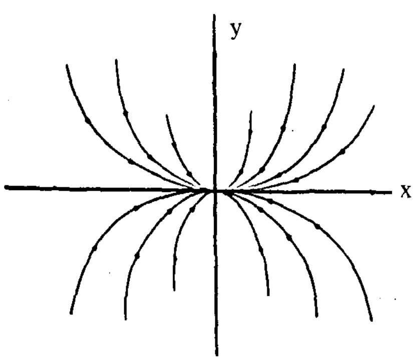
Así, las singularidades de (2.17) se clasificarán atendiendo al valor del discriminante de dicha ecuación, extiendo los tres casos siguientes:

Caso 1: Discriminante $\varepsilon^2 - 4a > 0$

0 lo que es lo mismo: $\varepsilon^2 > 4a$ (2.22)
es decir $/\varepsilon/ > 2a$, con lo que las dos raices λ_1 y λ_2 serán reales y distintas. El comportamientoi de las trayectorias que pasan por el origen dependerá del signo de:

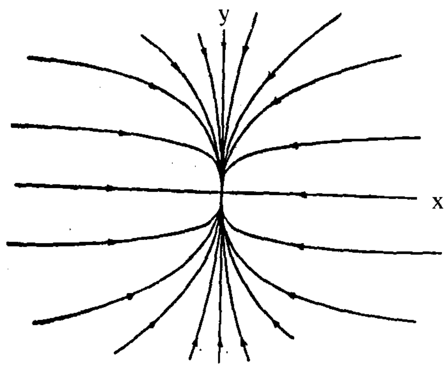
$$\alpha = \lambda_2 / \lambda_1 \qquad (2.23)$$

Si α es positivo, o sea si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, el origen es un NODO o PUNTO NODAL y la forma de las trayectorias se muestra en las figuras (2.1) y 2.2).
Cuando $\alpha > 1$, las trayectorias son tangentes al eje x, y si $\alpha < 1$, las trayectorias serán tangentes al eje y en el origen.
Cuando λ_1 y λ_2 son positivos, el punto representativo del sistema se mueve hacia afuera desde el origen, cuando t aumenta, siendo el origen un nodo INESTABLE.
Si, por el contrario, λ_1 y λ_2 son negativas, el punto representativo del sistema se mueve hacia dentro, hacia el origen, y el origen se dice que es un nodo ESTABLE.
Cuando λ_1 y λ_2 tienen signos diferentes, el origen es un PUNTO DE ENSILLADURA o PUERTO (fig. 2.3) y representa un movimiento INESTABLE. En este caso, los ejes de las **x** y de las **y**, son curvas integrales.



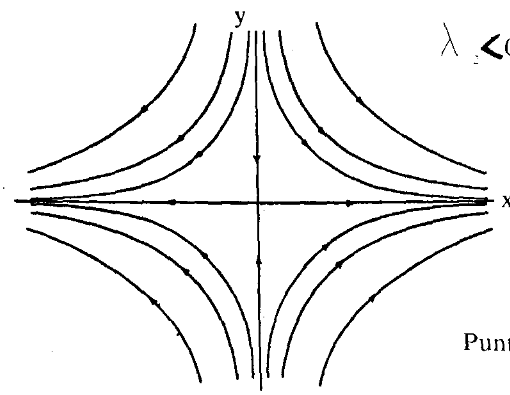
Un punto cualquiera representativo del sistema se mueve hacia el origen
$/\varepsilon/ > 2a$

Figura (2.1) Nodo estable, $\alpha > 1$



$/\varepsilon/ > 2a$

Figura (2.2) Nodo estable $\alpha <> 1$



$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Punto de ensilladura

Figura (2.3)

Caso 2: Discriminante $\varepsilon^2 - 4a \cdot = 0$

Ahora ocurre que:

$$\varepsilon^2 = 4a \qquad (2.24)$$

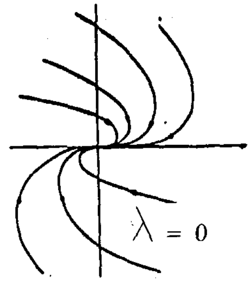
o sea: $\varepsilon = \pm\ 2a$

Por lo tanto, existe una raíz real doble , $\lambda = \varepsilon / 2$.
Si ocurre que $\varepsilon > 0$, se trata de un nodo INESTABLE, DEGENERADO.
Si por el contrario, $\varepsilon < 0$, se trata de un nodo ESTABLE, DEGENERADO.
Cualquier trayectoria permanece totalmente o ne el semiplano superior, o en el semiplano inferior. Las que están situadas en el semiplano inferior se aproximarán al origen desde la izquierda, mientras que las que estas situadas en el semiplano superior se aproximarán al origen desde la derecha. Esto se muestra en la figura (2.4).

Figura (2.4)

Nodo estable

$\varepsilon < 0$
$\varepsilon = 2a$



Nodo degenerado

Caso 3: Discriminante $\varepsilon^2 - 4a < 0$

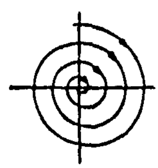
Se tiene entonces que:

$$\varepsilon^2 < 4a \qquad (2.25)$$

y por lo tanto : $\varepsilon < 2a$

Se ve claramente que a > 0, ya que si no, el discriminante de la ecuación sería positivo. En este caso, las dos raices son complejas conjugadas: m + ni, m—ni. Si m $\neq$ 0, el punto singular es un foco o PUNTO FOCAL y las curvas integrales serán espirales logarítmicas desarrollándose en torno al origen.
Si m $<$ 0, todas las características se aproximan al origen, pero no entran en él, cuando t tiende a infinito. Se trata de un foco estable. Si, por el contrario, m $>$ 0, todas las espirales se desenroscan desde el origen hacia el infinito, y entonces el origen es un foco INESTABLE, (véase fig. 2.5).

Foco Estable
$a > 0$
$\varepsilon < 2a$

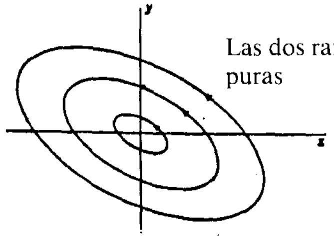


Las dos raíces son complejas conjugadas

Figura (2.5)

Finalmente, si $\varepsilon = 0$ se trata de un centro, para lo cual debe ocurrir que $\varepsilon = 0$, caso desechable en la ecuación de Van der Pol, en la que siempre se supone que $\varepsilon \neq 0$.
En general un centro es un singular en cuyo entorno toda característica es cerrada y envuelve a la singularidad. En la figura siguiente se muestra un centro.

Centro
$\varepsilon = 0$



Las dos raíces son imaginarias puras

Figura (2.6)

3. Distribución de puntos singulares de la ecuación de Van der Pol:

De la discusión precedente se deduce que el carácter del sistema depende de los parámetros a y ε que comparecen en la ecuación de Van der Pol. Así, se puede dividir el plano ε, a en regiones que caractericen a los diversos tipos de puntos singulares.
Cuando $a > 0$, λ_1 y λ_2 son complejos o reales teniendo el mismo signo dependiendo de si el discrminante es positivo o negativo.
Cuando $\Delta < 0$ y $\varepsilon > 0$, corresponde a focos inestables, mientras que $\Delta < 0$ y $\varepsilon < 0$ corresponde a focos estables. Por otra parte, $\Delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ corresponde a nodos inestables.
La curva: $\varepsilon^2 = 4a$ (3.1)
que corresponde al caso en que hay una raíz doble, separa los nodos de los focos, mientras que el eje a positivo, que separa los focos estables de los inestables, corresponde a los centros.

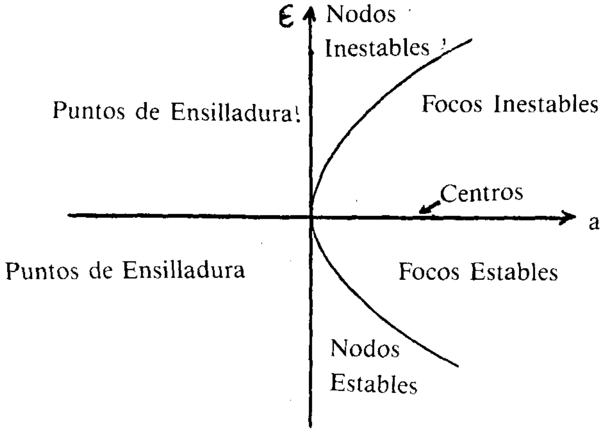


Figura (2.7)

Puntos singulares de la ecuación de Van der Pol.
Si las trayectorias pasan por un punto singular, como en el caso del punto de ensilladura, una cantidad infinita de tiempo se requiere para que el estado alcance el punto singular desde cualquier punto. Esto es lógico, ya que el sistema es un punto singular se encuentra en reposo y en equilibrio. En otras palabras, si las condiciones iniciales ponen en marcha el movimiento en un punto singular, el estado del sistema nunca cambia. Pero si lo ponen en marcha, en una trayectoria que se dirige hacia el punto singular, pero no en el mismo punto singular, el estado del sistema cambia continuamente pero nunca alcanza aquel punto singular.

Una trayecto no trivial corresponde a un movimiento periódico si, y solo si, no pasa por un punto singular y es cerrada.

Esto se infiere del hecho de que el punto representativo, habiendo ya comenzado su movimiento en un punto arbitrario de la trayectoria cerrada, volverá a su posición inicial en un período finito de tiempo *(el período de la oscilación)*, debido a que la velocidad del estado es distinta de cero en cualquier punto de la trayectoria.

Luego, se puede obtener una buena representación cualitativa del movimiento en todo el plano, si se conoce el carácter del movimiento en los entornos de los puntos singulares.

Cuando el punto singular es de ensilladura, el índice de dicha singularidad es —1. Si por el contrario, el punto singular es un nodo o un foco, el punto singular tiene de índice 1.

Esto sigue de un teorema de la teoría de Poincaré para singularidades simples.

Bibliografía

(1) HAYEK CALIL, N.: *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, La Laguna, 1975.

(2) HUREWICZ, W.: *Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*, Rialp S.A., Madrid. 1978.

(3) PONTRIAGUI, L.S.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Colección Ciencia y técnica, Editorial Aguilar, Madrid. 1973.

(4) VAN DER POL, B.: «Relaxation oscillations», *Phil. Mag.* Vol. 2, 1926.